短期ナッシュ均衡と長期ナッシュ均衡*

――内生的成長モデルに対する Repeated Game の適用――

森　　　　誠

Harrod 以来，伝統的な経済学は長期における成長率はそれぞれ外生的に与えられる技術進歩率と人口成長率の和によって決定されると考えてきた。それに対して技術知識の蓄積という観点から技術進歩を内生化することにより長期の成長を考察しようとする試みがある。最近では，P. Romer〔10〕によって提唱されている内生的成長モデルがそれである[1]。

Romer の理論の骨子は次のようなものであろう。1．個別経済主体は消費を犠牲にすることにより技術知識ストックを蓄積することができる。2．自己の技術知識ストックの増加のみならず，経済全体の技術知識ストックの増加が生産量の増加に貢献する（技術のスピルオーバー効果）[2]。このアイデアを異時点間にわたる効用最大化モデルに適用することにより以下の結論を得る。理想的な計画経済（集権型経済）では経済全体の技術知識ストックをコントロール

〔キー・ワーズ〕
内生的成長モデル，ナッシュ均衡，Repeated Game

* この小論を藤田整先生，三辺信夫先生に捧げます。

小論の骨子は金曜セミナーで報告された。席上，有益な意見を与えられた諸先生ならびに院生諸子に深く感謝する。特に，瀬岡吉彦教授からは重要なコメントを得た。なお，小論作成にあたり柴田章久氏，中嶋哲也氏（岩手大学）との議論は有益であった。
もちろん，ありうべき誤りは筆者の責に帰す。

1) QJE, Vol. 106, May 1991 と JPE, Vol. 98, No. 5, 1990 に内生的成長に関する特集がある。

2) Romer〔10〕では，総技術知識ストックの外部効果による収穫逓増によって，最適成長率が一定でなく増加してゆくことも強調されている。

できるのに対し，競争経済（分権型経済）では他の主体の行動を所与として行動するから，個別主体は自己の技術知識ストックのみを調整する。その結果，競争経済における長期にわたる効用は計画経済におけるそれより小となる[3]。

以上の説明から明らかなように Romer モデルでは個別主体が総技術知識ストックを直接には決定できないことが，計画者による直接コントロールの方がより望ましいという結論につながる理由である。そして，かかる外部性を生ぜしめているのは，各個別主体が他の主体の行動を所与として自己の行動を決定する（ナッシュ行動）という考えである。しかしながら，Romer のように無限期間の問題を考えるとき，より望ましい状態が有り得るにもかかわらず，分権型経済ではナッシュ行動の故にその状態を実現できないのであろうか？ すなわち，協調行動による長期の利益を考慮して協調行動がとられる可能性はないであろうか？ この問題を考えるために，我々は非協力ゲームにおける Repeated Game を考察する。すなわち，自己の行動を他の主体の行動と毎期独立に決定するという短期的なナッシュ行動（以下，短期ナッシュ行動と呼ぶ）を仮定する事なく，長期にわたる行動戦略としてのナッシュ行動を考察する[4]。

我々の得た主要な結論は次の通りである。短期ナッシュ行動がとられるときには対称的な経済主体からなる分権型経済ではパレート最適状態を達成できないのに対して，協調行動による長期の利益を考慮するとき，分権型経済においてもパレート最適状態を達成することができる。しかし，各主体の初期保有資本ストックにギャップがあるならば協調行動の可能性は低くなる。

3) Schmitz〔12〕も Romer モデルを応用しながら，両経済における効用比較をおこなっている。
ちなみに，Barro〔2〕によって内生的成長モデルのアイデアが租税による政府サービスの提供の問題に応用されている。すなわち，Barro は，租税による政府支出が民間資本ストックの生産性に与える正の外部効果に注目し，次のように結論する。比例税による場合よりも，政府サービスの直接計画が行われる場合の方が Social Welfare は大となる。また，この直接コントロールの場合と，定額税（人頭税）が実施される場合の Welfare は同一である。すこし立ち入って，上記のような結論が成立する理由をみておこう。比例税の場合を考えてみる。分権化経済においては，ある主体の生産の増加による政府の税収の増加は，政府支出サービスの量に影響を与えるけれども，他の主体の行動を所与と考える限り，その公共サービスの増加量は自己の支払う税が増加した分だけになる。一方，政府が公共サービスを直接にコントロールする場合は，経済全体から民間の財およびサービスを政府が提供させ，それを公共財として民間に提供するから，比例税のケースにおいて各主体全員が同時に生産の増加を行った場合に相当する。従って，民間に提供される公共財の量は公共財が直接コントロールされる場合の方が直接税の場合に比べてより大となるから，それだけ生産性が高まることとなる。定額税の場合は，税額が各主体の生産量と独立であるから公共財の量は公共財が直接コントロールされる場合と同一となる。
しかし，Barro は民間総資本ストックの個別生産関数に対する影響を無視している。詳述はしないけれども，この点を考慮し，短期的なナッシュ行動を前提にするなら，定額税が実施される場合も公共財が直接コントロールされる場合よりも Social Welfare が低くなる。

4) Romer=Barro 流に外部性を強調することに対する批判として Prescott and Boyd〔8〕,〔9〕がある。そこでは，overlapping generation モデルが導入され，技術知識の共有と若年世代への訓練に関する協調行動が考察されている。我々との差異に関していえば，彼らは協調行動（結託）を前提として分析しているが，我々の場合は自発的な協調行動が成立するか否かを問うているわけである。

この結論はまた次の事を意味している。すなわち，短期ナッシュ行動が常に採用される必然性は存在せず，暗黙の共謀が成立しない状況のもとでは，その結果として短期ナッシュ行動が選択される。

小論の構成は以下の通りである。まず基本モデルを示し，短期ナッシュ行動がとられる場合と「資本」が計画者によって直接にコントロールされる場合の Welfare 比較が行われる (1)。次に，Repeated Game が導入され暗黙の共謀が成立する条件が示される (2)。2節までの議論は，すべてに関して同一の主体を前提としてなされるが，他は同一として，2主体の初期資本保有量にギャップがある場合における暗黙の共謀の可能性が検討される (3)。そして，n 主体の初期資本保有量にギャップがある場合における暗黙の共謀の可能性が検討される (4)。最後に結論が示される (5)。

1 基本モデル
——短期ナッシュ行動と Planner による計画——

我々は技術知識ストックの相互依存による総技術知識ストックの個別主体の生産関数に対する影響を考察する。

次節以降の議論を容易にするために特殊ではあるが様々な単純化仮定を用いる。まず，次のような生産関数を想定する[5]。

$$(1\text{-}1)\qquad Y_i = AK_i + \alpha \textstyle\sum_{m \neq i} K_m \qquad (A \geqq \alpha \geqq 0)$$

ここで，i は主体 i を意味する。K は技術知識ストックを意味するが，以下「資本」と呼ぶ[6]。第一項が自己資本の生産量 Y に与える効果を示し，第二項は他の主体の資本ストックが個別主体 i の生産量に与える効果を示している。

さらに，資本は消費 C を犠牲にすることによって蓄積され，減価しないと仮定する[7]。すなわち，t を期間を示す添え字として

$$(1\text{-}2)\qquad K_i(t+1) - K_i(t) = Y_i(t) - C_i(t).$$

我々も Romer=Barro と同じく次のように仮定する。すなわち，一家計が一企業と仮定し，全てに関して同質な家計が存在するとする。また，一家計の人口を一定と仮定し，一家計当り

5) 我々は，経済全体の技術知識ストックの個別生産関数に与える影響と成長あるいは welfare の問題に議論を集中するために，他の生産要素の生産関数に与える効果を捨象する。また，議論を実物体系に限定するために，名目要因の成長に与える効果もまた捨象する。すぐ本文で示されるように異時点間にわたる最大化を扱うのが最近のはやりである。しかしながら，瀬岡〔13〕はそうしたモデルで，一期間内で nominal rigidity をもつ貨幣賃金率の合理的決定問題を考察するときに，純粋なケインズ型経済では決定されない変数が生じることを示しており重要である。

6) Barro〔2〕は広義の資本と呼んでいる。また，Romer〔11〕では，物的資本，知識ストックおよび人的資本等の区別を導入するモデルをサーベイしている。

7) このように通常の物的資本の蓄積と同様の定式化は Romer〔11〕，Barro〔2〕にある。

の変数を小文字で表記する。さらに小論では分析を簡単化するために二主体 i, j が存在するとする（以下，i と区別する必要がある場合にだけ添え字 j を用いる）。

1-A　短期ナッシュ行動における最適化問題

この経済において短期ナッシュ行動がとられるならば，個別主体の無限期間にわたる効用最大化問題は，$\{x(t)\}$ を x の列として，次のように定式化される[8]。

(1-3)　$P(N)$

$$U^n \equiv \mathrm{Max} \sum_{t=0}^{\infty} D^t \log c(t) \qquad (0<D<1),$$

$$\text{S. to } k(t+1)=\tilde{B}k(t)+\alpha k_j(t)-c(t) \qquad (\tilde{B}\equiv 1+A),$$

$$\{k_j(t)\} \text{ given, } k(0) \text{ given.}$$

ここで c は一家計当り消費，k は一主体当り資本である。

ラグランジュアン

$$L\equiv \sum_{t=0}^{\infty} D^t\{\log c(t)+\mu(t)(\tilde{B}k(t)+\alpha k_j(t)-c(t)-k(t+1))\}$$

