乗数・加速度原理と景気循環

——２階差分方程式と位相図——

森　　　　　誠

1. はじめに

景気循環を説明するいくつかの理論があります。主流派である新古典派は市場メカニズムを前提にしますから，完全雇用が持続したままの外生的なショックによる変動を考えています。技術水準の変動が確率的に生じると考えるリアルビジネスサイクル論（RBC）がその典型です。一方，新古典派のように完全雇用が成立するように民間投資が決定される必然性がないことを強調する考え方があります。すなわち，独立な投資関数としてハロッド＝置塩型投資関数を導入するならばナイフ・エッジと呼ばれる上方および下方への累積的な不安定生が生じることが知られています。この考え方で資本主義経済の景気循環を説明しようとするならば何らかの外生的な「天井」および「床」要因を考える必要があります。それに対して，独立な投資関数を認めたとしてもナイフ・エッジのような強い不安定性を示さない景気循環が生じうるという理論もあります。乗数・加速度原理による景気循環の説明がその一つです。ところが，通常は２階差分方程式を解くことになり直感的理解がしにくくなります（２)。そこで小論では位相図の手法を用いて景気循環が生じることを示してみます（３)。ここまでは，形式的に乗数・加速度原理を用いましたが加速度原理に予想需要成長率の観点で一定の解釈を与えてみます。そして，不況期における予想需要の役割を考えてみます（４)。

2. 乗数・加速度モデル

次の乗数・加速度原理に基づくモデルを考える。

（１）　$Y_t = C_t + I_t$,

（２）　$C_t = cY_t (0 < c < 1)$,

（３）　$I_t = \alpha(Y_{t-1} - Y_{1-2}) + I^a (0 < \alpha,\ 0 < I^a)$,

「記号」$Y_t = GDP$, $C_t =$ 消費，$I_t =$ 投資，I^a = 独立投資（autonomous investment），右下添え字 t は t 期を示す。

（１）は生産物が消費されるか投資されることを表す。（２）は所得の $c \times 100\%$ が消費されることを示す。（３）は投資＝誘発投資＋独立投資と考えたときに誘発投資が加速度原理に基づいて決定されることを表している。そして独立投資は一定とする。（１）と（２）から貯蓄性向 $s \equiv 1-c$ とすると乗数原理

（４）　$Y_t = (1/s) I_t$

が成立している[1)]。

1)　議論の単純化のためにいくつかの仮定がある。通常の加速度原理の定式化に従って，資本の減価償却を考慮しない。また，ここでは生産能力を越える有効需要の問題を考えない。

なお，小論では「床」要因として独立投資に注目するが，政府支出のような独立支出を考えてもよい。あるいは，消費関数に $C_t = C + cY_t$ $(0 < C,\ 0 < c < 1)$ のように独立消費を導入しても（６）を導出できる。ちなみに，通常の説明に従って独立投資を導入しているが，独立投資の生産能力に注意すると「床」は必ずしも形成されない（森1984参照)。

従って，内生変数 Y の運動は次の2階差分方程式で表される[2]。すなわち，$a\equiv\alpha/s$ とするとき

（5） $Y_t=a(Y_{t-1}-Y_{t-2})+I^a/s$

Yの変化を知ろうと思えば与えられた初期値 Y_0 と Y_1 を代入し Y_2 をもとめ，次に Y_2，Y_1 の値から Y_3 を，という具合に逐次的に解を求めてもよいのであるが，一般的に Y_t の値を求めれる（Y_t を解けというときは Y_t を既知の値 Y_0，Y_1，a，I^a/s および t で表すことである）。

まず，$Y_t=Y^*$ 一定とする解をためすと $Y^*=I^a/s$ は（4）を満足する。次に，この定数項を持つを持つ非同次型（4）の特殊解 Y^* を用いて，定数項を持たない同次型に変換する。すなわち，$y_t\equiv Y_t-Y^*$ とすると

（6） $y_t=a(y_{t-1}-y_{t-2})$

この同次型に対して A を定数として $y_t=A\lambda^t$（λ はラムダと呼ぶ）の指数型の解をためすと $A\lambda^{t-2}(\lambda^2-a\lambda+a)=0$ だから λ は次の2次の固有方程式の解である（固有値と呼ばれています）。

