基礎科目Ⅰ・近代経済学（ミクロ１）（講義資料）

時間と不確実性

——非期待効用関数について——

瀬　岡　吉　彦

要　約

経済学の主軸は動態的マクロ経済学である。その基礎付けの一つとして，不確実性の世界で，時間にわたって消費を計画する家計の行動を検討する。このような状況を取り扱うために，通常の経済学教科書では，期待効用仮説にしたがってモデルを組み立てている。しかし，その場合は家計の「消費に関する時間的な代替性の度合い」と「不確実性に関するリスク回避的態度の度合い」とが区別できなくなる。この欠陥を克服する試みとして，非期待効用仮説を紹介する。

第１節　はじめに

経済学部では近代経済学の基礎カリキュラムとして，マクロ経済学とミクロ経済学とが提供されていますが，これはあくまでも，教育上の便宜に過ぎず，実際に経済学がミクロとマクロとに分かれて並立しているというわけではありません。経済学の最終目的はあくまでも経済全体，具体的には日本経済，さらには世界経済の時間的な運動経路を分析することだからです。その点では，マクロ経済学，特に，動態マクロ経済学（dynamic macroeconomics）が経済学の主軸でなければなりません。しかし，言うまでもなく，経済は多数の家計や企業，及びそれらの間のつながりからなっており，その分析を基礎にした動態マクロ経済学を発展させなければなりません。そこに，ミクロ経済学の重要性があるわけです。

ところが，経済学史的に言えば，従来のマクロ経済学はほとんどの場合，確固としたミクロ経済学の基礎付けを無視して展開されて来ました。同時にミクロ経済学もまたマクロ経済学の基礎付けを行うという本来のもっとも重要な目的を忘れて展開されてきた嫌いがあります。ミクロ経済学とマクロ経済学が並立しているという印象が芽生えた原因の一つはここにあります。私達は，これから半年間，そのことを心に留めてミクロ経済学Ｉを勉強したいと思います。

さて，経済学は「効用関数」（utility function）と「生産関数」（production function）という二つの概念を基礎として成り立っています。前者は色々な消費とそれによる満足度（以下，「効用」と呼ぶ）との関係を示すもので，家計はこれを所与の予算制約のもとで最大にするように，消費の仕方を決めます。後者は色々の生産要素投入とそれによる産出量との関係を示すもので，企業はこれと所与の予算制約のもとで，利潤を最大にするように生産の仕方を決定します。

教科書（倉沢資成『入門価格理論第２版』日本評論社）では第１章と第２章の序説部分を別にすると，第３章から第５章までは効用関数にかかわる部分（及び効用関数の概念のみに基づいた一般均衡論），第６章から第10章までは生産関数に関わる部分となっています。

更に第11章から第15章までは，それまでの

「完全競争」,「完全情報」の仮定からはずれて，独占・寡占(monopoly and oligopoly)の問題，企業の所有と経営との違いから生じる主人ー代理人関係(principal-agency relationship)の問題，売り手と買い手との間の非対称情報(a-symmetrical information)の問題等々が取り扱われます。また，それらの諸問題を考慮に入れた上での，生産要素の価格決定，特に賃金決定の問題が取り扱われます。

最後に，第16章で，時間にわたる消費や貯蓄の決定が取り扱われています。

今学期の私の一応の担当は第1章か第5章までですから，効用関数の説明が主題となります。しかし，これらの章に議論を限定すると，次の様な不都合が生じることになります。

第一に，第3～5章では，一時点の，またはむしろ時間の観念がない世界が語られています。最初の出発点として，このような状況の下での家計（または企業）の行動を分析することが必要であることは言うまでもありませんが，それだけでは，動態マクロ経済学の基礎としてのミクロ経済学の役割が見通せないままに終わってしまいます。そこで，私としては，最終章の第16章「貯蓄と投資」にも関連する形で講義を進めたいと考えています。