を考えると，最適化条件より

(1-4)　$\partial L/\partial c(t)=0 \leftrightarrow 1/c(t)=\mu(t),$

(1-5)　$\partial L/\partial k(t)=0 \leftrightarrow \mu(t-1)=D\tilde{B}\mu(t)$

だから

(1-6)　$c(t+1)/c(t)=D\tilde{B}\equiv\tilde{G}$

両主体がこのように行動するから

(1-7)
$$\begin{cases} k(t+1)=\tilde{B}k(t)+\alpha k_j(t)-c(0)\tilde{G}^t \\ k_j(t+1)=\tilde{B}k_j(t)+\alpha k(t)+\alpha k(t)-c_j(0)\tilde{G}^t \end{cases}$$

が成立するが，主体の対称性の仮定より $k(0)=k_j(0)$ だから $c(t)=c_j(t)$, $k(t)=k_j(t)$ とすると

(1-8)　$k(t+1)=Bk(t)-c(0)\tilde{G}^t \qquad (B\equiv\tilde{B}+\alpha)$

が成立する[9]。従って，E を定数として，

(1-9)　$k(t)=EB^t+\dfrac{c(0)}{B-\tilde{G}}\tilde{G}^t$

となるが，Transversality Condition（以下 TVC）より，

(1-A)　$k(t)=k(0)\tilde{G}^t\equiv k^n(t),$

$$c(t)=c(0)\tilde{G}^t,\ c(0)=k(0)(B-\tilde{G})\equiv c^n(0)$$

8)　$U=\sum_{t=0}^{\infty} D^t c(t)^{1-\sigma}/(1-\sigma)$ のタイプの方がより一般的であるが，本節の議論は $\sigma\geqq 1$ ならば基本的に成立する。

9)　ただし，次節参照。

という balanced growth が成立する。

このとき，個別主体の welfare は

(U^n)　$U^n=\sum_{t=0}^{\infty} D^t \log(c^n(0)\tilde{G}^t)$

$$=\log c^n(0)/(1-D)+D\log\tilde{G}(1+2D+3D^2+\cdots\cdots+tD^{t-1}+\cdots\cdots)$$

$$=\frac{1}{1-D}\left(\log c^n(0)+\frac{D}{1-D}\log\tilde{G}\right)$$

1-B　Planner による最適化問題

planner は k と k_j を同時にコントロールできる。ここで，Romer〔10〕に従い，主体の同質性の仮定より $k(t)=k_j(t)$, $c(t)=c_j(t)$ として planner は次の Social Optimization Problem 問題を解くとしよう。

(1-10)　$P(S)$

$$W\equiv \mathrm{Max} \sum_{t=0}^{\infty} D^t \log c(t)$$

$$\text{S. to } k(t+1)=Bk(t)-c(t),\ k(0) \text{ given.}$$

A と同様にして $c(t)=c(0)G^t(G\equiv BD)$ だから TVC より次式が成立する。

(1-B)　$k(t)=k(0)G^t\equiv k^s(t),$

$$c(t)=c(0)G^t,\ c(0)=k(0)(B-G)\equiv c^s(0).$$

従って，一主体当り welfare は A と同様にして

(W)　$\mathrm{W}=\dfrac{1}{1-D}\left(\log c^s(0)+\dfrac{D}{1-D}\log G\right).$

1-C　U^n と W の効用比較

(U^n) と (W) を比較すると $c^n(0)>c^s(0)$ であるが $\tilde{G}<G$ である。すなわち，各主体が他の主体の資本ストックを所与として行動する場合と planner が各主体の資本ストックを同時に調整する場合を比較するとき，他の主体の資本がある主体の生産関数に正の効果をもつのであるから，初期の各主体の消費水準を低くし，経済全体の資本ストック増加率を高めた方が長期的には高い消費水準を実現できるというわけであろう。しかし，初期消費量と成長率は独立ではない。効用水準を比較しておこう。

(1-11)　$W\gtreqless U^n \leftrightarrow F(B)\gtreqless F(\tilde{B})$　（複号同順），

$$F(x)\equiv\log(B-Dx)+D/(1-D)\log(Dx).$$

ここで $F'(x)\gtreqless 0 \leftrightarrow B\gtreqless x$（複号同順）だから $\alpha>0$ のとき $W>U^n$。

かくして Romer の主張した命題が成立する。

〔命題1〕

「経済全体の資本（技術知識）が個別生産関数にプラスの効果を持つとする。そのとき，planner が経済全体の資本量をコントロールする経済での welfare は，個別主体が短期ナッシュ行動に従って個別資本を蓄積する場合の welfare より大である。」

2　Repeated Game による Pareto 最適達成の可能性

よく知られているように one-shot の囚人のジレンマゲームでは，共に自白するよりも，共に自白しない方が双方にとってよりよい結果をもたらすにもかかわらず，短期ナッシュ行動によって共に自白してしまうという均衡が成立する。しかし，産業組織論等で議論されているように，各期に同じゲームが繰り返される場合には，協力ゲームでないにもかかわらず，暗黙の共謀が成立する可能性がある。ポイントは報復行為による脅しにある[10)]。

いま，planner の計画で与えられる Pareto 最適を達成する資本蓄積行動があることがわかっている。また，短期ナッシュ行動で保証される効用水準がある。そこで，次の二つの戦略を考えよう。

Co-operation 戦略：初期に Pareto 最適戦略をとり，他の主体が Pareto 最適戦略をとり続ける限り，自己もその戦略をとる。しかし，他の主体が一旦，短期ナッシュ行動をとるならば，次期以降，自己は短期ナッシュ行動をとり続ける（以下，C戦略と記す）。

Defection 戦略：一貫して短期ナッシュ行動をとる（以下，D戦略）。

従って，問題は戦略選択問題である。そこで，他の主体がC戦略を採用したとき，自己がD戦略をとったとする。そのとき，自己が獲得する効用を U^D とする。また，自己もC戦略を採用したときに得る効用を U^C とする。そのとき，$U^C>U^D$ ならば自己はC戦略を採用する。同様にすべての主体にとって $U^C>U^D$ が成立するならば，C戦略の組はナッシュ均衡である。

我々の二主体のケースでは，それぞれがC戦略をとったときの効用 U^C は W に等しいことは明らかであろう。U^D を求めるために，i がC戦略を採用しており，j がD戦略を採用したとする[11)]。そのとき，運動方程式より，0期では

$$(2\text{-}1)\qquad \begin{cases} k(1)=\tilde{B}k(0)+\alpha k_j(0)-c^s(0), \\ k_j(1)=\tilde{B}k_j(0)+\alpha k(0)-c_j(0) \end{cases}$$

であり，i は1期首において $k_j(1)$ の値から j の裏切りを知るから，報復として1期以降短期ナッシュ行動をとる。すなわち，

$$(2\text{-}2)\qquad \begin{cases} k(2)=\tilde{B}k(1)+\alpha k_j(1)-c(1), \\ k_j(2)=\tilde{B}k_j(1)+\alpha k(1)-c_j(1) \end{cases}$$

10) Repeated Game (Supergame) に関しては Tirole〔15〕, Kreps〔4〕。また，邦文では今井・小林〔3〕，鈴木〔14〕がある。

11) 1節の議論からわかるように，長期の利益計算ができるという意味で主体の合理性が仮定されている。また，情報の完備が仮定してある。

だから，両主体の問題は次のようになる。

(2-3)　〔主体 i〕

$$c^s(0)+\text{Max}\ \sum_{t=1}^{\infty} D^{t-1}\log c(t)$$

$$\text{S. to } k(t+1)=\tilde{B}k(t)+\alpha kj(t)-c(t)\qquad (t\geqq 1),$$

$$\{kj(t)\}\text{given, } k(1)\text{given, } c^s(0)\text{given.}$$

(2-4)　〔主体 j〕

$$\text{Max}\ \sum_{t=0}^{\infty} D^{t}\log c_j(t)$$

$$\text{S. to } k_j(t+1)=\tilde{B}k_j(t)+\alpha k(t)-c_j(t)\qquad (t\geqq 0),$$

$$\{k(t)\}\text{given, } k_j(0)\text{given.}$$

明かに j の問題は $P(N)$ と同一であるから，

$$(2\text{-}5)\qquad \begin{cases} c_j(t+1)/c_j(t)=\tilde{G} & (t\geqq 0), \\ k_j(t+1)=\tilde{B}k_j(t)+\alpha k(t)-c_j(0)\tilde{G}^t & (t\geqq 0) \end{cases}$$

が成立する。一方，i の1期以降の最適行動は，$P(N)$ と同様にして，

$$(2\text{-}6)\qquad \begin{cases} c(t+1)/c(t)=\tilde{G} & (t\geqq 1), \\ k(t+1)=\tilde{B}k(t)+\alpha k_j(t)-c(1)\tilde{G}^{t-1} & (t\geqq 1). \end{cases}$$