（7） $\lambda^2-a\lambda+a=0$

等根でないなら，その解を λ_1，λ_2 とすると同次型の一般解は A_1 と A_2 を定数として

（8） $y_t=A_1\lambda_1{}^t+A_2\lambda_2{}^t$

と表されることが知られている。かくして，非同次型の一般解は

（9） $Y_t=A_1\lambda_1{}^t+A_2\lambda_2{}^t+Y^*$

となる。そして A_1 と A_2 は初期値 Y_0 と Y_1 を与えることによって決定される[3]。

（7）の判別式から $a>4$ のとき相異なる2実根が存在し，$a<4$ のとき複素根が存在します。景気循環にかかわってくるのはこの複素根の場合です。ド・モアブルの定理を用いると複素根の場合は（最終的には Y_0，Y_1 を与えることによって決定される）B と ε を定数として

（10） $y_t=Br^t\cos(\omega t-\varepsilon)$

と表されることが知られています。ω と r は複素根の実部と虚部から決定されますが，$r=a^{1/2}$ です。一見，複雑な形なのですがポイントは r の大きさとコサインの形状にあります。すなわち，コサインの形状から t が増加してゆくときサイクルが生じることがわかります。そして $r>1$ ならばそのサイクルの振幅は増大してゆきますが，逆に $r<1$ ならばサイクルの振幅は減少してゆきます。

かくして，次のようにいえます。

「定理」

「$\alpha>4s$ ならば一般的には GDP の成長率プラス1は究極的には支配根（より大なる固有値）の値になる。$\alpha<4s$ ならば GDP は Y^* の周りを循環する。」[4]

従って加速度係数 α に注目すると次のように主張できます。すなわち，

「命題」

「加速度係数 α が十分に大ならば経済成長は持続する。一方，加速度係数が十分小ならば独立投資によって形成される床の周りを循環する。」

3. 位相図による表現

この2階差分方程式は連立1階差分方程式に書き換えれます。すなわち

$y_t=a(y_{t-1}-y_{t-2})$

において $x_{t-1}\equiv y_{t-2}$ とすると

（11） $y_t=a(y_{t-1}-x_{t-1})$,

$x_t=y_{t-1}$.

2） 差分方程式については例えば奥口（1997），須田（1983），森（1992）参照。

3） $y_0=A_1+A_2$, $y_1=A_1\lambda_1+A_2\lambda_2$ だから（7）の判別式 $D\equiv a^2-4a$ とすると $A_1=(y_0\lambda_2-y_1)/D^{1/2}$, $A_2=(y_1-\lambda_1 y_0)/D^{1/2}$ である（$D^{1/2}=\sqrt{a^2-4a}$）。

4） $f[\lambda]\equiv\lambda^2-a\lambda+a$ とすると $f[1]=1>0$, $f'[1]=2-a$ だから $a>4$ のとき2実根はともに1より大です（$(\lambda, f[\lambda])$ を図示せよ）。従って $\lambda_1<\lambda_2$ とすると A_2 のとき（9）より $Y_t/(A_2\lambda_2{}^t)=(A_1\lambda_1/(A_2\lambda_2))^t+1+Y^*/(A_2\lambda_2{}^t)$ ですから $t\mapsto\infty$ のとき $Y_t/(A_2\lambda_2{}^t)\to1$。

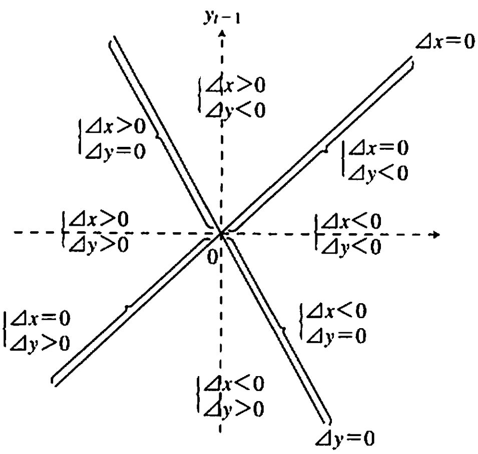
従って

(12)　$y_t \gtreqless y_{t-1} \Leftrightarrow (a-1)y_{t-1} \gtreqless a x_{t-1}$（複号同順），