第二に，家計（または企業）が将来にわたる消費（または生産）を計画する場合，「将来の状況がどうなるかはっきりとは分からない」と言う問題に直面せざるを得ません。これは「不確実性」(uncertainty)の問題と呼ばれていますが，残念ながら教科書ではこの問題を取り扱っていません。しかし，時間が明示的に導入される以上は，不確実性も，少なくとも初歩的な形で，導入されることが必要であろうと思われます。そのようなわけで，ミクロ経済学Ⅰでは，第1章から第5章までを習得した上で，時間とそれにともなう不確実性の問題にも挑戦したいと思います。

なお，執筆者の倉澤教授自身が宣言しているとおり，教科書では数学，特に微分・積分がまったくと言ってよいほど使われず，その代わりに図が多用されています。しかし，大阪市大経済学部に入学したほとんどの諸君は，数学を受験科目の一つとして選択しており，しかも入学後，基礎教育科目の一つとして数学を受講しなければならないのですから，教科書のポリシーに忠実に従うべき筋合いはないと思います。実際，数学の利用によって，図だけでは曖昧にしか分からない（または，図ではかえって説明が複雑になって分かり難い）ことが明快になることがあります。そこで，私の講義では，むしろ数学を多用して，教科書の図と対比しながら説明していきたいと思います。もっとも，数学と言っても，高校の数学の程度を超えることはほとんどありませんから安心して下さい。不幸にして，数学に苦手な諸君はシラバスや教科書に掲載されている他のミクロ経済学の参考書で勉強して下さい。

第2節　時間的な代替弾力性

歴史的な時間の流れを適当に区切り，その中のある時点で，2期間にわたって消費計画を立てる家計を考えます。この家計の第1期の消費をc_1，第2期のそれをc_2とするとき，第1期から見た彼の計画期間全体にわたる効用が

(1)　$U=(c_1^{\gamma}-1)/\gamma+\beta(c_2^{\gamma}-1)/\gamma$

(但し，$\beta>0$, $\gamma\equiv1-1/\sigma$, $\sigma>0$)で表されるとします。但し，$\sigma=1$（すなわち$\gamma=0$）のときは，極限を考え，$\sigma\to1$（すなわち，$\gamma\to0$）とすると，上式は

(1)　$U=\log c_1+\beta\log c_2$

となることを容易に証明することが出来ます[1]。

この家計にとって第1期は若年期，第2期は

1)　$\beta=1/(1+\alpha)$とおくとき，$\alpha(>-1)$は家計の「時間選好率」(rate of time preference)と呼ばれています。αは通常は正と仮定されていますが，有限の計画期間を扱う限り，ゼロまたは負であってもかまいません。

老年期を表しているものとします。家計は若年期には自己の労働を企業に提供する代わりに，賃金所得 $w(>0)$ を獲得するとします。このうち家計は（自分たちの子供の消費分も含めて）c_1 を消費し，残り s_1 を貯蓄するとします。老年期には家計はこの貯蓄 s_1 とそれに対する利子 $i\times s_1$ とをすべて消費するとします。但し i は利子率 (>-1) を表します[2)]。簡単のために，この家計が受け取る遺産も残す遺産もゼロとします。

上の事情を数式に書くと，

（2）　$s_1=w-c_1$

（3）　$c_2=(1+i)s_1$

となりますが，この両式から

（4）　$c_1+c_2/(1+i)=w$

が得られます。ここで w は今期（第1期）の一家計当たり賃金ですが，i は来期（第2期）の利子率であり，第1期から見た場合の予想値であることに注意しなければなりません。しかし当面は，家計は i を確実に予想できる（あるいは，確実に予想できると考えている）と仮定します。