従って，$k(1)$, $k(2)$ を所与として $t\geqq 1$ において

$$(2\text{-}7)\qquad k(t+2)-2\tilde{B}k(t+1)+k(t)(\tilde{B}^2-\alpha^2)=c(1)\tilde{G}^{t-1}(\tilde{B}-\tilde{G})-\alpha c_j(0)\tilde{G}^t$$

が成立するから，E と F を定数として

$$(2\text{-}8)\qquad k(t)=E\lambda_1{}^t+F\lambda_2{}^t+H\tilde{G}^t$$

と示せる。ここで，

$$\lambda_1\equiv\tilde{B}+\alpha>\lambda_2\equiv\tilde{B}-\alpha\geqq 1,$$

$$H\equiv\frac{c(1)\tilde{G}^{-1}(\tilde{B}-\tilde{G})-\alpha c_j(0)}{(\tilde{B}-\tilde{G})^2-\alpha^2}$$

また，$k(0)=k_j(0)$ より

$$(2\text{-}9)\qquad \begin{cases} k(1)=Bk(0)-c^s(0) \\ k(2)=\tilde{B}k(1)+\alpha Bk(0)-c(1)-\alpha c_j(0) \end{cases}$$

だから，E と F が決定されるならば $c(1)$ と $c_j(0)$ が決定される。そこで TVC を考慮する。そのとき，次節で明かにされる理由により $\lambda_2>\tilde{G}$ を仮定すると TVC より $E=F=0$。[12)]

従って，$k(t)=H\tilde{G}^t$ だから，

$$(2\text{-}10)\qquad c(1)=(\tilde{G}\Gamma_1+\Gamma_2)/(\alpha\tilde{B}),\ c_j(0)=((\tilde{B}-\tilde{G})\Gamma_1-\Gamma_2)/(\alpha\tilde{B})\equiv c_j{}^D(0)$$

12) 我々は Repeated Game を扱うため連続型でなく離散型モデルを用いざるをえない。離散型最大値原理とラグランジュの方法との関連については，西村〔7〕，Romer〔11〕を見よ。また，小論のように2主体による投資行動に関しては，Mino〔5〕が参考になる。

$$\begin{cases}\Gamma_1 \equiv (\tilde{B}-\tilde{G})k(1)+\alpha(\tilde{B}+\alpha)k(0), \\ \Gamma_2 \equiv k(1)\{(B-G)^2-\alpha^2\}.\end{cases}$$

かくして，

$$(U^D) \qquad U^D=\sum_{t=0}^{\infty} D^t \log(c_j{}^D(0)\tilde{G}^t).$$

welfare の比較をしよう[13]。

$$(2\text{-}11) \qquad U^t \gtreqless U^D \leftrightarrow \frac{D}{1-D}\log\left(\frac{B}{\tilde{B}}\right) \gtreqless \log\left(\frac{c_j{}^D(0)}{c^t(0)}\right)$$

$$\leftrightarrow \frac{D}{1-D}\log\left(1+\frac{\alpha}{\tilde{B}}\right) \gtreqless \log\left(1+\frac{D}{1-D}\frac{\alpha}{\tilde{B}}\right)$$

$$\leftrightarrow D \gtreqless \frac{1}{2} \qquad \text{（複号同順）}$$

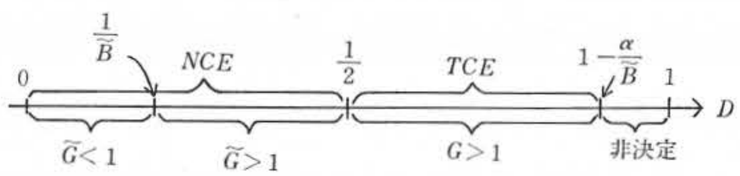
両主体がC戦略をとる状態を Tacit Collusion Equilibrium (TCE)，両主体がD戦略をとる状態を Non-collusion Equilibrium (NCE) と呼ぶことにする。我々は対象的な主体を考えている。また，$\lambda_2 > \tilde{G}$ を仮定しているから次の定理が成立する。

「定理1」

「$1-\alpha/\tilde{B} > D > 1/2$ ならば TCE が成立する。また，$\min[1/2,\ 1-\alpha/\tilde{B}] > D$ ならば NCE が成立する。」

ここで，成長率と D との関連を $\tilde{B} > \max[2,\ 2\alpha]$ の場合で示しておこう（このケースは $A > \alpha$）[14]。

図　1



また，一般に次の系が成立する。

「系1」

「D, $\tilde{B}$ が大なるとき NCE, TCE でのそれぞれの成長率 $\tilde{G}$, G が大となる。一方，α が大なるときには TCE での成長率 G のみが大となる。また，$\alpha/\tilde{B}$ が小なるほど TCE の成立する領域は広がる。」[15]

かくして，定理1より次の命題が成立する。

「命題2」

「経済主体が協調による長期の利益を考慮して資本蓄積を計画するとする。そのとき，割引因子が1/2以上ならば（時間選好率が1以下ならば），Pareto 最適状態が実現されうる。」[16]

この命題の含意は次のようなものであろう。他の主体が協調行動をとっているとき，自己が協調行動から逸脱し短期ナッシュ行動をとるとき，より資本を蓄積する協調行動の場合に比べて一時的に自己の消費を高めることができる。しかし，他の主体が次期以降，報復行動にでるならば，自己は，協調行動をとり続けたときに得られたであろう長期の利益を逸してしまうことになる。従って，将来の利益を低く見積るほど（割引因子 D が小なるほど）裏切りによる一時的利益の方が大となるから主体間の協調行動は持続できない。しかし，目先の利益よりも将来の利益を高く見積るほど（割引因子 D が大なるほど）協調行動をとり続けるインセンティヴが働くというわけであろう。

3　初期資本ストックにおける非対称性と協調の可能性

これまでは，i, j 両主体において初期資本ストックは同一と仮定されていた。本節では，主体間において初期資本ストック保有量が異なる場合を分析する[17]。

13）$\alpha/\tilde{B}$ を所与とし，$D/(1-D)$ を独立変数として図示し，$x > \log(1+x)(x>0)$ に注意すればよい。

14）ちなみに，他の主体の資本ストックが自己の資本ストックと同じ効果をもつ場合，すなわち $A=\alpha$，をみておこう。この場合も $1-\alpha/\tilde{B} > D > 1/2$ ならば TCE が成立する。従って，$A=\alpha$ より $1-\alpha/\tilde{B}=1/\tilde{B}$ だから $A=\alpha<1$ が TCE 成立のための必要条件である。次の事に注意しておこう。$1/\tilde{B} > D > 1/2$ のとき，もし短期ナッシュ行動がとられるならば成長率 $\tilde{G}<1$ であるが，自発的協調行動がとられるであろうから $1<A+\alpha$ の場合には成長率 $G>1$ となる。

15）成長率と D, $\tilde{B}$ 及び α との関係は明かであろう。D が十分に1に近いほど，あるいは $\alpha/\tilde{B}$ が大なるほど TCE, NCE が成立しにくくなることについては次節，補論Bで検討される。

16）よく知られているように Repeated Game の一つの問題点はナッシュ均衡戦略が無数存在することである。しかし，Pareto 最適点が存在するとき，その状態を達成する協調を考えるのが自然であろう（Tirole〔15〕)。

また，主体数と割引因子の大きさの問題があるが，実は命題2が基本的に成立することが補論Aで示される。

17）議論を複雑にしないために，次のような分権型経済での貸借を考えてみよう。

1）債券市場が期末に開かれると想定すると，$t-1$ 期末での貸借＝t 期首の債券 $r(t)$ に対して，i を利子率として，t 期末に $(1+i)r(t)$ の支払いが生じるから次の予算制約式が成立する。すなわち，

$$\tilde{B}k(t)+\alpha k_j(t)+(1+i)r(t)=c(t)+k(t+1)+r(t+1)$$

ここで，$1+i=\tilde{B}-\alpha$ と仮定すると，$r(t)=-r_j(t)$ だから t 期首資産を $As(t)\equiv k(t)+r(t)$, $As_j(t)\equiv k_j(t)+r_j(t)$ として

$$As(t+1)=\tilde{B}As(t)+\alpha Asj(t)-c(t)$$

が成立するから，ここでの貸借を扱うときは $k(t)$ を $As(t)$ と読み替えればよい。

2）t 期首で生じた貸借 $r(t)$ に対して t 期末に $(1+i)r(t)$ が支払われるとすると，t 期首の資本＝t 期首の資産であり

$$k(t+1)=\tilde{B}(k(t)-r(t))+\alpha(k_j(t)+r(t))+(1+i)r(t)-c(t)$$

であるから $1+i=\tilde{B}-\alpha$ と仮定すると

3-A　短期ナッシュ行動

個別主体の問題は同一であるから，1-Aと同様にして，(1-7) を得る。ここでは，$k(0)$ と $k_j(0)$ とが等しくない場合を検討するから次式を得る。すなわち，

$$k(t+2)-2\tilde{B}k(t+1)+(\tilde{B}^2-\alpha^2)k(t)=(\tilde{B}-\tilde{G})\tilde{G}^t c(0)-\alpha\tilde{G}^t c_j(0) \tag{3-1}$$

