基礎科目・近代経済学（ミクロⅠ）(講義資料)

効用関数を巡る練習問題

瀬　岡　吉　彦

先だっての教授会で，経済学部で開講されている専門課程の講義の昨年度及び一昨年度の合格率が公表されました。予想したように，合格率の値は講義によってさまざまなのですが，私の担当する近代経済学（ミクロⅠ）は格段に低く，いわゆる「最難関科目」に属しています。

この原因の一つはもちろん私の教育方法のまずさにあり，大いに反省していますが，もう一つの原因は，学生諸君の多くは，暗記は得意だとしても，応用にはいま一つ弱いという点にあるのではないかと思います。と言うのも，私の試験は中間，期末とも，教科書，ノートは言うに及ばず，何でも持ち込みができ，その代わりに，教科書に出ている問題や授業で行った練習問題を，そのままでなく少々，もしくはかなり「ひねって」出題しているからです。もっとも，答案の中には80点を超えるどころか，100点に近いのが数枚あり，このことは私の教育方法が絶対的にはまずくはないことを示すとともに，学生諸君の中でもかなりの応用能力を持つ人がいることを示しています。

しかし，それにしても合格率は低すぎるので，今回は，これをせめて「やや難関科目」の水準にまで高めるために，昨年度の出題の一部について解説及び解答を示したいと思います。但し，解説は要点のみで非常に簡略されているので，分かり難い点は教科書や参考書で研究して下さい。なお，以下では問題の形式を実際の出題から少々変更しています。詳細については，前期の経済学雑誌別冊を参照して下さい。

問題 1

「効用関数を

(1.1)　$U=x_1x_2$

とする。ただし，x_1 と x_2 はそれぞれ第1財と第2財の消費量である。この効用関数から第1財と第2財に対する需要関数を求めなさい。必要な記号は各自で工夫しなさい。」(Ⅱ部，問2(i))

解答

第1財と第2財の価格をそれぞれ p_1 と p_2，家計の所得を y とする。そのとき，家計の予算制約は

(1.2)　$y=p_1x_1+p_1x_2$

で表される。(1.2)式の制約の下で(1.1)式の U を最大にする。

効用関数(1.1)式から得られる無差別曲線に対する接線の傾きは

(1.3)　$dx_2/dx_1=-x_2/x_1$

他方，(1.2)式から得られる予算制約線の傾きは $-p_1/p_2$ である。最適点ではこの両者は等しくなければならないから

(1.4)　$x_2/x_1=p_1/p_2$

が成立する。(1.2)式と(1.4)式からなる連立方程式を解くと

(1.5)　$x_1=(1/2)(y/p_1)$

(1.6)　$x_2=(1/2)(y/p_2)$

が得られる。(1.5)式と(1.6)式がそれぞれ第1財と第2財に関するこの家計の需要関数である。

解説

もっとも標準的な問題で，その意味と解法をしっかりと理解することが重要です。

経済には非常に多くの種類の財がありますが，説明を簡単にするために，問題のように経済に2種類の財，第1財と第2財だけが存在するとします。そのとき，効用関数は一般に

(1.7)　$U=U[x_1, x_2]$

のように書くことが出来ます。そして通常は，x_1 と x_2 の増加関数であると仮定されます。

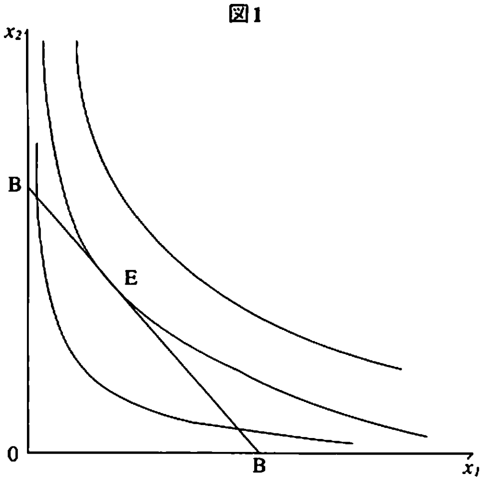
効用 U をある水準 $\bar{U}$ に固定して，

$$\bar{U}=U[x_1, x_2]$$

で表される x_1 と x_2 との関係を「効用無差別曲線」あるいは単に「無差別曲線」と呼びます。これを (x_1, x_2) 平面に描くとき，関数 $U[x_1, x_2]$ の上述の性質から右下がりになります。実際，この問題の効用関数(1.1)も，その無差別曲線は，図1に見られるように，右下がりの曲線になります。そして，$\bar{U}$ がいろいろな値をとると，それにしたがって無差別曲線がいろいろな位置で描かれることになります。これを無差別曲線群と呼びます。明らかに，効用が高いほど，それに対応する無差別曲線は上方にあります。