若年期にある家計についての問題は，（4）式の制約のもとに，（1）式を最大にすることですが，（4）式の c_2 を（1）式に代入すると

$$U=(c_1^{\gamma}-1)/\gamma+\beta((1+i)^{\gamma}(w-c_1)^{\gamma}-1)/\gamma$$

となることを利用すれば，そのための必要条件

（5）　$c_2/c_1=\{1/(\beta(1+i))\}^{-\sigma}$

が得られます。さらに（4）式と（5）式から

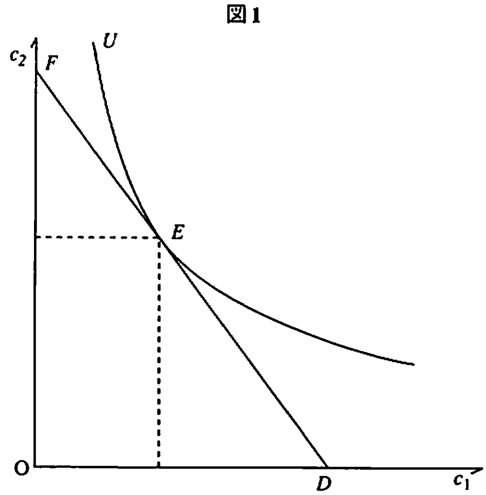
$$(6)\quad \begin{cases} c_1=\dfrac{w}{1+\left[\dfrac{1}{1+i}\right]^{1-\sigma}\beta^{\sigma}} \\ c_2=\dfrac{(1+i)^{\sigma}\beta^{\sigma}w}{1+\left[\dfrac{1}{1+i}\right]^{1-\sigma}\beta^{\sigma}} \end{cases}$$

が得られます。

図1は，教科書の図16.1と同じものですが，この決定関係を示しています。つまり，（4）式を示す予算制約線FDに対して，（1）式の色々な U の値に対応して描かれる効用無差別曲線のうち，それに接する曲線の接点 E が c_1 と c_2 を決定することになります。この場合，無差別曲線が原点に対して凸でなければなりませんが，確かにそうなっていること，つまり，（1）式で $U=$ 一定としたとき，$dc_2/dc_1<0$ であるが，$d^2c_2/dc_1^2>0$ となることを確認して下さい。

ちなみに，（6）式より，所与の w のもとで，利子率が高くなると，c_2 は必ず増加しますが，

図1



2)　利子率については，名目利子率と実質利子率とが区別されなければなりません。ここでの i は実質利子率です。名目利子率は貨幣の貸借において生じる利子率で，これは当然のことながら，ゼロまたは負になることはありません。しかし，名目利子率から価格の上昇率を引いた値で決まる実質利子率は負になることがあります。もっとも，その場合でも，$1+i$ がゼロまたは負になることはありません。なぜなら，名目利子率が正であれば，所与の貸付額に対する返済額は必ず正だからです。

なお，教科書の p. 348 以下の「利子率の決定」の節で議論されているのは名目利子率であって，図16.1（p. 334）の予算線の傾きを決定する実質利子率ではありません。実質利子率は貨幣の需給関係とは別のメカニズムによって決定されます。

c_1 に関しては σ の値に依存して

$$dc_1/d(1+i) \gtreqless 0 \rightleftarrows \sigma \lesseqgtr 1$$

となることに注意して下さい。

ところで，(5)式から $1/(1+i)$ が1%増加するとき，c_2/c_1 は $\sigma \times 100\%$ 下落することが分ります。このことが何を意味するかを考えるために，教科書第3章と第4章の世界に戻り，(1)式において c_1 と c_2 がそれぞれ第1財と第2財という異なった種類の財の同一期間での家計の消費量を表しているとします。そして，U を予算制約式

(7)　$c_1+pc_2=w$

のもとで最大にすることを考えましょう。但し，p は第1財で表した第2財の価格（第2財の第1財表示の相対価格），w は第1財で表した家計の所得を示します。そのとき，(5)式に対応して

(8)　$c_2/c_1=(p/\beta)^{-\sigma}$

が得られます。(8)式は相対価格 p が1%上昇したとき，第2財の消費の第1財のそれに対する比率 c_2/c_1 が σ%下落することを示しています。このとき，σ は「第1財と第2財の間の代替弾力性」と呼ばれます。