従って，E, F を定数として

$$k(t)=E\lambda_1^t+F\lambda_2^t+\phi\tilde{G}^t,\quad \phi\equiv\frac{(\tilde{B}-\tilde{G})c(0)-\alpha c_j(0)}{(\tilde{B}-\tilde{G})^2-\alpha^2} \tag{3-2}$$

TVC を考えよう。離散型の TVC は，

$$\begin{cases}\lim\limits_{t\to\infty} D^t\mu(t)k(t+1)=0,\\ \lim\limits_{t\to\infty} D^t\mu_j(t)k_j(t+1)=0\end{cases} \tag{3-3}$$

である（但し，$\mu(t)=1/c(t)$, $\mu_j(t)=1/c_j(t)$）。
ところが

$$D^t\mu(t)k(t+1)=\frac{E\lambda_1}{c(0)}\left(\frac{D\lambda_1}{\tilde{G}}\right)^t+\frac{F\lambda_2}{c(0)}+\left(\frac{D\lambda_2}{\tilde{G}}\right)^t+\phi\frac{\tilde{G}}{c(0)}D^t$$

であり $D\lambda_1/\tilde{G}>1$, $D\lambda_2/\tilde{G}<1$ より $\lim\limits_{t\to\infty} D^t\mu(t)k(t+1)=0$ が成立するためには，$E=0$。
そのとき，

$$k_j(t+1)=\tilde{B}k_j(t)+\alpha(F\lambda_2^t+\phi\tilde{G}^t)-c_j(0)\tilde{G}^t$$

だからMを定数として

$$k_j(t)=M\tilde{B}^t-F\lambda_2^t+\phi_j\tilde{G}^t,\quad \phi_j\equiv\frac{\alpha\phi-c_j(0)}{\tilde{B}(D-1)}$$

ここで $\lim\limits_{t\to\infty} D^t\mu_j(t)k_j(t+1)=0$ より，$M=0$。
かくして

$$\begin{cases}k(t)=F\lambda_2^t+\phi\tilde{G}^t,\ (\phi=k(0)-F),\\ k_j(t)=-F\lambda_2^t+\phi_j\tilde{G}^t,\ (\phi_j=k_j(0)+F)\end{cases} \tag{3-4}$$

であるから，一般に任意定数Fが存在するが，Fがゼロでなければ，$\lambda_2>\tilde{G}$ のとき，早晩 $k(t)$ あるいは $k_j(t)$ の一方は負の値となる。そこで，我々は初期消費決定条件として $\lambda_2>\tilde{G}$ を仮定し $F=0$ の場合を分析する[18)]。

↘　　$k(t+1)=\tilde{B}k(t)+\alpha k_j(t)-c(t)$.

$1+i=\tilde{B}-\alpha$ すなわち $i=A-\alpha$ の仮定は，一単位の貸付に対して自己の生産損失分マイナス他の主体の資本ストック増加による自己の生産増加分が利子として支払われることを意味している。

18) $\lambda_2<\tilde{G}$ の場合に無数の解が存在することが補論Bで示される。なお，いくつかの補足。

1) 経済主体が同一の初期資本ストックを所有している場合でもこの条件が必要であることに注意。

2) Romer によって例示された次のタイプの運動方程式を想定してみよう（通常は多数の主体が存在すると仮定し，自己資本ストックの変化は総資本ストックに影響を与えないと想定されている）。連続型で表現すると κ を総資本ストックとして $\dot{k}=k^\nu\kappa^\eta-c\,(0<\nu<1,\ 0<\eta)$。そこで目的関数を $\int_0^\infty e^{-\delta t}\log c\,dt$ とすると，短期ナッシュ行動がとられるならば，対称均衡を想定することにより定常点が存↗

そのとき，初期条件

$$\begin{cases}k(0)=E+F+\phi,\\ k(1)=\tilde{B}k(0)+\alpha k_j(0)-c(0)=E\lambda_1+F\lambda_2+\phi\tilde{G}\end{cases} \tag{3-5}$$

において，$E=F=0$ より

$$\begin{cases}c(0)=(\tilde{B}-\tilde{G})k(0)+\alpha k_j(0)\equiv c^k(0),\\ c_j(0)=(\tilde{B}-\tilde{G})k_j(0)+\alpha k(0)\equiv c_j^k(0)\end{cases} \tag{3-6}$$

を得る[19)]。
かくして，

$$U^k\equiv\frac{1}{1-D}\left(\log\ c^k(0)+\frac{D}{1-D}\log\ \tilde{G}\right). \tag{U^k}$$

3-B　planner による最適化

初期資本ストックに非対称性が存在するとき，企業が統合されず planner によってトランスファー $T(t)$ が計画されると想定してみよう。そのとき，planner の問題は次のようになる。

$P(\tilde{S})$

$$\tilde{W}\equiv\text{Max}\ \sum_{t=0}^{\infty} D^t\ \log(c(t)c_j(t))$$

$$\text{S. to}\ k(t+1)=\tilde{B}k(t)+\alpha k_j(t)+T(t)-c(t),\ k(0)\ \text{given},$$
$$k_j(t+1)=\tilde{B}k_j(t)+\alpha k(t)-T(t)-c_j(t),\ k_j(0)\ \text{given}.$$

そのとき，最適化条件より

$$\begin{cases}c(t)=c_j(t),\\ c(t+1)/c(t)=G\end{cases} \tag{3-7}$$

↘在する。$\nu+\eta<1$ ならば，定常点は鞍点だから，初期消費が決定される。しかし，位相図を描いてみると $\nu+\eta>1$ ならば定常点から遠ざかる循環運動が生じていることがわかる。すなわち，η を我々のα に当たると解釈してみると，総資本ストックの個別生産関数に与える影響が十分大なるときには TVC をみたす最適解が存在しないということになる（ちなみに，Romer は $\dot{k}/k$ に上限をもうけることでこの問題を回避している）。我々のケースは α が十分大なるとき TVC は満たすのが一意の解を決定できない。

3) 投資が増加するとき資本ストック増加分／投資量の比率が減少すると想定し，

$$k(t+1)-k(t)=\varepsilon(Ak(t)+\alpha k_j(t)-c(t))+\gamma\qquad(0<\varepsilon<1,\ 0<\gamma)$$

あるいは，投資比率（投資／資本ストック）が増加するとき資本ストック増加率が減少すると想定し

$$(k(t+1)-k(t))/k(t)=\varepsilon(Ak(t)+\alpha k_j(t)-c(t))/k(t)+\gamma\qquad(0<\varepsilon<1,\ 0<\gamma)$$

としても α が十分大ならば初期消費は決定されないので，議論の単純化のために本論のような運動方程式を用いた（ちなみに，後者の運動方程式で資本ストック増加率の上限 $\gamma+\xi(\xi>0)$ を認めたとしても同様の問題が生じうる）。

19) $k(t)/c(t)\gtreqless k_j(t)/c_j(t)\ \leftrightarrow\ k(0)\gtreqless k_j(0)$（複号同順），
$c(t)\gtreqless c_j(t)\ \leftrightarrow\ (k(0)-k_j(0))(\tilde{B}-\tilde{G}-\alpha)\gtreqless 0$（複号同順）.

を得るから

$$(3\text{-}8)\qquad \begin{cases} k(t+1)=\tilde{B}k(t)+\alpha k_j(t)+T(t)-c(0)G^t, \\ k_j(t+1)=\tilde{B}k_j(t)+\alpha k(t)-T(t)-c(0)G^t. \end{cases}$$

トランスファーに関しては単純な場合として $T(0)=(\tilde{B}-\alpha)(k_j(0)-k(0))/2$, すなわち, $k(1)=k_j(1)=(k(0)+k_j(0))G/2$ が行われ, $t\geqq 1$ において $T(t)=0$ という方式がとられると仮定する[20]。そのとき,

$$(3\text{-}9)\qquad \begin{cases} c(0)=(B-G)(k(0)+k_j(0))/2, \\ k(t)=k_j(t)=k(1)G^{t-1} \qquad (t\geqq 1) \end{cases}$$

となる[21]。

かくして, $\tilde{W}/2\equiv W^k$ は $k_j(0)=k_j(0)$ のときWと同一である。

3-C　U^k と W^k の比較

1節で示したように, 経済主体が同一の初期資本ストックを保有しているならば planner の計画によってもたらされる welfare は, 短期ナッシュ行動によってもたらされる効用よりも, 常に大であった。このことは, 経済主体が保有している初期資本ストックにギャップがある場合でも成立するであろうか?