他方，家計は自己の所得を第1財と第2財を

図1



購入するために支出するとします。(1.2)式の予算制約式はそのことを表しています。家計にとっては，p_1, p_2 は市場で与えられたものであり，また当面，所得 y も与えられているとすると，(1.2)式は図1の直線 BB のような予算制約線として描かれることになります。

家計にとっては，直線BB上（及びそれより下の領域）の全ての点が実現可能ですが，そのような実現可能な点の中，効用を最大にする点は，明らかに無差別曲線群の中，予算制約線と接する無差別曲線を見つけだし，その接点の座標を求めることによって得られます。図1ではそのような点はE点で示されています。

E点では無差別曲線の接線の傾き（その絶対値は第1財の第2財に対する限界代替率と呼びます）と予算制約線の傾き（その絶対値は第1財の第2財に対する相対価格と呼びます）が等しくなります（したがって，限界代替率が相対価格と等しくなります)。このことが(1.4)式で示されています。そして，これと(1.2)式とで成り立つ連立方程式の解を求めることによって，E点の座標を求めることが出来ます（ある財の需要関数には，ある家計のその財に対する需要関数と経済全体のその財に対する需要関数がありますが，ここでは前者の意味でとることにします)。

もっとも，(1.1)式を(1.2)式のもとで最大にする x_1 と x_2 を求める数学的方法は，上述の他にもいろいろあります。そして単に問題1を解くだけであれば，そのうちのどれを用いてもかまいません。諸君のお気に入りの方法で試して下さい。

応用問題

「(1.1)の代わりに

(1.1)′　$U=x_1^{\alpha}x_2^{\beta}$

(ただし，$\alpha>0$, $\beta>0$) とおいて，問題1を解きなさい。」

問題 2

「効用関数を

(2.1)　$U=x_1+x_2$

とする。ただし，x_1 と x_2 はそれぞれ第 1 財と第 2 財の消費量である。

(i)　効用関数(2.1)は，通常の経済学で使われる基準を満たしていない。その理由を説明しなさい。

(ii)　前問(i)に注意して効用関数(2.1)のもとで x_1 財と x_2 財に対する需要関数を求めなさい。必要な記号は各自で工夫しなさい。」(I 部，問 1 (i)，(ii))

解答

(i)　通常の経済学での効用関数は，その無差別曲線が原点に対して凸の性質を持つと仮定されている。ところが，効用関数(2.1)で示される無差別曲線は図 2 の A_1B_1 等で示されるような直線で，この性質を満たしていない。

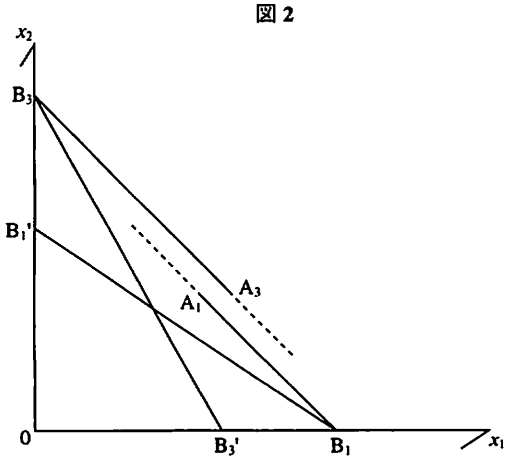
(ii)　第1財と第2財の価格をそれぞれ p_1 と p_2 とし，家計の所得を y とすると，予算制約線(図 2 のB_1B_1' 等) は

(2.2)　$y=p_1x_1+p_2x_2$

で表され，次の 3 つの場合のそれぞれに相当する需要関数が存在することになる。

(i)　$p_1<p_2$ のとき

図 2



$x_1=y/p_1$, $x_2=0$ (図 2 の B_1点)

(ii)　$p_1=p_2$ のとき，

x_1 と x_2 は $p_1x_1+p_2x_2=y$ を満足する任意の非負の値。

(iii)　$p_1>p_2$ のとき，

$x_1=0$, $x_2=y/p_2$ (図 2 の B_3点)

解説

問題 1 の解説で効用関数(1.7)は通常は x_1 と x_2 とに関して増加関数である性質を持つと述べましたが，実はもう一つ重要な性質が仮定されています。それは，2 つの異なる財の組合せ (x_{11}, x_{21}) と (x_{12}, x_{22}) に関して