ところで(4)式と(7)式とを比較すると，(7)式における相対価格 p が(4)式の $1/(1+i)$ に対応していることが分かります。つまり，(7)式において，p が，第2財の1単位を得るために犠牲にしなければならない第1財の量を表しているように，$1/(1+i)$ は，第2期の消費1単位を得るために犠牲にしなければならない第1期の消費量を表していることになります。この意味において，$1/(1+i)$ は第2期の消費1単位の第1期の消費で表した相対価格であり，(4)式の σ は「第1期と第2期との間の（消費に関する）代替弾力性」を表すことになります。以下では，これを単に「異時点間の代替弾力性」(intertemporal elasticity of substitution) と呼ぶことにします。

第3節　不確実性の導入

前節では，家計が第1期首に消費計画を立てる場合，第2期の利子率が分かっていると仮定しました。しかし，本節では，将来は不確実であることを考慮して，$1+i$ を確率変数として，これを $\widehat{R}$ とします。そうすると，

(9)　$c_2=\widehat{R}(w-c_1)$

で決まる c_2 も，所与の貯蓄 $(w-c_1)$ のもとで確率変数になります。このような場合，従来の経済学では，家計は(1)式からごく自然に得られる「期待効用」(expected utility)

(10)　$E(U)=(c_1^{\gamma}-1)/\gamma+\beta(E(\widehat{c}_2^{\,\gamma})-1)/\gamma$

(但し $\gamma\neq0$)[3] を c_1 に関して最大にするように行動すると仮定してきました。但し，上式の $E(.)$ は( )内の変数の期待値がとられることを表します。

前節と同様にして，(10)式を最大にすることは

$$E(U)=(c_1^{\gamma})/\gamma+\beta((w-c_1)^{\gamma}E(\widehat{R}^{\gamma})-1)/\gamma$$

を c_1 に関して最大にすることと同値ですから，(6)式の c_1 に対応して

(11)　$c_1=\dfrac{w}{1+\beta^{\sigma}E(\widehat{R}^{\gamma})^{\sigma}}$

が得られます。$\widehat{R}$ が確率変数でないときには，(11)式の c_1 は(6)式のそれに一致することを容易に確かめることが出来ます。

しかし一旦，$\widehat{R}$ が確率変数になると，$E(\widehat{R}^{\gamma})$ は $E(\widehat{R})^{\gamma}$ ではないこと，あるいは同じことですが，$E(\widehat{R}^{\gamma})^{1/\gamma}$ が $E(\widehat{R})$ でないことが重要になります。いま

(12)　$c_2^*=E(c_2^{\gamma})^{1/\gamma}$

を満足する c_2^* を確率変数 c_2 の「確実性等価」(certainty equivalent) と呼ぶことにします。これは家計にとって確率変数 c_2 の消費を所与

3)　$\gamma=0$ のときは，(10)式の代わりに

$$EU=\log c_1+\beta E(\log \widehat{c}_2)$$

が成立します。

の確率分布にしたがって享受するのと同等の価値を持つ確実な消費量を示します。さらに，(12)式は，

(13)　$R^*=E(\hat{R}^{\gamma})^{1/\gamma}$

とおき，(9)式を利用すると，

(14)　$c_2^*=R^*(w-c_1)$

と同等になります。すなわち，貯蓄 $(w-c_1)$ が与えられると，消費の確実性等価 c_2^* と1＋利子率の確実性等価 R^* とは比例することになります。

$\hat{R}$ の確実性等価 R^* と $\hat{R}$ の期待値 $E(\hat{R})$ とを比較してみましょう。図2と図3は $\hat{R}$ が RH と RL（但し，$RH>RL$）の2つの値をそれぞれある確率でとるときの様子を描いています。図2の曲線OAは $1>\gamma>0$ のときの