いま $c^s(0)=c^{sk}(0)\equiv\kappa(B-G)/2(\kappa\equiv k(0)+k_j(0))$ であるから $\theta\equiv\alpha/\tilde{B}$ とすると, 次式が成立する。すなわち,

$$(3\text{-}10)\qquad U^k \gtreqless W^k \leftrightarrow k(0)/\kappa \gtreqless \frac{(1+\theta)^{1/(1-D)}(1-D)-2\theta}{2(1-D-\theta)} \equiv V[D].$$

V関数の基本的性質を示す。

1)　$V[0]=1/2$,

2)　$\partial V/\partial D=v[D]/\{2(1-\theta-D)^2\}$,

$$v[D]\equiv(1+\theta)^{1/(1-D)}\{(1-\theta-D)\log(1+\theta)/(1-D)+\theta\}-2\theta.$$

ここで, $0<\theta<1$ において $v[0]\equiv(1-\theta)\{(1+\theta)\log(1+\theta)-\theta\}>0$。

また, $\partial v[D]/\partial D=(1+\theta)^{1/(1-D)}(1-\theta-D)\{\log(1+\theta)\}^2/(1-D)^3$ だから, $1-\theta-D>0$ のと

20)　トランスファーの方法はユニークではない。たとえば, $\tau(t)\equiv T(t)G^{-t}$ としてτを一定とする方式を考えてみよう。そのとき, 補論Bと同様にして, $\tilde{B}-\alpha>G$ のとき, $c(0)=(B-G)(k(0)+k_j(0))/2$, $\tau=(\tilde{B}-\alpha-G)(k_j(0)-k(0))/2$ である。そして, $k(t)=k(0)G^t$, $k_j(t)=k_j(0)G^t$。

ちなみに, 我々が用いた線形の生産関数では初期資本ストックの配分問題は生じなかったが, 例えば $k(t)^{\nu}\kappa(t)^{\eta}(0<\nu<1, 0<\eta)$ タイプの生産関数を考えるとき, planner の最適化は各主体の初期資本ストックが $\kappa(0)/n$ であることを要求する。このことが分権型経済で成立するためには事前の協議を必要とする。

21)　次の問題を解けばよい。すなわち,

$$\text{Max} \sum_{t=0}^{\infty} D^t \log c(t)^2$$
$$\text{S. to}\ \kappa(t+1)=B\kappa(t)-2c(t),\ \kappa(0)=k(0)+k_j(0)\ \text{given},\ \kappa(t)=2k(t)\ (t\geqq 1).$$

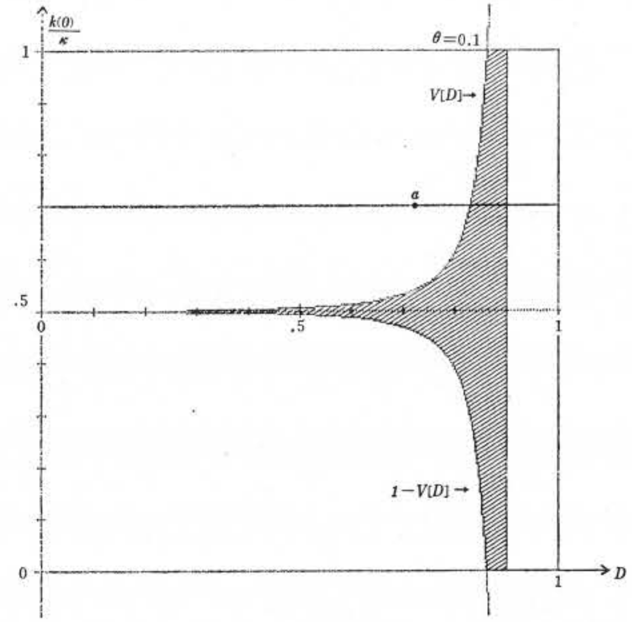
き $\partial V/\partial D>0$, $\partial^2 V/\partial D^2>0$。

また, 短期ナッシュ行動をとる主体jの得る効用を U_j^k とすると

$$(3\text{-}11)\qquad U_j^k \gtreqless W \leftrightarrow 1-V[D] \gtreqless k(0)/\kappa.$$

シミュレーションにより $\theta<1$ のときV関数は図2のようになる[22]。ここで, θが大であるほど (0, 0.5)点を中心にV曲線は上方に, また, $1-V$ 曲線は下方にシフトする。

図　2



かくして, 次の事がわかる。すなわち, 斜線領域においては両主体ともに planner による計画の方が望ましい。しかし, $\tilde{G}<G$ であるが, V曲線の上方あるいは $1-V$ 曲線の下方の領域では一方の主体は planner による計画を望み, 他方の主体は短期ナッシュ行動による蓄積を望んでいる。このことは, 次のように解釈できよう。短期ナッシュ行動をとるとき, 自己の初期保有資本ストックが他の各主体の初期保有資本ストックよりも大であるほど, 自己の産出量が大となり, 従って自己の消費量が他の主体のそれと比べて大となる。この消費量が, 初期保有資本ストックを提供し総資本ストックを planner が調整する場合に得られる主体間で共通の消費量を, うわまわる程度が, 自己の初期保有資本ストックが他の各主体の初期保有資本ストックに比較して大であるほど, 大となるためであろう (a点)。

にもかかわらず, Dが大であるとき, あるいは, θが大であるとき, 両主体にとって planner による計画の方が望ましいという状況が成立する。すなわち, planner が総資本ストックを調整するときの総資本ストック量は短期ナッシュ行動による場合のそれよりも大であり, θ

22)　以下のシミュレーションは浅野〔1〕を用いている。

が大であるほど総資本ストックによる生産関数へのプラスの効果が自己保有資本ストックによるそれに比べて高まるから，長期において planner の計画による産出量が短期ナッシュ行動によって得られる産出量をうわまわる程度が大となる。従って，θ が大なるほど，planner の計画に従い総資本量を多くするほど，長期において短期ナッシュ行動による消費を planner の計画による消費が上回る程度が大となるというわけであろう。また，Dに関しては，将来の消費を高く見積るほど（Dが大なるほど）短期ナッシュ行動の場合よりも将来の消費量が大である planner の計画が選択されるというわけであろう。

3-D 初期資本ストックの偏在と暗黙の共謀の可能性

3－Cの議論より短期ナッシュ行動によって達成される状態よりも望ましい状態がありうることがわかったが，その Pareto 最適状態は planner が存在しなくとも，自発的に達成される可能性はあるであろうか？[23)]

2節と同様に，主体 i がC戦略をとるとき主体 j がD戦略をとる場合の主体 j の獲得する効用 U_j^{Dk} を考えよう。議論は2節と同様であるが，$k(0)\neq k_j(0)$ の場合扱っているから初期条件として(2-9)でなく

(3-12)
$$\begin{cases} k(1)=\tilde{B}k(0)+\alpha k_j(0)-c^{sk}(0)=H\tilde{G}, \\ k(2)=\tilde{B}k(1)+\alpha\{\tilde{B}k_j(0)+\alpha k(0)-c_j(0)\}-c(1)=H\tilde{G}^2 \end{cases}$$

である[24)]。従って，

(3-13)
$$c_j(0)=k(0)\{\alpha\tilde{B}+\alpha(\tilde{B}-\tilde{G})\}+k_j(0)\{\alpha^2+\tilde{B}(\tilde{B}-\tilde{G})\}-\alpha c^{sk}(0)\equiv c_j^{Dk}(0)$$

23) 我々は以下の本文で，C戦略を構成する Pareto 最適戦略を Romer の Social Optimization Problem の解と仮定し，資本ストックの自発的トランスファーが生じるか否かを検討している。しかしながら，Pareto 最適点は無数存在する（例えば，一主体の長期にわたる効用を所与とせよ)。従って，planner が存在しない状況において，初期資本ストックに非対称性があるならば，協調行動の利益を実現するために，より大なる初期資本ストックを保有する主体が，より小なる初期資本ストックを保有する主体に資本ストックをトランスファーするとしても，結果として成立する均衡は両者の交渉力に依存するであろう。この指摘は瀬岡教授による。

24) ただし，(2-1) の解釈に注意しておこう。まず，総資本ストックの生産関数に与える効果の長期の利益を考慮して両主体がC戦略を採用したとしよう。そのとき，各主体の生産量から共通の消費量 $c(0)=c_j(0)=c^{s}(0)$ が消費され，余剰分が $k(1)=k_j(1)=k^{s}(1)$ を満たすように自発的に配分されることを意味している。ところが j 主体がD戦略をとったとすると，結果として次式が成立する。

$$(2\text{-}1)\begin{cases} k(1)=\tilde{B}k(0)+\alpha k_j(0)-c^{s}(0), \\ k_j(1)=\tilde{B}k_j(0)+\alpha k(0)-c_j(0). \end{cases}$$

すなわち，各主体が独立に生産と消費を決定しているのだから，0期末になり主体 i は主体 j が協調戦略をとっていないことを知る。そのとき，主体 i の余剰が $k^{s}(1)$ 以上であっても主体 i は主体 j の裏切りを知っているから余剰を配分して，$k(1)=k_j(1)=k(1)$ とはしない（ちなみに，$k(1)\gtreqless k^{s}(1)\leftrightarrow k(0)\gtreqless k_j(0)$（複号同順))。逆に，主体 j の余剰が $k^{s}(1)$ 以上であっても主体 j に配分のインセンティヴがないのは明かであろう。

だから

$$(U_j^{Dk})U_j^{Dk}=\frac{1}{1-D}\left(\log c_j^{Dk}(0)+\frac{D}{1-D}\log\tilde{G}\right)$$

そのとき，$\lambda_2>\tilde{G}$ の仮定より

(3-14) $U_j^{Dk}\gtreqless W^k\leftrightarrow k_j(0)/\kappa\gtreqless\Omega[D]$.（複号同順）

$$\Omega[D]\equiv\frac{\{(1+\theta)^{1/(1-D)}+\theta(1+\theta)\}(1-D)-2\theta(2-D)}{2(1-\theta)(1-D-\theta)}.$$

$\Omega[D]$ 関数の基本的性質を示す。

1) $\Omega[0]=\Omega[1/2]=1/2$,

2) $\partial\Omega/\partial D=\omega[D]/\{2(1-\theta)(1-D-\theta)^2\}$

$\omega[D]\equiv(1+\theta)^{1/(1-D)}\{(1-D-\theta)/(1-D)\log(1+\theta)+\theta\}+\theta(\theta^2-\theta-2)$.