(2.3)　$U[\alpha x_{11}+(1-\alpha)x_{21}, \alpha x_{12}+(1-\alpha)x_{22}]$
$\qquad >\alpha U[x_{11}, x_{21}]+(1-\alpha)U[x_{12}, x_{22}]$

が，$0<\alpha<1$ を満足する任意の α に関して成立していることです。これを「関数U[.]は凹の性質を持つ」といいます。(2.3)式の意味は 2 つの財の組合せを別々に消費するときの効用の平均よりも 2 つの財の組合せの平均を消費するときの効用の方が高いということです。

(2.3)式を満足する効用関数に対応する無差別曲線を描き，その上に任意の異なる 2 点を取ると，その 2 点を結ぶ線分上の点は全てその無差別曲線の上方にあります（理由を考えて下さい)。つまり，無差別曲線は原点に対して凸になります。実は，図 1 で見るように，問題 1 の効用関数(1.1)はこのような性質を満足しています。そのとき，後述する特別な場合を除いて，最適点は予算制約線上の内点にあります。

ところが，(2.1)式のような効用関数の場合には，この性質が失われ，その場合には特別な場合を除いて，最適点は予算制約線の端点に存在することになります。

もっとも，効用関数が凹であっても，x_1 の x_2 に対する限界代替率が，$x_1=0$ や $x_2=0$ のとき，有限の正の値をとり，かつ極端に高いあるいは低い相対価格 (p_1/p_2) が与えられるときには，端点解が得られる場合があります。自分で

確かめてください。

応用問題

「効用関数を

(2.1)′　$U=x_1^{\alpha}+x_2^{\alpha}$

とする。

(i)　$0<\alpha<1$ のとき，(2.1)′ に対応する需要関数を求めなさい。

(ii)　$\alpha>1$ のとき，(2.1)式の代わりに(2.1)′式を用いて問題２を解きなさい。」

問題 3

「経済の全ての家計が(1.1)式の効用関数を持つとする。そのとき，一般均衡論の観点から，第１財と第２財との相対価格を決定しなさい。ただし，経済には第１財と第２財の２財のみが存在し，その総供給量 $\overline{X}_1$ と $\overline{X}_2$ はともに正で所与とする。」（Ⅱ部，問２(ii)）

解答

家計 i の第１財と第２財に対する需要を x_1^i と x_2^i とし，所得を y^i とすると，(1.5)，(1.6)より，

(3.1)　$x_1^i=(1/2)(y^i/p_1)$

(3.2)　$x_2^i=(1/2)(y^i/p_2)$

が全ての家計 i について成立する。ここで y^i は各家計が保有する財を $\overline{x}_1^i$，$\overline{x}_2^i$ とすると

(3.3)　$y^i=p_1\overline{x}_1^i+p_2\overline{x}_2^i$

で与えられる。いま，$\sum_i x_1^i=X_1$（第１財に対する総需要）とおき，また $\sum_i \overline{x}_1^i=\overline{X}_1$，$\sum_i \overline{x}_2^i=\overline{X}_2$ であることを利用すると，(3.1)より

(3.4)　$X_1=(1/2)(p_1\overline{X}_1+p_2\overline{X}_2)/p_1$

を得る。しかるに経済全体では各財に対する総需要と総供給は等しいから，$X_1=\overline{X}_1$。これを(3.4)に代入して整理すると

(3.5)　$p_1/p_2=\overline{X}_2/\overline{X}_1$

を得る。

別解

(1.4)式，すなわち

$$p_1/p_2=x_2^i/x_1^i$$

が全ての家計iにおいて成立する。そのとき，「合比の理」によって

(3.6)　$p_1/p_2=\Sigma_i x_2^i/\Sigma_i x_1^i\equiv X_2/X_1$

が成立する。また経済全体では，各財について需要と供給は等しいから，$X_1=\overline{X}_1$ 及び $X_2=\overline{X}_2$ が成立する。したがって，

(3.7)　$p_1/p_2=\overline{X}_2/\overline{X}_1$

を得る。

解説

個々の家計のレベルでは財の価格は与えられたものですが，それは経済全体で総需要と総供給が等しくなるように決定されます。

もっともこの場合に決定される価格は，後の問題４にも関係しますが，p_1 や p_2（リンゴ１個100円，ミカン１個50円という価格）ではなく，そのような価格（絶対価格）の相対比，すなわち相対価格のみなのです。実際，(3.1)から導出された(3.4)を用いる代わりに，(3.2)から導出した