$$f[\hat{R}]=\hat{R}^{\gamma}$$

を表していますが，この曲線は右上がり，かつ下方に対して凹となって，$\hat{R}$ の期待値 $E(\hat{R})$ と確実性等価 R^* との間に正の乖離が起こることが分かります。また，図3の曲線ABは $\gamma<0$ の場合を描いたものですが，この曲線は右下がりで，かつ原点に対して凸になって，ここでも $E(\hat{R})$ と R^* との間に正の乖離が起こることが読みとれます。このような期待値と確実性等価との乖離は，直観的に曲線OAの「曲がり具合」に依存すると考えられます。そしてこの「曲がり具合」を示す一つの指標は，$\hat{R}$ が1％上昇したとき，曲線OA上のその $\hat{R}$ に対応する点における接線の傾き $f'[\hat{R}]$ が何％減少するか，つまり

$$-df'[\hat{R}]/f'[\hat{R}])/(d\hat{R}/\hat{R})$$
$$=-f''[\hat{R}]\hat{R}/f'[\hat{R}]=1/\sigma$$

で与えられると考えることが出来ます。それ故，$1/\sigma$ の値が大きいほど，期待値と確実性等価との隔たりが大きくなり，家計がリスク（不確実性）に対してより慎重になると考えられます。その意味で，$1/\sigma$ は「(相対的) リスク回避度」((relative) degree of risk aversion) と呼ばれています。

このように σ（の逆数）は家計の不確実性に対する態度を示しますが，それと同時に前節で述べた異時点間な代替弾力性と類似した概念を示します。実際，(6)式の c_2 に対応して

(15)　$c^*_2=\dfrac{\beta^{\sigma}R^{*\sigma}w}{1+\beta^{\sigma}E(\hat{R}^{\gamma})^{\sigma}}$

が得られ，これと(11)式を考慮すると，σ は c_2^*/c_1 の $1/R^*$ に関する弾力性を表すという意味で，依然として時間的な代替弾力性を表すことになります。

図2

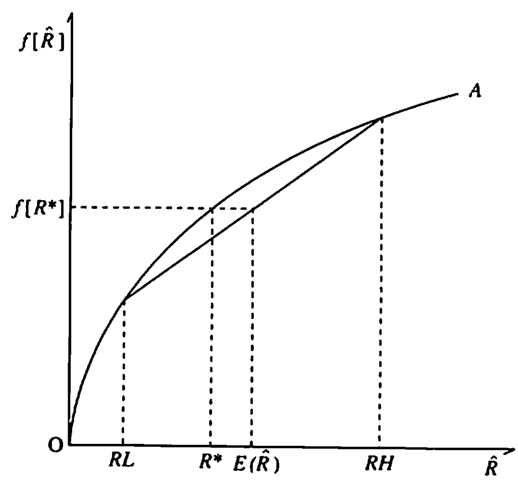
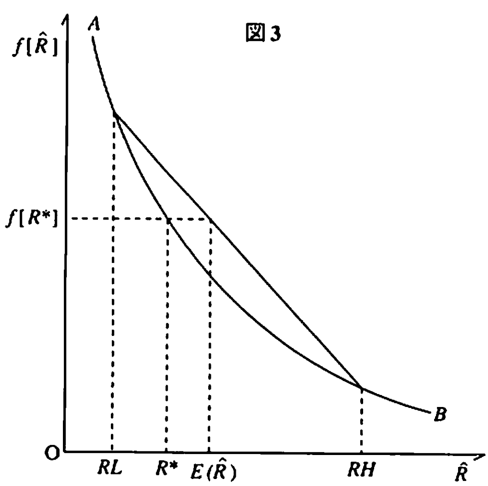


図3



第4節　非期待効用

第2節ではσは時間的な代替弾力性を表すことが示されました。ところが第3節では，$1/\sigma$が時間的な代替弾力性，またはそれによく似た概念に加えて，（相対的な）リスク回避度をも表すことが示されました。一つのパラメターσが概念的に異なる二つの役割を果たしているということは，理論的にはきわめて具合の悪いことになります。

いままでの議論から直観的に明らかなように，この事態を打開する最も自然な道は，家計の効用関数を

(16)　$V=(c_1^{\gamma}-1)/\gamma+\beta(E(\widetilde{c}_2^{\rho})^{\gamma/\rho}-1)/\gamma$