ここで，$0<\theta<1$ のとき $\omega[0]=(1-\theta^2)\{\log(1+\theta)-\theta\}<0$ より $\partial\Omega[0]/\partial D<0$。

また，$\partial\omega[1/2]/\partial D=(1+\theta)(1-2\theta)\{(1+\theta)\log(1+\theta)-\theta\}$ だから $\theta<1/2$ のとき $\partial\Omega[1/2]/\partial D>0$。

以上の議論は主体 i にも成立するから主体 j がC戦略をとるとき主体 i がD戦略を採用するときの効用を U_i^{Dk} とすると

(3-15) $U_i^{Dk}\gtreqless W^k\leftrightarrow 1-\Omega[D]\gtreqless k_j(0)/\kappa$.（複号同順）

が成立する。

$\Omega[D]$ と $1-\Omega[D]$ を実際にシミュレーションしてみると図3のようになる。

図3において(1/2, 1/2) を通過する $\Omega[D]-(1-\Omega[D])$ の左領域では NCE が，右の斜線領域では TCE が成立している[25)]。

かくして，次の定理が成立する（系1も成立する)。

「定理2」

「1) $1/2<D<1-\theta$ が成立するとする。そのとき，$1-\Omega[D]<k(0)/\kappa<\Omega[D]$ が成立するならば TCE が成立する。一方，$k(0)/\kappa>\Omega[D]$ あるいは $k(0)/\kappa>1-\Omega[D]$ ならば NCE が成立する。2) $D<\min[1/2, 1-\theta]$ ならば NCE が成立する。」

従って，次の命題を主張できる。

「命題3」

「1) 経済主体が協調による長期の利益を考慮して蓄積を計画するとする。そのとき，経済主体間に初期資本ストックギャップが存在するならば，割引因子が1/2以上であっても自発的協調が成立しない場合がある。2) しかし，経済主体の保有する初期資本ストックにギャップが

25) TCE が成立する領域は $V[D]-(1-V[D])$ の右領域にある。というのは，他の主体がC戦略をとるとしてある主体がD戦略をとる場合を想定しているから，0期の他の主体の行動により1期における経済全体での資本ストックは，経済主体全員が0期で短期ナッシュ行動をとった場合よりも大だからである。

図　3

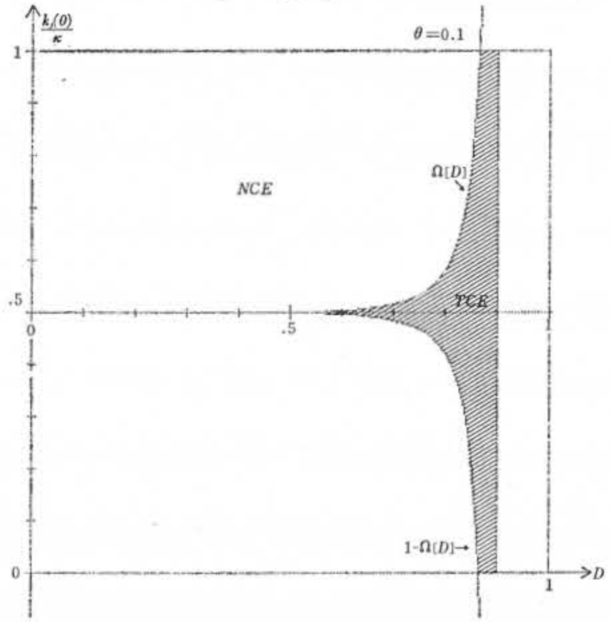
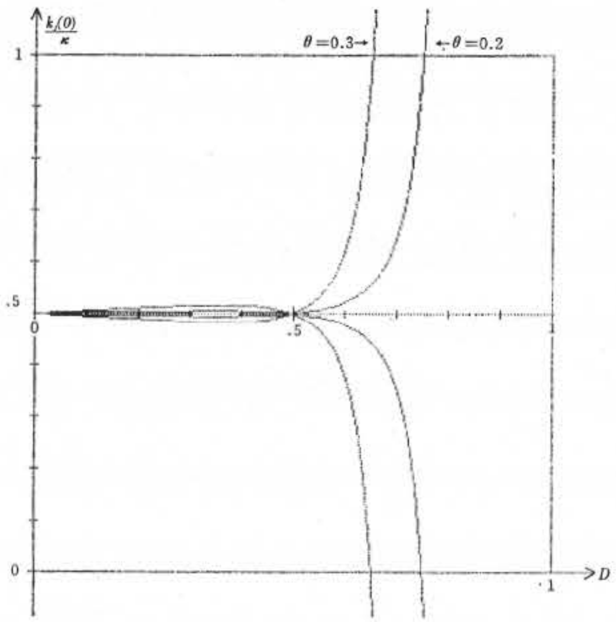


図　4



存在したとしても，他の主体の資本ストックの個別生産関数にあたえるプラスの効果が大，あるいは，経済主体が将来の消費に対する評価が大ならば暗黙の共謀が成立しうる。」

1の命題の含意は次のようなものであろう。当面の消費を考えるとき，自己の所有する初期資本ストックが大であるほど，協調行動による消費量を短期ナッシュ行動による消費量がうわ

まわる程度が大となる。従って，自己が協調行動から逸脱したときに，他の主体の報復により失われる長期の利益よりも資本の偏在による当面の利益が大であるとき自発的協調は成立しない。しかし，換言すれば，資本の偏在による（均等な資本を所有する場合と比べて）高い当面の利益を，協調行動による長期の利益がうわまれば暗黙の共謀が成立することになる。すなわち，将来の消費を高く見積るほど，長期の利益は大となる。あるいは，短期ナッシュ行動をとった場合よりも協調行動をとった場合の方が総資本ストックは大であるから，総資本ストックの生産関数にあたえるプラスの効果が大であるほど協調行動による長期の利益は大となる（命題の2）。図4で示しておこう。

4　n主体の初期資本ストックの非対称性と暗黙の共謀

暗黙の共謀の持続性を考えてみよう。まず，2節の初期資本ストックの対称性が成立する場合を検討する。主体 i はC戦略をとっているとする。そして，主体 j が $\tau-1$ 期まで協調戦略をとり，τ 期から短期ナッシュ行動をとるという戦略 D' を採用するか否かを考える。この場合は戦略 D' と戦略Cの τ 期以降の総効用を比較すればよいから，2節の議論により割引因子が1/2以上ならばC戦略が採用される。すなわち，割引因子が1/2以上ならば自発的協調が成立しかつ持続する。初期資本に非対称性がある場合も同様に考えれる。すなわち，暗黙の共謀が成立したとき，トランスファーに関する仮定より1期の資本ストックは各主体で同一であるから割引因子が1/2以上ならば1期以降自発的協調から逸脱する誘因は存在しない。しかるに，割引因子が1/2以上であることは，0期で暗黙の共謀が成立する必要条件である。それ故，初期の資本ストックに非対称性が存在する場合も暗黙の共謀が一旦成立するならばその自発的協調は持続する。

我々は2主体の初期資本が同一でない場合を議論した。主体数が多い場合にも暗黙の共謀は成立するであろうか？　ここでは暗黙の共謀が成立するとき，協調による長期の利益を実現するために自発的に“敵に塩を送る”行為がなされると想定してある。

しかし主体数が多いときには誰が誰に資本ストックをどれだけ配分するか，という問題が生じる（例えば，初期資本ストックがそれぞれ異なる4主体が存在し，2主体は平均初期資本ストック以下だとせよ)。従って，主体間の話合いがなされないならば，一般的には資本ストック配分が実現されない。それ故，多数の主体が存在する場合には主体間の協議（契約）なくして Pareto 最適状態を達成できない[26]。

5　結　　論

非常に単純化されたモデルではあるが，我々は以下の結論を得た。

総資本ストックの個別生産関数に対する正の効果に注目する通常の内生的成長モデルにおい

26）なお，注23を見よ。

ては，同質の主体が想定され，次のような主張がなされている。理想的な計画経済では planner がすべての資本ストックを調整できるから Pareto 最適状態が達成されるのに対し，分権型経済では各主体は他の主体の資本ストックを所与として行動するから，welfare は計画経済のそれよりも低くなる (1)。

この主張は，外部性が存在するときに競争均衡が Pareto 最適を達成できないというよく知られた命題の応用とみなすことができ，もっともらしい。しかし，内生的成長モデルは無限にわたる期間の効用最大化を扱うのであるから，他の主体の行動を所与として自己の行動を決定するというナッシュ行動は前提にしたとしても，他の主体の長期に関する戦略を所与として自己の長期に関する戦略を決定することを考えることができる。そこで，我々は，Repeated Game を考え，割引因子が 1/2 以上のとき分権型経済においても Pareto 最適状態が達成されうることを示した (2)。

