ZDD を用いた小地域単位の避難所割当案の高速列挙・抽出手法

瀧澤 重志 [1)]

1) 大阪市立大学　大学院工学研究科 e-mail: takizawa@arch.eng.osaka-cu.ac.jp

大規模災害が発生した際にどこに避難すればよいのかがわからない住民が多いことが，東日本大震災で明らかになり，避難所の地域への割当は現在重要な課題となっている．本研究では，各小地域を避難所に割り当てる問題を定式化し，いくつかの制約を満たす全ての割当を Zero-suppressed Binary Decision Diagram (ZDD)[1)]で全列挙し，移動距離と収容率に関するパレート解の中の全てのサポート解だけを高速に抽出する方法を提案する．

Key words: 避難所割当，小地域，ZDD，列挙，パレート解

1. はじめに

大規模災害が発生した際にどこに避難すればよいのかがわからない住民が多いことが，東日本大震災で明らかになり，避難所の地域への割当が重要な課題となっている．仮に最寄りの避難所に地域を割り当てた場合，人口や避難所の空間分布が一様ではなく，特定の避難所に避難者が集中する可能性があるため，避難者の平準化も考慮する必要がある．避難所を地域に割り当てる数理的な問題は集合分割問題などに属するが，先に述べた制約や割り当てられた地域のまとまりを確保しながら厳密解を求めるのは困難である．

既報 [2)]では，地域を正方形メッシュ分割した上で，分割案を各領域が矩形和楕円形領域という凸形状の制約を付加した上で，逆探索と ZDD で全列挙する方法を提案した．本報では，不整形な小地域単位で各小地域を避難所に割り当てる問題を定式化し，制約を満たす全ての割当を ZDD で全列挙する方法を提案する．さらに，無数の列挙案の中から，移動距離と収容率に関するパレート解を高速に抽出する方法も提案する．

地域を分割する問題は避難所だけでなく，選挙区 [3)]や小学校区 [4)]などでも研究されている．これらの問題は一般的な整数計画問題の枠組みで定式化されて解かれることが多い．近年は数理計画ソルバーの性能向上が著しいが，本研究で示すような空間的に複雑な制約条件が存在した上で解の組合せが多い場合，求解までの時間が長くかかる可能性がある．また，本研究のように多目的最適化を直接解くわけではないので，代替案を一度に全て求めることができない．また近年，本研究と似た容量制約のあるサービス施設の地域割当問題を，ネットワークボロノイ図によって求める解法が提案されている [5)]．この方法では確かに割当られた地域のまとまりを確保できるが，近似解法であり，さらに代替案を得ることも難しい．これらに対して本研究では，列挙アプローチにより，複雑な制約を満たす膨大な割当を全て高速に列挙・抽出する手法を提案する点で，既往研究とは方法が大きく異なっている．なお，本研究は既報 [6)]の内容を元に，問題設定や解法を発展させたものである．

2. 問題設定

(1) 問題の定義

図 1 に示すような小地域のポリゴンで構成される対象地域全体を R，各小地域を r∈R と表す．小地域を区別する際には，$R=\{r_1,\dots,r_{|R|}\}$ と r にインデクスを付けて表記する．本研究では収容避難所を想定し，避難所の点の集合を E，各避難所を $e\in E$ と表す．避難所 e を含む小地域を r_e と表す．反対に，r に含まれる避難所の集合を$E_r\subseteq E$ と表す．二つ以上の異なる避難所が同じ小地域に属する場合があるが，その場合

は E_r の中から任意の一つの避難所を選んで記号表現上代表させる．そうして小地域と避難所を一対一対応させた避難所の集合を $E' \subseteq E$ と表す．避難所を区別する際には，$E' = \{e'_1, \ldots, e'_{|E'|}\}$ とインデクスを付けて表す．また，各小地域の想定避難者数を p_r，避難所 e の収容者数を c_e とする．複数の避難所が小地域に存在する場合があるので，小地域単位で収容者の和を求め $cs_{r_{e'}}$ とおくと，$cs_{r_{e'}} = \sum_{e \in E_{r_{e'}}} c_e$ となる．