で定義することであろうと思われます。ここで，$\gamma=1-1/\sigma<1$, $\rho=1-1/\delta<1$。もっとも，(16)式は$\gamma\neq0$, かつ$\rho\neq0$の場合にのみ意味を持ちますが，$\gamma=0$ and/or $\rho=0$の場合も，それぞれの極限をとって，以下と同様の議論をすることが出来ます。自分で試して下さい。

(16)式は，c_2が確率変数でないとき，つまり$E(c_2^{\rho})^{1/\rho}=c_2$のとき，(1)式に帰着します。また，$\rho=\gamma$のとき，(10)式に帰着します。しかし，一般には，(16)式の最大化は，(1)式の期待効用バージョンである(10)式の最大化とは異なる結果を生むことに注意して下さい。(16)式が「非期待効用関数」(non-expected-utility function)と呼ばれている所以です。

一旦，(16)式が導入されると，不確実性に関しては，前節と同じように，期待値$E(c_2)$と確実性等価$c_2^*=(c_2^{\rho})^{1/\rho}$，あるいは$E(\widehat{R})$と$R^*=E(\widehat{R}^{\rho})^{1/\rho}$との関係が問題となり，両者の乖離の度合いを決定する（相対的）リスク回避度は，$\rho=1-1/\delta$とおくときの$1/\delta$で表されることになります。

他方，(16)式を(9)式を用いて書き換えると

(17)　$V=(c_1^{\gamma}-1)/\gamma+\beta((w-c_1)^{\gamma}E(\widehat{R}^{\rho})^{\gamma/\rho}-1)/\gamma$

となり，これをc_1に関して最大にすると

(18)　$c_1=\dfrac{w}{1+\beta^{\sigma}R^{*(\sigma-1)}}$

が得られます。また，これより

(19)　$c_2^*=\dfrac{\beta^{\sigma}R^{*\sigma}w}{1+\beta^{\sigma}R^{*(\sigma-1)}}$

が得られます。したがって，前節と同じ意味において，σは異時点間の代替弾力性を表していると見なすことが出来ます。

前述のように，σとδが異なる限り，非期待効用に基づいて(18)式で与えられるc_1は，期待効用に基づいて(11)式で与えられるc_1とは異なったものになります。Epstein & Zin (1991)による，1959年4月から1986年12月にかけてのアメリカの家計を対象にした実証研究では，σは1よりかなり小さい値（データの取り方等によって差異がありますが，およそ0.3）である一方で，$1/\delta$は（したがってδも）1に非常に近い値を示しています。

なお，(16)式は期待効用を示す(10)式のごく自然な修正ではありますが，この方法をそのまま3期間以上に延長した場合には，「時間的な非整合性」(time inconsistency)という欠陥が現れます。これについては補論を参照して下さい。

第5節　結　び

本稿では，家計の消費の時間的選択について考えました。その結果，将来についての不確実性が導入される場合，家計の「消費に関する時間的な代替弾力性」と「将来の不確実性に関する（相対的）リスク回避度」とを区別するためには，期待効用仮説を放棄せざるを得ないことが分かりました。

実は，本稿で考えたような，人生を若年期と老年期に分け，若年期に行われた貯蓄とその利子によって老年期の生活が賄われるという仕組みは，動態的マクロ経済学の2つの基本類型の一つである「世代重複モデル」(overlapping-generations model)と密接な関連を持っていま

す[4]。すなわち，世代重複モデルのもっとも単純な形態では，一期間において，自己の労働提供の代償として受け取る賃金の一部を消費し，他の部分を次期の消費のために貯蓄する若年世代と前期の貯蓄とその利子で生活する老年世代とが併存することになります。

世代重複モデルの一般化および政策的含意にについては，いままで多くの議論がなされてきました[5]。しかし，将来の不確実性を導入し，家計が消費に関する時間的な代替と将来のリスク回避とを明示的に区別するような世代重複モデルはまだ現れていません。本稿の議論はその方向への理論展開の準備作業でした。