(3.8)　$X_2=(1/2)(p_1\overline{X}_1+p_2\overline{X}_2)/p_2$

を用いても同じ答えを得るだけです。

絶対価格を決定するためには，「貨幣」を特別な種類の財としてモデルに導入することが必要になります。ここでの第１財と第２財は「通常の」消費財であって，貨幣ではありません。換言すれば，我々が問題にしている経済では，リンゴ１個が100円であれば，それと１：２で交換されるミカンは１個50円となり，２：１で交換されるナシは200円となるというように単に財の価値の計算尺度の機能を果たしているに過ぎないのです。

応用問題

問題３の効用関数を

(i)　(1.1)′式に取り替えたとき，

(ii)　(2.1)′式に取り替えたとき，

の相対価格を求めなさい。

問題 4

「x_1^i と x_2^i をそれぞれ第1財と第2財に対する家計 i の需要，p_1 と p_2 をそれぞれ第1財と第2財の絶対価格とする。経済には第1財と第2財のみが存在するとする。

通常の基準を満たす一般的な効用関数の下で，次の問に答えなさい。

(i) p_1 と p_2 が同一の率で低下するとき，x_1^i と x_2^i はどのように変化するか，部分均衡論の観点から説明しなさい。

(ii) p_1 が低下するとき，p_2 は同一の率で低下することを一般均衡論の観点から証明しなさい。ただし，第1財と第2財の供給量はともに正で所与とする。」（I部，問2）

解答

(i) 効用関数が通常の基準を満たすので（特別な場合を除いて），最適点は予算制約線上の内点にあると考えてよい。家計 i の所得を y^i とすると，予算制約線は

(4.1) $y^i=p_1x_1^i+p_2x_2^i$

で与えられる。このとき，y^i を所与とすると，p_1 と p_2 との比例的な下落は予算制約線を上方に平行移動させる。ところが，このことは，p_1 と p_2 とが不変で y^i のみが上昇する場合と全く同一である。

したがって，

(a) 第1財と第2財がともに正常財のときには，両財の需要はともに増加する。

(b) 第1財と第2財の中，いずれかが劣等財であれば，そのような財の需要は減少するが，他の財の需要は増加する。

なお，第1財と第2財の需要がともに減少することはあり得ない。

(ii) 家計 i の第1財と第2財の賦存量をそれぞれ $\overline{x}_1^i$ と $\overline{x}_2^i$ とすると，その所得は

(4.2) $y^i=p_1\overline{x}_1^i+p_2\overline{x}_2^i$

で表される。したがって，家計 i は効用関数を制約条件

$$(p_1/p_2)\,\overline{x}_1^i+\overline{x}_2^i=(p_1/p_2)x_1^i+x_2^i$$

のもとで最大にすることになる。このとき x_1^i の最適解は p_1/p_2，$\overline{x}_1^i$，$\overline{x}_2^i$ のみの関数になり，したがって，経済全体で総供給＝総需要によって，つまり

(4.3) $\sum_{i=1}^n x_1^i=\sum_{i=1}^n \overline{x}_1^i$

によって決定されるのは p_1/p_2 である。それ故，各家計の賦存量が所与である限り，p_1 と p_2 は比例的な関係を維持せざるを得ない。

解説

この問題における部分均衡と一般均衡との差異は，家計の貨幣表示の所得が外生変数であるかどうかにあると考えてよいでしょう。すなわち，部分均衡分析では y^i は一定と考えられるので，p_1 と p_2 の同率での低下は，その率での「実質所得」の増加と考えることが出来るわけです。

ところが問題3の解説でも述べたように，一般均衡分析では，y^i は内生変数となり，相対価格が（しかも絶対価格ではなく相対価格のみが）決定されることになります。このとき，各財の賦存量とその各家計への配分が変わらない限り，絶対価格の変化は，相対価格を始め，経済の実質的な関係に何の影響も与えないことになります。

応用問題

経済に n 個の家計と m 個の財が存在するとする（$m\geqq 2$, $n\geqq 2$）。そのとき，

(i) ある家計iについて(4.1)式と(4.2)式に相当する式を，それぞれ(4.1)′式と(4.2)′式として書きなさい。

(ii) 需要と供給の均等は，それが $m-1$ 個の財で成立すれば，残りの1財については必ず成立することを，(4.1)′式と(4.2)′式を用いて証明しなさい（「ワルラス法則」）。