

Title	構造変化のある場合の単位根検定：理論の概観
Author	中川 満
Citation	季刊経済研究, 28 卷 1 号, p.33-57.
Issue Date	2005-06
ISSN	0387-1789
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	Publisher
Publisher	大阪市立大学経済研究会
Description	<小特集>理想的でない条件下で生成される統計データの性質と,適用可能な推定・検定法
DOI	

Placed on: Osaka City University

構造変化のある場合の単位根検定

—理論の概観—

中 川 満

1. はじめに

理想的条件の満たされない状況に置ける統計分析として90年代以降に発展した分野が、構造変化のある場合の単位根検定である。

時系列データが二次定常か否かを判定する定常性-非定常性検定は、Real Business Cycle理論の検証において決定的な役割をもつという文脈、および、定常-非定常のいずれかで回帰分析の有意性の判定が異なる共和分問題という文脈において、決定的な重要性をもつ。その定常性-非定常性検定の一つある時系列データの特性根に1が含まれているかどうかを検定する単位根検定は、定常性-非定常性検定の中で最も重要なものであり、多くの実証分析で標準的に使用される手法となっている。

その場合、時系列データの確率過程としては、(平均を示す関数+単位根を持つ過程)が想定される。このときの平均を示す関数は連続関数、とりわけ、定数、または、1次関数であることが多い。しかし、Perron (1989) は、平均関数が不連続、つまり、ある既知の1時点で一次関数の係数変化が発生している場合(これを構造変化と呼ぶ)に、単位根検定を拡張した。それ以後、この平均関数が不連続な場合における単位根検定は様々な発展を見せている。本稿では、この構造変化の存在する場合の単位根検定について理論展開を跡づける。

2. 構造変化を持つ場合の単位根検定の導入

経済時系列の多くを確定的トレンドと確率過程との合成として見た時、確率過程の特性根に単位根が存在するというNelson, Plosser (1982) の指摘以来、その存在を検定する試みが様々

な角度から行われてきた。すなわち、 $y_t (t=1, \dots, T)$ を対象とする時系列とし、

$$\begin{aligned} y_t &= m(t) + u_t \\ u_t &= (1 + \phi)u_{t-1} + \varepsilon \end{aligned} \quad (1)$$

(ε_t は平均0, 分散 σ^2 , i.i.d.)

とするとき、 $H_0: \phi = 0$ という帰無仮説が棄却できないというものである。そのトレンド関数については、Perron (1989) の論文以前は、連続かつ係数一定の時間関数（とりわけ一次関数）が想定されてきた。

しかし、Perron (1989) は、トレンド関数の係数変化の可能性を想定すると、多くの経済時系列の確率過程部分の特性根には単位根は含まれないと結論づけた。すなわち、変化点の位置は既知でトレンド関数を

$$m(t) = \begin{cases} \alpha_1 DU_{1t} + \alpha_2 DU_{2t} + \beta t & (\text{Model A}) \\ \alpha + \beta_1 t + \beta_2 (t - T_B) DU_{2t} & (\text{Model B}) \\ (\alpha_1 + \beta_1 t) DU_{1t} + (\alpha_2 + \beta_2 t) DU_{2t} & (\text{Model C}) \end{cases} \quad (2)$$

とした場合、 $H_0: \phi = 0$ がほとんどの系列で棄却されることが確認された。ただし、

$$DU_{1t} = \begin{cases} 1 & t \leq T_B \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

$$DU_{2t} = 1 - DU_{1t}$$

である。また仮定 $\frac{T_B}{T} \rightarrow \lambda$ とおく。なお、帰無仮説下（単位根過程において）でも対立仮説下でも係数変化が存在すると仮定している点に注意を要する。

その導出方法は以下の通りである¹⁾。まず、

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= (y_1, y_2, \dots, y_T)', \\ \mathbf{1} &= (\mathbf{1})_{T \times 1}, \\ \mathbf{t} &= (1, 2, \dots, T)', \\ \mathbf{du}_k &= (DU_{k1}, DU_{k2}, \dots, DU_{kT})', \\ \mathbf{tdu}_k &= (1DU_{k1}, 2DU_{k2}, \dots, TDU_{kT})' \quad (k=1, 2), \end{aligned}$$

1) 原論文では攪乱項に系列相関が存在する場合を考えているが、単純化のためにi.i.d.の仮定を維持して議論する。系列相関の存在する場合に関しては、Augmented Dickey-Fuller検定の方法を適用することにする

として,

$$Z = \begin{cases} (\mathbf{du}_1, \mathbf{du}_2, \mathbf{t}) & (\text{Model A}) \\ (\mathbf{1}, \mathbf{t}, \mathbf{tdu}_2 - T_B \mathbf{du}_2) & (\text{Model B}) \\ (\mathbf{du}_1, \mathbf{tdu}_1, \mathbf{du}_2, \mathbf{tdu}_2) & (\text{Model C}) \end{cases}$$

とする. $\hat{\mathbf{u}} = (I - Z(Z'Z)^{-1}Z')\mathbf{y}$ として, \hat{u}_i を $\mathbf{u} = (\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_T)$ によって定義する. $\hat{\phi}$ を回帰式

$$\Delta \hat{u}_i = \hat{\phi} \hat{u}_{i-1} + \hat{e}_i \quad \text{の} \quad \text{に関する最小二乗推定量とする. すなわち, } \hat{\phi} = \frac{\sum_{i=2}^T \hat{u}_i \hat{u}_{i-1}}{\sum_{i=2}^T \hat{u}_{i-1}^2} - 1 \text{ であるが,}$$