$x_t \gtreqless x_{t-1} \Leftrightarrow y_{t-1} \gtreqless x_{t-1}$（複号同順）

ですから $\Delta y \equiv y_t - y_{t-1}$，$\Delta x \equiv x_t - x_{t-1}$ として (x_{t-1}, y_{t-1}) における変化を記入してみます。$a<1$ の場合を示します。

図1（$a<1$）



まず，$\Delta x=0$ と $\Delta y=0$ の直線を記入します。Δx の符号は次のように分類します。ある x_{t-1} を選んだとして y_{t-1} が $\Delta x=0$ とする値よりも大きければ $\Delta x>0$ です。従って，$y_{t-1}=x_{t-1}$ よりも上の領域では $\Delta x>0$ であり，下の領域では $\Delta x<0$ です。Δy についても同様に分類できます。

そこで次に $\Delta x>0$ ならば x 軸と平行に右向きの矢印，$\Delta x<0$ ならば x 軸と平行に左向きの矢印を記入します。y についても同様に $\Delta y>0$ ならば y 軸と平行に上向きの矢印，$\Delta y<0$ ならば y 軸と平行に下向きの矢印を記入します。このように平面のすべての各点について運動の方向をベクトルで示せれるのですが $\Delta x=0$ と $\Delta y=0$ の2直線とそれらによって分割される4領域の各一点だけベクトルを記入する事にします。

かくしてそのベクトルから体系の動きが図示できます。$\Delta x=0$ を通るときは垂直に，そして $\Delta y=0$ を通るときは水平に通過します。

図2（$a<1$）

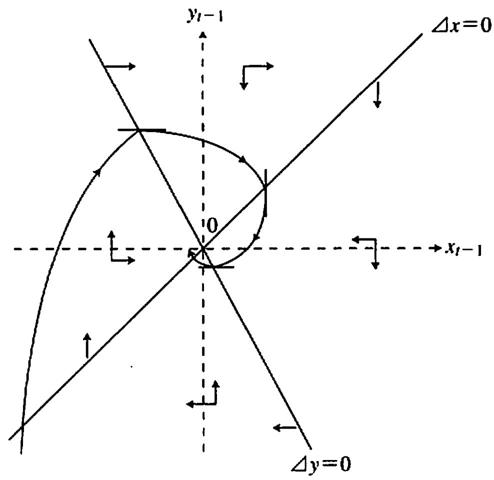


図2では均衡点である原点に時計回りに回転しながら収束してゆく様が読みとれます[5)]。

a が増加してゆくとき $\Delta y=0$ の直線は (Y^*, Y^*) を中心に右回転します。$a>1$ では傾きは

5)　若干の補足

1. 微分型の位相図であれば滑らかな曲線になりますが，離散型の位相図ですから正確にいえば各点をジャンプしてゆきますから折れ線になります。そのことは当然のこととして，簡単化のためにあたかも滑らかであるかのように描くことにします。ちなみに，(11) ですから $\Delta x=0$ の直線の傾きが45°であることと，傾きが a である補助線を利用すれば，y_0，y_1 を所与の初期値としてで付図1のように描けます。付図1では $a=1/2$ の場合ですが①→②→③→④→のようにジャンプしてゆきます。
2. 以下では簡単化のために均衡点を原点にして描きますが (x_{t-1}, y_{t-1}) 座標は $(X_{t-1} \equiv Y_{t-2}, Y_{t-1})$ 座標を平行移動した座標です。(11) は $Y_t = Y^* + a(Y_{t-1} - X_{t-1})$，$X_{t-1} \equiv Y_{t-2}$ ですから $a<1$ のとき $Y_t \gtreqless Y_{t-1} \Leftrightarrow aX_{t-1}/(a-1) - Y^*/(a-1) \gtreqless Y_{t-1}$（複号同順）　↗