次に，通常の内生的成長モデルにおける主体の同質性の仮定を緩め，主体間の初期資本にギャップが存在する場合を検討した。そのとき，協調行動から逸脱したときに他の主体の報復行動によって生じる長期利益の損失はあるものの，初期資本ストックをより多く所有する主体ほど，協調行動をとった場合よりも協調行動をとらない場合の当面の消費の程度が大きいため，割引因子が 1/2 以上であっても主体間の初期資本にギャップが大なるとき暗黙の共謀が成立しなくなる (3)。そして多数の主体の初期資本にギャップがある場合は主体間の協議なくして Pareto 最適状態を達成できないことを示した (4)。

通常の内生的成長モデルは長期の問題を扱っているにもかかわらず，短期的なナッシュ行動を前提にして，分権型経済の非効率性を示しているけれども，全ての面で同質な経済主体が自他の長期的な戦略を考慮して行動するとき短期的なナッシュ行動が選択される必然性はなく，分権型経済であっても Pareto 最適状態を達成できるのではなかろうか？ 分権型経済が Pareto 最適を達成できない基本的理由は主体間の非対称性にあるのではなかろうか？ 小論は，この問題を初期資本ストックの非対称性の観点から考察する試みであった。

補論A 対称的な n 主体による Repeated Game

協調行動による利得が毎期同一である場合の Repeated Game では，次の事が知られている。すなわち，主体数が増加するにしたがって，暗黙の共謀を成立させる割引因子の下限が高くなる。従って，割引因子が十分に1に近ければ，主体数が多い場合でも，暗黙の共謀が成立する。

しかし，特に協調行動によって毎期の利得構造が変化する我々の場合には上記の命題は成立しない。対称的な n 主体による Repeated Game を考えるとき，主体数にかかわらず割引因子が 1/2 以上であれば暗黙の共謀が成立しうる。

以下，そのことを論証する。

手続きは1節，2節と同様である。まず，対称的な n 主体が存在する場合の planner の問

題を考えよう。

$$(PS)^* \qquad \text{Max} \sum_{t=0}^{\infty} D^t \log c(t)$$

$$\text{S. to } k(t+1)=\sigma k(t)-c(t) \qquad (\sigma\equiv\tilde{B}+(n-1)\alpha),$$

$$k(0) \text{ given.}$$

そのとき，一節と同様にして最適化条件より $c(t+1)/c(t)=D\sigma\equiv G^*$ を得るから TVC より，$k(t)=k(0)G^{*t}$, $c(0)=k(0)(\sigma-G^*)\equiv c^{s*}(0)$。従って，

$$(W^*) \qquad W^*=\frac{1}{1-D}\left(\log c^{s*}(0)+\frac{D}{1-D}\log G^*\right).$$

Repeated Game を考える前に短期ナッシュ行動がとられる場合をみておこう。

$$(PN)^* \qquad U^{n*}\equiv\text{Max}\sum_{t=0}^{n=\infty} D^t \log c_i(t) \qquad (0<D<1),$$

$$\text{S. to } k_i(t+1)=\tilde{B}k_i(t)+\alpha\sum_{l\neq i}k_l(t)-c_i(t)$$

$$\{k_l(t)\}\text{given, } k(0) \text{ given.}$$

最適化条件より $c_i(t+1)/c_i(t)=D\tilde{B}\equiv\tilde{G}$ を得るから主体の対称性の条件より

$$k_i(t+1)=\tilde{B}k_i(t)+\alpha(n-1)k_i(t)-c_i(t)=\sigma k_i(t)-c_i(0)\tilde{G}^t.$$

従って TVC より，$k_i(t)=k_i(0)\tilde{G}^t$, $c_i(0)=k_i(0)(\sigma-\tilde{G})\equiv c^{n*}(0)$.

Repeated Game を考えよう。二節と同様にC戦略とD戦略を考える。そのとき，j 以外の主体 i がC戦略をとり j もまたC戦略をとるならば主体 j の獲得する効用 U^{s*} は W^* である。次に，j 以外の主体 i がC戦略をとっているときに j がD戦略を採用した場合に j が獲得する効用 U^{D*} をもとめよう。

まず0期では

$$(\text{A-1}) \qquad \begin{cases} k_i(1)=\tilde{B}k_i(0)+\alpha\sum_{l=i}k_l(0)-c^{s*}(0), \\ k_j(1)=\tilde{B}k_j(0)+\alpha\sum_{l\neq j}k_l(0)-c_j(0) \end{cases}$$

であり，1期では

$$(\text{A-2}) \qquad \begin{cases} k_i(2)=\tilde{B}k_i(1)+\alpha\sum_{l\neq i}k_l(1)-c_i(1), \\ k_j(2)=\tilde{B}k_j(1)+\alpha\sum_{l\neq j}k_l(1)-c_j(1). \end{cases}$$

そこで，$t\geqq1$ の主体 i の短期ナッシュ行動より $c_i(t+1)/c_i(t)=\tilde{G}(t\geqq1)$, $t\geqq0$ の主体 j の短期ナッシュ行動より $c_j(t+1)/c_j(t)=\tilde{G}(t\geqq0)$ が成立するから

$$(\text{A-3}) \qquad \begin{cases} k_i(t+1)=\tilde{B}k_i(t)+\alpha\sum_{l\neq i}k_l(t)-c_i(1)\tilde{G}^{t-1}, \\ k_j(t+1)=\tilde{B}k_j(t)+\alpha\sum_{l\neq j}k_l(t)-c_j(0)G^t. \end{cases}$$

さらに，j 以外の主体 i の対称性より，$\gamma\equiv\tilde{B}+\alpha(n-2)$ として

$$(\text{A-4}) \qquad \begin{cases} k_i(t+1)=\gamma k_i(t)+\alpha k_j(t)-c_i(1)\tilde{G}^{t-1}, \\ k_j(t+1)=\tilde{B}k_j(t)+\alpha(n-1)k_i(t)-c_j(0)\tilde{G}^t \end{cases}$$

が成立するから（以下，添え字 i を省略），$t\geqq 1$ において

$$(\text{A-5})\quad k(t+2)-(\gamma+\tilde{B})k(t+1)+(\gamma\tilde{B}-\alpha^2(n-1))k(t)=c(1)\tilde{G}^{t-1}(\tilde{B}-\tilde{G})-\alpha c_j(0)\tilde{G}^t$$

が成立する。従って，E^*, F^* を定数として

$$(\text{A-6})\quad k(t)=E^*\lambda_1^{*t}+F^*\lambda_2^{*t}+H^*\tilde{G}^t$$

$$\lambda_1^*\equiv\sigma>\lambda_2^*\equiv\tilde{B}-\alpha=\lambda_2>1,$$

$$H^*\equiv\frac{c(1)\tilde{G}^{-1}(\tilde{B}-\tilde{G})-\alpha c_j(0)}{(\tilde{G}-\gamma)(\tilde{G}-\tilde{B})-\alpha^2(n-1)}$$

ここで TVC を考えると，2節および3節と同様にして，$E^*=0$，また，$\lambda_2<\tilde{G}$ を仮定することにより $F^*=0$ だから

$$(\text{A-7})\quad k(t)=H^*\tilde{G}^t.$$

そこで，初期条件 $k(1)$, $k(2)$ および主体の対称性の条件 $k(0)=k_j(0)$ より

$$(\text{A-8})\quad \begin{cases} k(1)=\sigma k(0)-c^{s*}(0)=H^*\tilde{G}, \\ k(2)=\gamma k(1)+\alpha(\sigma k(0)-c_j(0))-c(1)=H^*\tilde{G}^2. \end{cases}$$

が成立するから，結局，

$$(\text{A-9})\quad c_j(0)=\{\sigma(\sigma-\tilde{G})k(0)-\alpha(n-1)c^{s*}(0)\}/\tilde{B}\equiv c_j^{D*}(0).$$

従って

$$(U^{D*})\quad U^{D*}=\frac{1}{1-D}\left(\log\ c_j^{D*}(0)+\frac{D}{1-D}\log\ \tilde{G}\right).$$

$U^{s*}=W^*$ と U^{D*} を比較しよう。

$$U^{s*}\gtreqless U^{D*}\leftrightarrow\ \frac{D}{1-D}\log\left(\frac{\sigma}{\tilde{B}}\right)\gtreqless\log\left(\frac{c_j^{D*}(0)}{c^{s*}(0)}\right)$$

$$\leftrightarrow\ \frac{D}{1-D}\log\left(1+\frac{\alpha(n-1)}{\tilde{B}}\right)\gtreqless\log\left(1+\frac{D}{1-D}\ \frac{\alpha(n-1)}{\tilde{B}}\right)\ \text{（複号同順）}$$

かくして，3節と同様に $\alpha(n-1)/\tilde{B}$ を定数，$D/(1-D)$ 独立変数とみなすことにより

$$(\text{A-9})\quad U^{s*}\gtreqless U^{D*}\leftrightarrow D\gtreqless\frac{1}{2}\ \text{（複号同順）}.$$