補論　時間的非整合性

期待効用を表す本文(10)式を3期間(例えば，若年期，壮年期，老年期）に拡張して

(22)　$V_1=(c_1{}^\gamma-1)/\gamma+\beta(E_1(c_2{}^\gamma)-1)/\gamma$
$\quad+\beta^2(E_1(c_3{}^\gamma)-1)/\gamma$

と書く。但し，$E_j(.)$ は(　)内変数の第 j 期から見た期待値を表す。V_1 は，第1期から見た3期間にわたる消費系列の期待効用である。他方，第2期ら見た2期間の期待効用は

(23)　$V_2=(c_2{}^\gamma-1)/\gamma+\beta(E_2(c_3{}^\gamma)-1)/\gamma$

このとき，明らかに

(24)　$V_1=(c_1{}^\gamma-1)/\gamma+\beta E_1(V_2)$

が成立する。すなわち，第1期から見た効用は，第1期の消費と第2期から見た効用の期待値のみに依存して決まる。

さて，予算制約式を

$(a.1)$　$s_1=w-c_1$

$(a.2)$　$s_2=\widehat{R}_2s_1+w-c_2$

$(a.3)$　$c_3=\widehat{R}_3s_2$

とする。但し，$\widehat{R}_t$ は t 期の利子率＋1を示し，確率変数とする（単純化のために，賃金率 w は一定とする)。そのとき，第1期にある家計は，先ず所与の $\widehat{R}_2s_1$ のもとで，(23)式の V_2 を最大にする c_2 を求め，次にこれから得られた $V_2=V_2(\widehat{R}_2s_1)=V_2(\widehat{R}_2(w-c_1))$ を用いて，(24)式から V_1 を最大にする c_1 を求める。この計算手順から明らかなように，第1期に立てられる消費計画と第2期になって立てられる消費計画とは相互に整合的である。ここで「整合的」とは，(効用関数のパラメター等に変化がない限り）第2期になって第1期で立てられた計画が変更されることはないという意味である。

ところが，本文(16)式を3期間にそのまま延長して，第1期から見た効用を

(25)　$V_1=(c_1{}^\gamma-1)/\gamma+\beta(E_1(c_2{}^\rho)^{\gamma/\rho}-1)/\gamma$
$\quad+\beta^2(E_1(c_3{}^\rho)^{\gamma/\rho}-1)/\gamma$

また，第2期から見た効用を

(26)　$V_2=(c_2{}^\gamma-1)/\gamma+\beta(E_2(c_3{}^\rho)^{\gamma/\rho}-1)/\gamma$

とする場合，V_1 を最大にする第1期の消費計画と V_2 を最大にする第2期の消費計画とは一般に整合的ではない。なぜなら，$\rho\neq\gamma$ である限り，

$$E_1(V_2)\neq(E_1(c_2{}^\rho)^{\gamma/\rho}-1)/\gamma+\beta(E_1(c_3{}^\rho)^{\gamma/\rho}-1)/\gamma$$

であり，(25)式を

$$V_1=(c_1{}^\gamma-1)/\gamma+\beta E_1(V_2)$$

の形に書くことは出来ないからである[6]。

時間的代替性とリスクに対する態度を分離するという望ましい性質を保持しながら，このような問題を克服するためには，t 期 ($t=1,2$) において

4)　もう一つの基本類型は「代表的家計モデル」(representative-household model)で，家計は無限の将来にわたって計画された消費からの効用を最大にするというものです。この場合には，時間的非整合性の問題が決定的に重要になります。

5)　世代重複モデルに関するいままでの議論の展望は Adariadis (1993) でほぼ与えられていますが（ちなみに，これは，現在，大学院前期博士課程の基礎科目「マクロ経済学」での教科書に使われています)，最近になっても関連論文が次々と発表されています。例えば日本理論・計量経済学会の機関誌，Japanese Economic Review の最近号には，Mutoh (1995) をはじめ3編の論文が掲載されています。