図 1：空間構成要素の説明：緑の丸=避難所，白いポリゴン=避難所を含まない小地域，グレーのポリゴン=避難所を含む小地域

次に，各小地域とそこの住人が避難する先の避難所を対応づける．避難所 $e' \in E'$ が被覆する小地域の集合のうち，(2) の条件を満たす実行可能な組み合わせの集合を $\mathcal{R}_{e'}$ と表し，その一つの組み合わせを $R_{e'} \in \mathcal{R}_{e'}$ と表す．各 $e' \in E'$ について $R_{e'}$ を求めて組み合わせたものが，

$$\bigcup_{e' \in E'} R_{e'} = R, R_{e'} \cap R_{f'} = \emptyset \; (f' \in E', e' \neq f') \quad \text{(C1)}$$

を満たすとき，その組み合わせは，厳密被覆（Exact Cover）と呼ばれる．

(2) 制約条件

現実的な避難所割り当てを行うために，(C1)に加えて，以下の制約を導入する．

a) 避難所を含む小地域の割当

避難所を含む小地域の住人は原則その避難所に逃げるものとする．すなわち以下の制約が満たされる必要がある．

$$r_e \in R_e \quad \text{(C2)}$$

b) 小地域の包含関係

小地域のまとまりを考慮し，同じ避難所に被覆される各小地域が連結し，さらに異なる避難所へ向かう避難者の動線が交差しないよう，小地域の包含関係を定義する．図 2 に示すように，避難所 e_1 を含む小地域 r_3 が小地域 r_1 を被覆しようとしている状況だとする．もし $r_1 \in R_{e_1}$ が成立する場合，以下の条件により $r_2 \in R_{e_1}$ となっている必要がある．同図において，小地域 r に含まれる交差点の集合を V_r，各交差点を $v \in V_r$ とする．また，対象地域内の道路の集合を A と表す．避難者は各交差点を起点として避難所へ逃げることとする．小地域内の避難者 p_r は，各交差点を母点とするボロノイ領域の面積に比例して按分されるものとし，それら交差点上の避難者数 pv_v とする．各 v から e までの避難経路を最短路と仮定し，その経路を構成する道路集合を $PT_v^e \subset A$ とおく．図 2 の青色の実線は，v から e への最短路の例である．また，経路 PT_v^e が通過する小地域の集合を $RP(PT_v^e) \subset R$ とおき，それらの小地域 $r' \in RP(PT_v^e)$ に経路の起点 v の避難者数 pv_v を加算し，通過人口の変数を $pp_{r'}^e$ として保存する．小地域内の各交差点から避難所 e への避難経路を求め上記の計算を行うと，$pp_{r'}^e = \sum_{v \in V_r} pv_v \cdot op(r', v, e)$ となる．ここで，

$$op(r', v, e) = \begin{cases} 1, & \text{if } r' \in RP(PT_v^e) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

である．小地域内に複数の避難所が存在する場合があることを考慮し，$pp_{r'}^e$ を避難所の収容者数に比例させて按分したもの，すなわち，$pp_{r'} = \sum_{e \in E_r} pp_{r'}^e \cdot c_e / cs_r$ を通過避難者数とする．

以上の準備により，もし $r \in R_e$ となる場合，$minp$をパラメータとして，$pp_{r'}/p_r \geq min\_p$ を満たす他の全ての小地域 $r' \in RP(PT_v^e), v \in V_r$ についても $r' \in R_e$ となる必要がある(C3)．r が $r_{e'}$ に含まれる際に，(C3)が満たされるために必要な小地域の集合を $D_r^{e'} \subset R$ とおく．

c) 他の避難所を含む小地域の横断禁止

図 2 において，避難所 e_2 を含む小地域 r_4 が小地域 r_1 を被覆しようとしている状況だとする．例えば同

図において v から e_2 への最短経路が，他の避難所がある r_3 を横断している．このように，他の避難所を含む小地域を横断する経路を通る避難者が一定数以上ある場合，すなわち $pp_{r'}/p_r \geq min\_p$ を満たす小地域 $r' \in RP(PT_v^e)$，$v \in V_r$ が一つでもある割当は禁止される(C4).

d) 最長移動距離と最大収容率

max_dist と max_cap をパラメータとする．もし $r \in R_{e'}$ が成立する場合，$v \in V_r$ の経路 $PT_v^{e'}$ の平均距離を $d_r^{e'}$ とすると，$d_r^{e'} \leq max\_dist$ 以下となっている必要がある(C5)．また，避難所のキャパシティの和も，避難者数の合計のある範囲に収まっている必要がある．すなわち，$\sum_{r\in R_{e'}} p_r/cs_{r_{e'}} \leq max\_cap$ が成立している必要がある(C6).