プラスになり，循環するものの発散してゆきます（図3）。そのまま類推すると $a>4$ でも循環するように見えますが，そうではありません。y_t/x_t に注目してみます。そのとき，（6）より $z_t \equiv y_t/y_{t-1}$ とすると $z_t = a(1-1/z_{t-1})$。容易にわかるようにこの1階差分方程式を (z_{t-1}, z_t) 平面に描くとき $a>4$ ならば2つの均衡点が存在します。実は前節での固有根の値 λ_1 と λ_2 です。このことは次のことを意味します。初期値が $y_1/y_0=\lambda_1$ となるような組であるとき，常に $y_t/y_{t-1}=\lambda_1$ が成立する。y_0 が正ならば Y_t は増加し続けます。y_0 が負ならば Y_t は減少し続けます。λ_2 についても同様です。かくして，$a>4$ の場合の位相図は次のようになります

図4において下方から上方に向かう運動は上方から下方に向かうことなく上昇し続けます。逆に，上方から下方に向かう運動は上方に向かうことなく下降し続けます。どちらのケースも

付図1

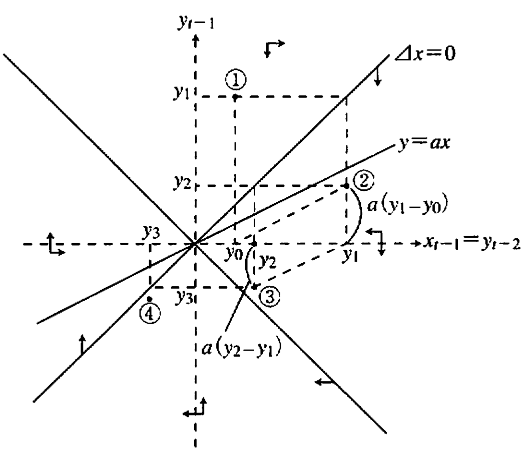
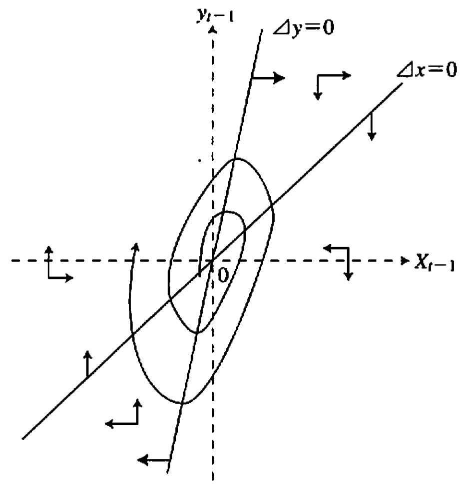


図3　$1<a<4$



付図2

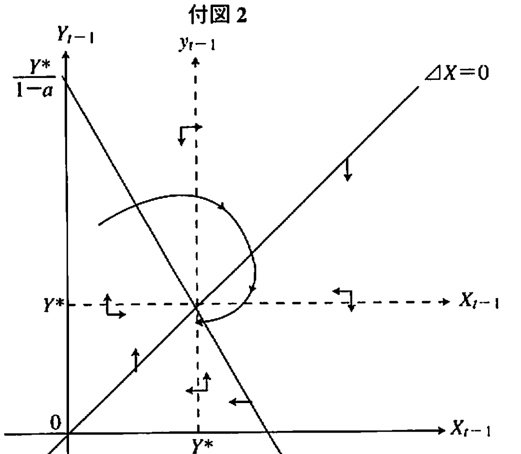
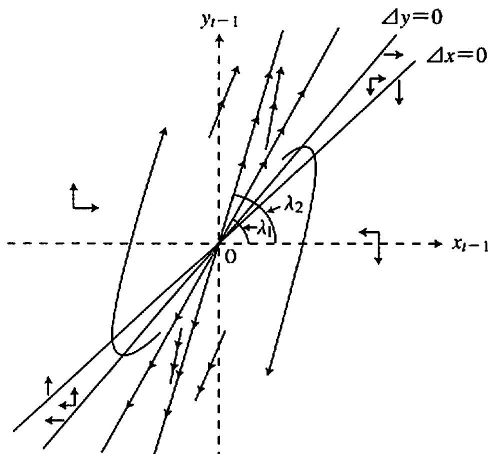


図4（$4<a$，$\lambda_1<\lambda_2$）



傾きが λ_2 の直線を越えません[6)]。

このように，2階差分方程式を連立1階差分方程式にするとき，$a<4$ の場合は y あるいは x に注目すれば均衡点 Y^* をめぐる循環が生じることがわかる。また y/x に注目すれば成長率が循環しているのか否かを確認できる[7)]。