6)　より正確に，かつ一般的に言えば，(25)式に関しては，後出(27)式のような関数を見出すことが出来ないからである。

(27)　$V_t = F[c_t,\ E_t(V_{t+1}{}^{\rho})^{1/\rho}]$

を満足する関数 $F[.]$ を見いだせばよい（但し，関数 $F[.]$ は c_t と $E_t(V_{t+1}{}^{\rho})^{1/\rho}]$ の両者に関して増加関数)。Epstein & Zin (1989) は(27)式の具体的な形として

(28)　$V_t = (c_t{}^{\gamma} + \beta E_t(V_{t+1}{}^{\rho})^{\gamma/\rho}))^{1/\gamma}$

を指定している[7]（但し，$\gamma=0$ and/or $\rho=0$ の場合についても，極限をとることによって適当に与えられる)。

いま，最終期(第3期)の効用 V_3 は c_3 に等しいとする[8]。$E_t(V_t{}^{\rho})^{1/\rho}$ は V_t の増加関数であることに注意しすると，第1期にある家計は先ず，

(29)　$V_2 = (c_2{}^{\gamma} + \beta E_1(c_3{}^{\rho})^{\gamma/\rho})^{1/\gamma}$

を，制約条件(a. 2)，(a. 3)と所与の s_1R_2 のもとで最大にすることによって，c_2 とそれに対応する V_2 を s_1R_2 の関数として得る。次に，そのようにして得た V_2 を用いて

(30)　$V_1 = F[c_1,\ E_1(V_2{}^{\rho})^{1/\rho}]$

を制約条件(a. 1)のもとで c_1 に関して最大にすることになる。したがって，この場合には，時間的な整合性が保たれることになる。

なお，計画期間が2期間の場合には，(28)式は $V_2 = c_2$ として，

(31)　$V_1 = (c_1{}^{\gamma} + \beta E_t(c_2{}^{\rho})^{\gamma/\rho}))^{1/\gamma}$

となり，これを本文(9)式の制約のもとで最大にすれば，同じ制約のもとで本文(16)式を最大にする場合と同じ結果を得ることを確かめることが出来る。

参考文献

Azariadis, Costas (1993), *Intertemporal Macroeconomics*, Blackwell.

Epstein, Larry G. & Stanley E. Zin (1989), "Substitution, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Consumption and Asset Returns: A Theoretical Framework", *Econometrica*, July, vol. 57, pp. 937-69.

____ & ____ (1991), "Substitution, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Consumption and Asset Returns : An Empirical Analysis", *Journal of Political Economy*, April, vol. 99, no. 2, pp. 263-286.

Mutoh, Takahiro (1995), "Overlapping Generations Model, Investment Function and Dynamic Efficiency of Resource Allocation", *Japanese Economic Review*, December, vol. 46, no. 4, pp. 358-366.

Weil, Philippe (1990), "Nonexpected Utility in Macroeconomics", *Quarterly Journal of Economics*, February, vol. 105, no. 1, pp. 29-42.

---

7) Weil (1990) は

$$V_t = F[c_t,\ E_t(V_{t+1})]$$

の形の関数を想定し，

$$V_t = \frac{((1-\beta)c_t{}^{\gamma} + \beta(1+(1-\beta)\rho E(V_{t+1}))^{\gamma/\rho})^{\rho/\gamma} - 1}{(1-\beta)\rho}$$

を指定している。しかし，彼自身が指摘している通り，

$$v_t = (1+(1-\beta)\rho V_t)^{1/\rho}(1-\beta)^{-1/\gamma}$$

とおけば（上式で v_t は V_t の増加関数であることに注意)，(28)式と同型の

$$v_t = (c_t{}^{\gamma} + \beta E_t(v_{t+1}{}^{\rho})^{\gamma/\rho})^{1/\gamma}$$

を得ることを証明できる。なお，Weilが(28)式で $\rho\to0$ や $\gamma\to0$ の極限を考えることが出来ないと述べているのは誤まりである。

8) 事実，最終期には(28)式右辺(　)内第2項が無視され，$V_3 = (c_3{}^{\gamma})^{1/\gamma} = c_3$ とするのが妥当であろう。