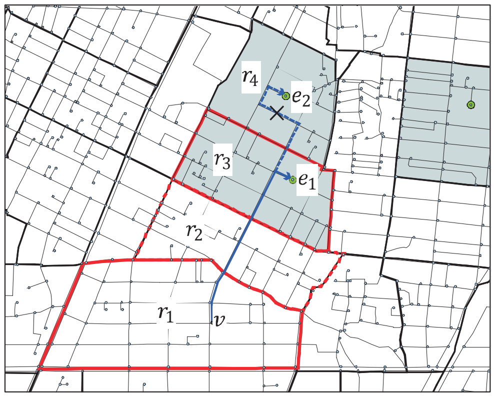

図 2：小地域の包含関係の説明：細線は道路のエッジ，グレーの〇は交差点を示す.

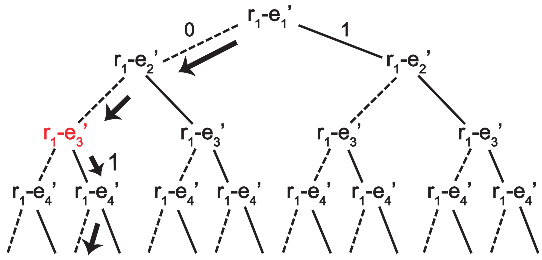

図 3：2 分木による割当の表現例

3. 解法

(1) ZDD による割当の表現

避難所を含む小地域は $|E'|$ 個ある．各小地域からみれば，(C1)よりどれか一つの避難所を含む小地域に被覆される必要がある．これは $|E'|$ 次元の 0-1 ベクトルで表現できる．例えば，e'_3 を含む小地域に r_1 が含まれるときは (0,0,1,…,0)と表現される．小地域は全部で $|R|$ 個あるので，全ての小地域の被覆は $|E'| \times |R| = n$ 次元のベクトルで表現される．このベクトルを $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ とおき，その集合 X を ZDD で表現・保持する．図 3 は，このベクトルを 2 分木で表現した例である．この場合先に述べた，r_1 が e'_3 を含む小地域に含まれることを示している．ZDD はこのような 2 分木を圧縮して保持したものである．

(2) 避難所毎の被覆範囲の列挙

まず，避難所 $e' \in E'$ を含む小地域が被覆する小領域の組み合わせを列挙して ZDD として保存する．そのアルゴリズムを本稿末尾の Algorithm 1 に示す．Z，$Z_{e'}$ は ZDD 変数，ZDD(m) は引数の集合（の要素）m を ZDD に変換して返す関数，Card()は当該 ZDD の組み合わせ数を返す関数，Restrict(z) は当該の ZDD の組み合わせ集合の中で，引数 z の中の少なくとも 1 つの組合せを包含している組合せだけの ZDD を返す関数，OnSet(m) は当該 ZDD において，集合要素 m を含む組合せからなる部分集合の ZDD を返す関数である．2～12 行目では，制約(C2), (C4), (C5)を満たす個別の領域を ZDD に保存し，14～17 行目でそれらの組み合わせ集合を ZDD の直積演算により求める．その組み合わせ集合から 18～25 行目で(C3)を，26～28 行目で(C4)を満たすものだけとし，さらに 29～33 行目で(C6)を満たすものだけにしている．

(3) 全避難所の被覆の組み合わせの列挙

ZDD を用いて割り当てを列挙するアルゴリズムを本稿末尾の Algorithm 2 に示す．$Z_{E'}$ は地域全体の割り当ての集合を保存する ZDD を示す．基本的には各 $Z_{e'}$ の直積演算により全ての組み合わせを構成する（7 行）．しかし直積演算だけでは(C1)を満たさない場合が出てくる．一つ目のケースは，ある小地域に異なる二つ以上の避難所が割り当てられる場合である．この場合は，各小地域に異なる二つの避難所が割り当てられるパタンを全列挙した ZDD 変数の ZO を用意し，Restrict 関数によってそれらを排除する（8 行）．さらに，小地域がどの避難所にも被覆されない場合が起こりうるが，その場合は r がどこか一つの避難所に被覆されるパタンを列挙した ZDD 変数の ZS_r を用意し，Restrict 関数によりそれ以外の組み合わせを排除する（12 行）．

(4) パレート解の抽出

アルゴリズムを実行すると多数の解が列挙される．しかし短い移動距離と少ない収容率を満たす被覆だけ

が必要であり，それらは両目的関数に関するパレート最適解になっている．パレート最適解は，凸包の頂点となっているサポート解とそれ以外の非サポート解に分けられるが，本研究では，サポート解を高速に列挙する方法を提案する．