かくして加速度係数があまり大きくないならば累積的な不安定性でなく下方への運動が上方への運動に逆転することがわかった。すなわち，不況期において加速度原理からの GDP 減少は投資を減少させそのことがまた GDP を減少させる。このプロセスが継続するが最低限，独立投資によって形成される需要 Y^* が存在するため誘発投資が増加しうる[8)]。

4. 不 況 過 程

ここまでは形式的に加速度原理によって景気循環が生じうることをみてきましたが，加速度係数に一定の解釈を与えてラフにではですが不況過程の一側面を考えてみます。

t 期における $t+1$ の予想需要（expectation）${}_tY^e{}_{t+1}$ と資本係数 v の値が与えられたとき ${}_tY^e{}_{t+1}$ を生産するのに必要な設備量は

(13)　$K_{t+1}=v_t\,{}_tY^e{}_{t+1}$

です。そこで t 期では前期の生産量 Y_{t-1} は既知ですからこれを用いて

(14)　${}_tY^e{}_{t+1}=\beta Y_{t-1}$

のように予想されるとしてみます。ここで β は $t-1$ 期から $t+1$ 期にかけての予想成長率です。当面 β は一定としてみます。

ところで資本ストックと粗投資との関係から減価償却率がゼロだとすると

(15)　$K_{t+1}=I_t+K_t$

ですから，今の予想方式から

(16)　$I_t=v\beta(Y_{t-1}-Y_{t-2})$

が成立します。すなわち，$v\beta=\alpha$ とすれば加速度原理による投資関数が成立します[9)]。

前節までの議論から $\beta>4s/v$ のとき好況局面に入っておれば成長は持続しそうですが，我々は Y_t/Y_{t-1} の減少する不況局面を考えてみます。そのとき，一定の β に対して成長率が低下し続けますから β が低下すると考えてみます。そのとき，$1<\beta<4s/v$ の β にとどまるのなら独立投資の床による発散的循環が生じますから循環における回復過程で β が引き上げられ $\beta>4s/v$ と確信されるならば本格的好況が始まります。しかし，循環を通じて予想需要が Y^* であることが認識されるならば図2のように床に張り付いてしまう場合がありそうです。一旦こうなると不況は長引くと考えられます。このような不況から脱出するきっかけは何なのでしょうか。実は今まで一定と考えてきた独立投資にそのヒントがありそうです。何らかの新技術が開発されそのことが各企業の投資を増加させるならば β が高まり好況局面が開始しそうです[10)]。

6)　脚注4も参照。

7)　2階差分方程式と位相図についてのさらなる詳細については和田（1989）参照。

8)　形式的には次のようなプロセスです。$0<y_1<y_0$ のとき $y_2=a(y_1-y_0)<0$ となり $y_2<0<y_1$ だから $y_3=a(y_2-y_1)<0$。そのとき，a が十分小さければ，$y_3>y_2$ だから $y_4=a(y_3-y_2)>0$。そして $y_5>0$。

なお，ここでは議論を複雑にしないため資本ストックを明示化していませんが，マイナスの投資は実際には資本ストックの減価償却を意味します。そのとき下方からの反転は一方での資本ストックの減少の継続，他方での最低限の需要 Y^* というわけですから，いつか超過需要が発生する，と考えることができます。

9)　但し，このように考えるとき独立投資と予想需要の関係が問題になりますが，ここでは深入りせず誘発投資が(16)のように解釈できるにとどめることにします。

10)　瀬岡（1984）では競争的投資が考えられています。

参考文献

森　誠（1992）「差分方程式と微分方程式入門」,『経済学雑誌』第93巻別冊。

森　誠（1984）「外生支出と生産能力効果」,『経済学雑誌』第84巻第6号。

奥口孝二（1977）,『経済分析の数学基礎』, マグロウヒル。

瀬岡吉彦（1984）,『資本主義経済の理論―正統派経済学の再検討』, ミネルヴァ書房。

須田　宏（1983）『差分方程式・微分方程式』, 培風館。

和田貞夫（1989）,『動態的経済分析の方法』, 中央経済社。