含意を検討しよう。毎期の利得構造が同一であるような Repeated Game では裏切った場合に得られる一時的利得 π は主体数と独立であるのに対し，協調行動をとった場合各主体の受け取る各期の利得は π/n である。従って，協調行動から逸脱した場合に失う長期の利得は，主体数 n が大なるほど，小となるから，暗黙の共謀が成立するとすれば，逸脱行動をとった場合の主体数増加による長期利益の損失減少効果を打ち消すほど，失われる長期利益が高く見積られる場合（割引因子が大）である[27]。一方，ここで検討されているモデルでは，技術知識のスピルオーバー効果により，協調行動から逸脱した場合に得られる一時的利得は経済全体の資本ストックの増加関数である。また，協調行動から逸脱した場合に失う長期の利得も経済全体の資本ストックに依存するから，主体数 n が大なるほど，長期利益の損失は大となる。従って，

27）なお Tirole〔15〕p. 250 Exercise 6. 4 をみよ。

主体数増加による一時的利益の増加効果と長期利益の損失増加効果は相殺しあうというわけであろう。また，n 主体が存在する場合，D戦略をとる j と，j 以外の $n-1$ 主体が存在するが，$n-1$ 主体が同じC戦略をとるという意味で $n-1$ 主体を一主体として扱えるため，TCE 成立条件として主体数と独立に $D>1/2$ の条件が必要となるわけであろう。

補論B　初期値決定条件について

有限期間でなる無限期間にわたる最適化を扱っている我々のモデルでは，$k(t)$ と $k_j(t)$ を正と仮定するとき，$\lambda_2<\tilde{G}$ ならば TVC によって最適経路を決定できなかった[28]。ここでは，そのことが，解が無数存在するために初期消費をユニークに決定できないという問題であることを明らかにする。

3節の $k(0)\neq k_j(0)$ で短期ナッシュ行動がとられる場合を考えよう。そのとき，

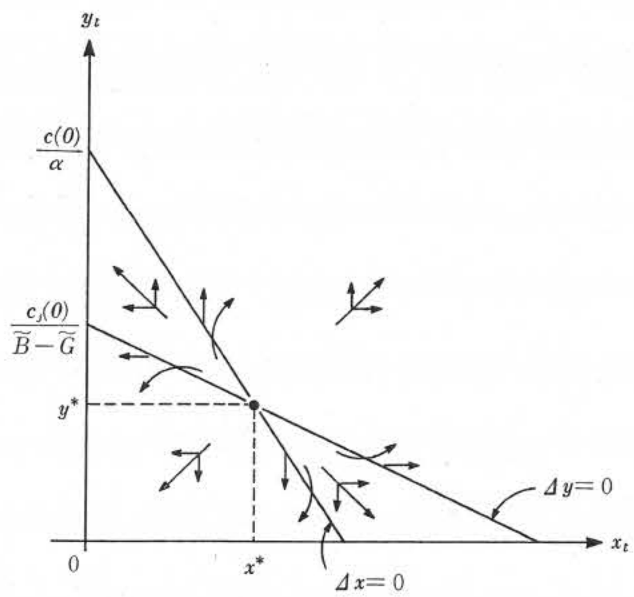
$$(\text{B-1})\quad \begin{cases} k(t+1)=\tilde{B}k(t)+\alpha k_j(t)-c(0)\tilde{G}^t \\ k_j(t+1)=\tilde{B}k_j(t)+\alpha k(t)-c_j(0)\tilde{G}^t \end{cases}$$

だから，変数を次のように変換する。すなわち，$x(t)\equiv k(t)\tilde{G}^{-t}$, $y(t)\equiv k_j(t)\tilde{G}^{-t}$ とすると

$$(\text{B-2})\quad \begin{cases} \tilde{G}x(t+1)=\tilde{B}x(t)+\alpha y(t)-c(0), \\ \tilde{G}y(t+1)=\tilde{B}y(t)+\alpha x(t)-c_j(0) \end{cases}$$

付図1

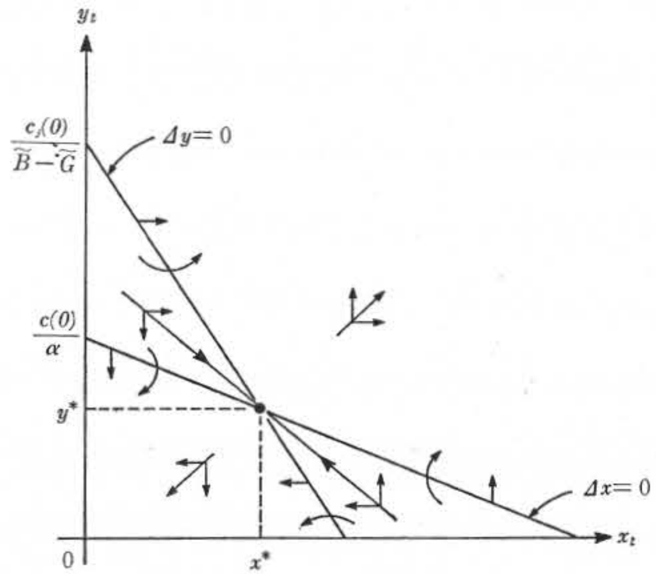
$\lambda_2>\tilde{G}$



28）新古典派の完全予見モデルにおいても TVC だけでは最適経路が決定できない場合が知られている（三野〔6〕7章参照）。

付図2

$\lambda_2 < \tilde{G}$



だから，定常点

(B-3) $$\begin{cases} x^* = \{(\tilde{B}-\tilde{G})c(0) - \alpha c_j(0)\}/\{(\tilde{B}-\tilde{G})^2 - \alpha^2\}, \\ y^* = \{\tilde{B}-\tilde{G})c_j(0) - \alpha c(0)\}/\{(\tilde{B}-\tilde{G})^2 - \alpha^2\} \end{cases}$$

が存在する。かくして，$\lambda_2 > \tilde{G}$, $\lambda_2 < \tilde{G}$ のとき付図1，2のような位相図が成立する。

1) $\lambda_2 > \tilde{G}$ の場合

この場合は平衡点は不安定であり，初期値 $x(0)=k(0)$, $y(0)=k_j(0)$ が平衡点にある場合を除いて，体系は発散する。TVC を考慮したとき $E=0$, そして $\lambda_2 > \tilde{G}$ ならば $F=0$ として求めた消費の初期値 $c(0)^*$, $c_j(0)^*$ は，体系の定常性条件 $x^*=k(0)$, $y^*=k_j(0)$ として求められたわけである。

2) $\lambda_2 < \tilde{G}$ の場合

この場合は平衡点は鞍点である。従って，所与の初期値 $x(0)=k(0)$, $y(0)=k_j(0)$ が平衡点に収束する経路

(B-4) $$\begin{cases} x(t) = F(\lambda_2/G)^t + x^*, \\ y(t) = -F(\lambda_2/G)^t + y^* \end{cases}$$

にあれば，体系は発散しないから，$k(0)+k_j(0)=x^*+y^*$, すなわち，$(k(0)+k_j(0))(\tilde{B}-\tilde{G}+\alpha) = c(0)+c_j(0)$ を満足する初期消費の組において早晩，鞍点が達成される。かくして，TVC を満足する初期消費の組が無数存在することがわかった。

参考文献

〔1〕浅野重初『関数グラフ便覧』，共立出版，1990年。

〔2〕Barro, Robert J. "Government Spending in a Simple Model of Endogenous Growth", *Journal of Political Economy*, Vol. 98, No. 5 (October 1990).

〔3〕今井晴雄，小林孝雄「ゲームの理論と経済学」『経済セミナー』1982年10月号―1984年1月号。

〔4〕Kreps, David M., *A Course in Microeconomic Theory*, Princeton University Press, 1990.

〔5〕Mino, Kazuo, "A Model of Investment with External Adjustment Costs", *Economic Studies Quarterly*, Vol. 38, No. 1 (March 1987).

〔6〕三野和雄『マクロ経済動学研究』，広島大学経済研究双書5，1989年。

〔7〕西村清彦『経済学のための最適化理論入門』，東京大学出版会，1990年。

〔8〕Prescott, Edward C. and John H. Boyd, "Dynamic Coalitions: Engines of Growth", *American Economic Review*, Papers and Proceedings, (May 1987).

〔9〕Prescott, Edward C. and John H. Boyd, "Dynamic Coalitions, Growth, and the Firm", in E. C. Prescott and N. Wallace, eds., *Contractual Arrangemens for International Trade*, Vol 1, University of Minnesota Press.

〔10〕Romer, Paul M. "Increasing Returns and Long-run Growth", *Journal of Political Economy*, Vol. 94, No. 5 (October 1986).

〔11〕Romer, Paul M, "Capital Accumulation in the Theory of Long-Run Growth" in R. J. Barro, eds., *Modern Business Cycle Theory*, B. Blackwell, 1989.

〔12〕Schmitz, James A., Jr. "Imitation, Entrepreneurship, and Long-Run Growth", *Journal of Political Economy*, Vol. 97, No. 3 (June 1989).

〔13〕瀬岡吉彦「ケインズ型経済における投資と財政効果」『経済学雑誌』91巻3・4号，1990年。

〔14〕鈴村興太郎『経済計画理論』，筑摩書房，1982年。

〔15〕Tirole, Jean, *The Theory of Industrial Organization*, MIT Press, 1989.