ある被覆 x に対する平均移動距離と平均収容率に関する目的関数を，それぞれ $o_1(x)$ と $o_2(x)$ とする．以下において $x_r^{e'} \in x$ は，r が e' に被覆されている場合 1 を，そうでない場合 0 となる．また，$s_r^{e'} = p_r / cs_{r_{e'}}$ とする．

$$o_1(x) = \frac{1}{|R|} \sum_{r \in R} \sum_{e' \in E'} x_r^{e'} \cdot d_r^{e'} \tag{1}$$

$$o_2(x) = \frac{1}{|E'|} \sum_{r \in R} \sum_{e' \in E'} x_r^{e'} \cdot s_r^{e'} \tag{2}$$

次に以下の目的関数の重み $\lambda \in [0,1]$ に関する，パラメトリックな線形計画問題を定義する．この問題は 2 目的最適化問題なので，目的関数の値をそれぞれ max_o_1, max_o_2 の値で[0,1]にスケーリングする．max_o_1，max_o_2はそれぞれ，(3)の括弧内を$o_2(x)$，$o_1(x)$ の単目的最適化問題として解いた解の，$o_1(x)$，$o_2(x)$ の値である．$\mathrm{Exist}(x)$ は，Algorithm 1,2 を適用して得られた当該被覆集合の中で，組み合わせが x となるものが存在する場合に 1 を，そうでなければ 0 を返す．このような制約が付いた線形計画問題を Boole 線形計画問題と呼び，Knuth による ZDD を用いた効率的な解法（Algorithm B）[7]を利用して解くことができる．

$$\begin{aligned} &\min_{x \in X} \left\{ \lambda \frac{o_1(x)}{max\_o_1} + (1-\lambda) \frac{o_2(x)}{max\_o_2} \right\} \\ &\mathrm{s.t.}\ Z_{e'}.\mathrm{Exist}(x) = 1 \end{aligned} \tag{3}$$

重みの決定に hand probing oracle を使い，サポート解の数だけ問題(3)を解くことで，効率的にサポート解を全て求めることができる[8]．この解法を本稿末尾の Algorithm 3 に示す．ここで，ベクトル x の各要素に対応する重みの実数値ベクトルを $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$とし，その要素を $w_r^{e'} \in w$でも参照できるものとする．$sum = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_n x_n$ はベクトルの重み付き和であるが，本稿末尾の Search 関数の 6 行目のように重みを設定することで，問題(3)の目的関数の値は sum と等しくなる．

また，$x1, x2, x3 \in X$，$sol \subset X$である． Choose_Best$(-w)$は，前述した Algorithm B を利用して，当該 ZDD において，重みが引数で与えられる際の sum を最大化する x を返す ZDD の関数である．w にマイナスが付いているのは，この関数が最大化問題で実装されているためである．

4. 計算例

大阪市住吉区の平成 22 年度国勢調査の小地域統計と，全国デジタル道路地図のデータを用いた．小地域は 104 個，収容避難所は 38 箇所（2010 年 4 月現在），避難所を含む小地域は 31 地域である．プログラムは C++で作成し，ZDD のライブラリには Graphillion[9]を用いた．$min\_p = 0.49$，$max\_dist = 1200\mathrm{m}$，$max\_cap = 8.1$ とし，標準的なスペックのノート PC（OS: Windows 7 64Bit, CPU: Core i7-2640M, Memory: 8GB）を使い計算を行った結果，1 兆 2000 億を超える案を得た．計算時間はデータの前処理に約 9 秒，Algorithm 1,2 と Algorithm 3 でそれぞれ約 1 秒，使用メモリは約 200MB であった．サポート解は 23 個抽出された．

抽出されたサポート解の散布図を図 4 に示す．横軸は(1)，縦軸は(2)の目的関数のプロットである．パレート解のうち，本アルゴリズムで抽出されるのはサポー

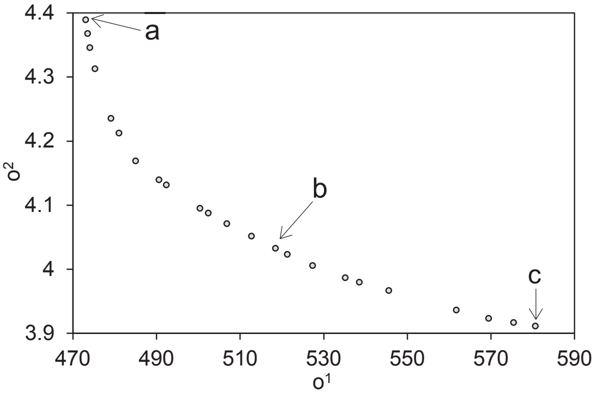

図 4：抽出された全てのサポート解

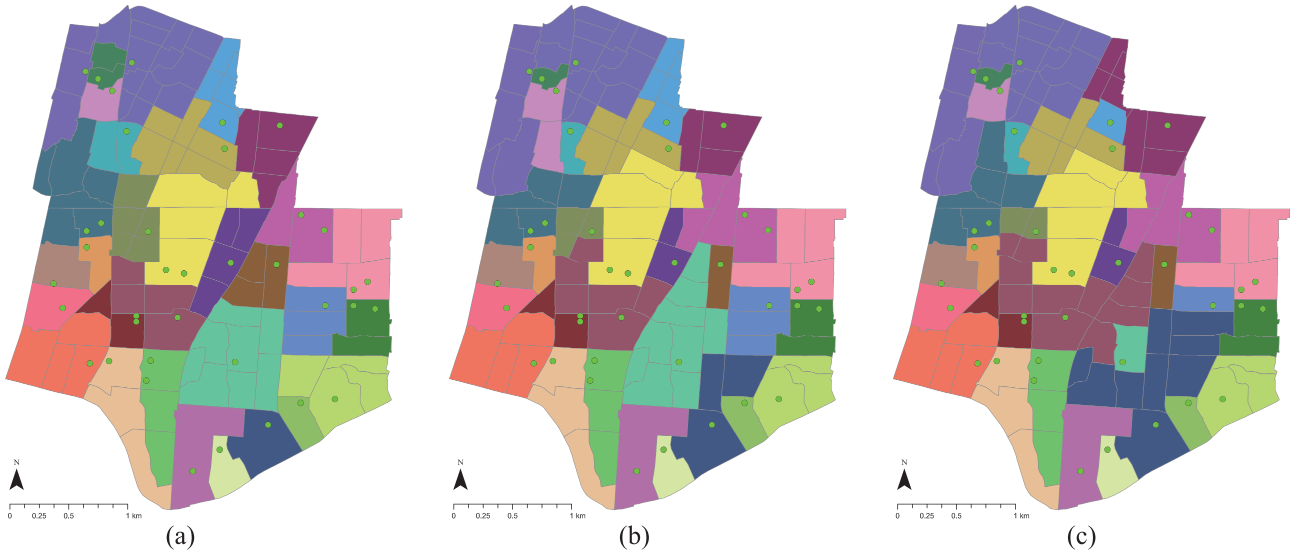

図 5：提案手法によるサポート解の割当結果の例

ト解だけだが，それらは比較的均等に分布しており，偏り無く代替案を選ぶことが可能である．平均移動距離は長くとも 580m 程度であった．**図 4** のサポート解の中で，(a)，(b)，(c)の割当の状況を**図 5** に示す．(a)は平均移動距離が最も短い割当，(c)は平均収容率が最も小さい割当，(b)はその中間である．概ね各地域の割当には大きな変化がないが，例外的に中央やや右下の地区は平均収容率の低下とともに割り当てられる小地域の数も少なくなっており，この地域の避難所のキャパシティ不足が示唆される結果となっている．

5. まとめ

本研究では ZDD を用いた小地域単位の避難所割当・抽出手法を提案し，短時間で現実的な避難所割当を，サポート解の集合として得られる事を示した．今後の手法上の課題としては，一般的な整数計画問題による解法との速度比較や，非サポート解の完全列挙などがあげられる．

謝辞

本研究は東京大学 CSIS の共同研究制度，科研費基盤研究(A)，CREST の援助の下で行われました．

参考文献

1) S. Minato, Zero-Suppressed BDDs for set manipulation in combinatorial problems, Proc. of the Design Automation Conference, 272-277, (1993)

2) A. Takizawa, et al., Enumeration of Region Partitioning for Evacuation Planning Based on ZDD, The 11th International Symposium on Operations Research and its Applications in engineering, technology and management (ISORA 2013), Yellow Mountain, China, pp.64-71, (2013)

3) 根本俊男，堀田敬介，区割画定問題のモデル化と最適区割の導出，オペレーションズ・リサーチ，48-3, pp.50-56,（2003)

4) 富永 隆，貞広 幸雄，GIS による学区再編の計画立案：スクールファミリー制度の導入可能性の検討，地理学評論，76(10)，　pp.743-758,（2003)

5) K. Yang, et al., Capacity-Constrained Network-Voronoi Diagram: A Summary of Results, Advances in Spatial and Temporal Databases, Lecture Notes in Computer Science, 8098, pp.56-73, (2013)

6) 中野浩太郎ほか，都市における避難所割当ての列挙と評価，日本オペレーションズリサーチ学会 2014 年

春季研究発表会， pp.224-225，(2014)

7) D. E. Knuth, The Art of Computer Programming, Volume 4A: Combinatorial Algorithms, Part 1, Addison-Wesley Professional, (2011)

8) N. Katoh: Finding an Optimal Region in One- and Two-Dimensional Arrays, IEICE transactions on information and systems E83-D(3), 438-446, 2000.

9) 井上 武ほか, graphillion, https://github.com/takemaru/graphillion, (2013)

Algorithm 1 避難所 e' を含む小地域がカバーする小領域の組み合わせの列挙

$Z \leftarrow \emptyset$; $EX \leftarrow \emptyset$
for each $r \in R$
  if (C2) is satisfied
    $Z \leftarrow Z + \mathrm{ZDD}(r)$
  else if (C5) is satisfied
    if (C4) is satisfied for all $r' \in D_r^{e'}$
      $Z \leftarrow Z + \mathrm{ZDD}(D_r^{e'})$
    else
      $EX \leftarrow EX + \{r\}$
    end if
  end if
end for
$Z_{e'} \leftarrow Z$
repeat
  $c \leftarrow Z_{e'}.\mathrm{Card}()$
  $Z_{e'} \leftarrow Z_{e'} \times Z$
until $c = Z_{e'}.\mathrm{Card}()$
for each $r \in R$
  for each $r' \in D_r^{e'}$
    $Z \leftarrow Z_{e'}.\mathrm{OnSet}(r')$
    $Z_{e'} \leftarrow Z_{e'} - Z$
    $Z \leftarrow Z.\mathrm{Restrict}(\mathrm{ZDD}(r'))$
    $Z_{e'} \leftarrow Z_{e'} + Z$
  end for
end for
for each $r' \in ex$
  $Z_{e'} \leftarrow Z_{e'} - Z_{e'}.\mathrm{OnSet}(r')$
end for
for each $ze \in Z_{e'}$
  if ze does not satisfy (C6)
    $Z_{e'} \leftarrow Z_{e'} - ze$
  end if
end for
return $Z_{e'}$

Algorithm 2 地域全体の割当の列挙

$Z_{E'} \leftarrow \emptyset$, construct ZO, $ZS_r, r \in R$
for each $e' \in E'$
  Apply Algorithm 1 to e' and obtain $Z_{e'}$ for $\mathcal{R}_{e'}$.
  if $Z_{E'} = \emptyset$
    $Z_{E'} \leftarrow Z_{e'}$
  else
    $Z_{E'} \leftarrow Z_{E'} \times Z_{e'}$
    $Z_{E'} \leftarrow Z_{E'} \setminus Z_{E'}.\mathrm{Restrict}(ZO)$
  end if
end for
for each $r \in R$
  $Z_{E'} \leftarrow Z_{E'}.\mathrm{Restrict}(ZS_r)$
end for
return $Z_{E'}$

Algorithm 3 ZDD から問題(3)のサポート解だけを全て抽出する

$x1 \leftarrow$ Solution of (3) with $\lambda = 0$
$x2 \leftarrow$ Solution of (3) with $\lambda = 1$
$sol \leftarrow \{x1\} + \{x2\}$
$\mathrm{Search}(x1, x2)$
return sol

$\mathrm{Search}(x1, x2)$

$a \leftarrow (o_2(x2) - o_2(x1))/max\_o_2$
$b \leftarrow (o_1(x1) - o_1(x2))/max\_o_1$
$\lambda \leftarrow a/(a+b)$
for each $r \in R$
  for each $e' \in E'$
    $w_r^{e'} \leftarrow \lambda \frac{d_r^{e'}}{max\_o_1} + (1-\lambda)\frac{cr_r^{e'}}{max\_o_2}$
  end for
end for
$x3 \leftarrow Z_{e'}.\mathrm{Choose\_Best}(-w)$
if $x3 \neq x1$ **and** $x3 \neq x2$
  $sol \leftarrow sol + \{x3\}$
  $\mathrm{Search}(x1, x3)$
  $\mathrm{Search}(x3, x2)$
end if