帰無仮説 $\phi = 0$ の下で, $T\hat{\phi}$, および, $\hat{\phi}$ の t 値 $t_{\hat{\phi}}$ がある確率分布に法則収束することが示された. さらに, 攪乱項が系列相関を持つ場合については, Phillips-Perron検定と Augmented Dickey-Fuller検定の適用が示唆されており, その場合の検定統計量の漸近分布は前述の $T\hat{\phi}$, $t_{\hat{\phi}}$ のそれに一致するとしている. 実際の実証分析に利用しているのは以下の Dickey-Fuller変換に基づいた検定である. L をラグ演算子とすると, (1), (2) は, Model Aでは,

$$\{(1-L) - \phi L\}(y_i - \alpha_1 DU_{1i} - \alpha_2 DU_{2i} - \beta t) = \varepsilon_i$$

となるので, $\Delta DU_{1i} = -D_i$, $DU_{2i-1} = DU_{2i} - D_i$ に注意して展開すると,

$$\Delta y_i = \phi y_{i-1} + (\beta - \phi \alpha_1) DU_{1i} + (\beta - \phi \alpha_2) DU_{2i} + (\phi + 1)(\alpha_2 - \alpha_1) D_i + \varepsilon_i$$

ただし,

$$D_i = \begin{cases} 1 & i = T_B + 1 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

となる. ここで, 各係数間の制約を考慮しない線形化を行った回帰式

$$\Delta y_i = \phi y_{i-1} + \beta_1^+ DU_{1i} + \beta_2^+ DU_{2i} + \delta^+ D_i + \varepsilon_i$$

を考えるのである. 同様な考え方で Model Cでは,

$$\Delta y_i = \phi y_{i-1} + (\alpha_1^+ + \beta_1^+ t) DU_{1i} + (\alpha_2^+ + \beta_2^+ t) DU_{2i} + \delta^+ D_i + \varepsilon_i$$

が回帰式となる. しかし, Model Bの場合, この変換を行うと

$$\begin{aligned} \Delta y_i &= \phi y_{i-1} + (\beta_1 - \phi \alpha) + \beta_2 (\phi + 1) DU_{2i} \\ &\quad - \phi \beta_1 t + (\beta_2 - \phi \beta_2)(t - T_B) DU_{2i} - \beta_2 T_B D_i + \varepsilon_i \end{aligned}$$

となるため, 厳密には Model Cと等価になる. しかし, Perron (1989) は,

$$\Delta y_i = \phi y_{i-1} + \alpha_1^+ + \beta_1^+ t + \beta_2^+ (t - T_B) DU_{2i} + \varepsilon_i$$

を使うように薦めている. このケースは, 対立仮説の下では Model Bである, 帰無仮説の下では, 制約付き Model Cとなることを想定しているものである. $T\hat{\phi}$ および $t_{\hat{\phi}}$ の漸近分布に関しては, Model A,B,Cのいずれも先ほどの回帰式 $\Delta \hat{u}_i = \hat{\phi} \hat{u}_{i-1} + \hat{e}_i$ の場合と同じであるとしている. そして, Augmented Dickey-Fuller検定を利用して, Nelson, Plosser (1982) らが「単位根が存

在する」と結論した経済時系列データの半数以上は、変化点 T_B を1929年として単位根検定を行うと、単位根が存在するという帰無仮説を棄却できないことを示したのである。この「非定常過程+構造変化のあるトレンド」の過程をDGP (Data Generating Process) にとり、構造変化を考慮しないモデルを用いて上記の単位根検定を行った場合に単位根仮説が容易に受容されてしまうと言う現象は、最近の文献ではPerron現象と呼ばれている。

3. Perron論文 (1989) 再考

Perron (1989) が与えた帰無仮説における漸近分布は極めて複雑であるが、Morimune, Nakagawa (1997) および Morimune, Nakagawa (2001) によると、Model Cの回帰式 $\Delta \hat{u}_t = \phi \hat{u}_{t-1} + \hat{e}_t$ による帰無分布は、

$$T\hat{\phi} \xrightarrow{D} \frac{\lambda \int_0^1 \tilde{B}_1(s) dB_1(s) + (1-\lambda) \int_0^1 \tilde{B}_2(s) dB_2(s) + \sqrt{\lambda(1-\lambda)} \tilde{B}_1(1) \tilde{B}_2(0) - \lambda \left\{ \tilde{B}_1(1) \right\}^2}{\lambda^2 \int_0^1 \tilde{B}_1(s)^2 ds + (1-\lambda)^2 \int_0^1 \tilde{B}_2(s)^2 ds}$$

である²⁾。ただし、 $B_1(s), B_2(s)$ は互いに独立な標準ブラウン運動、

$\tilde{B}_1(s) = B_1(s) - \int_0^1 B_1(u) du - 12(s-1/2) \int_0^1 (u-1/2) B_1(u) du$, \xrightarrow{D} は確率変数の法則収束を表す。これは、確率積分に関する伊藤の補題より、

$$T\hat{\phi} \xrightarrow{D} \frac{(1-\lambda) \tilde{B}_2(1)^2 - \left\{ \sqrt{1-\lambda} \tilde{B}_2(0) - \sqrt{\lambda} \tilde{B}_1(1) \right\}^2 - \lambda \tilde{B}_1(0)^2 - 1}{2 \left\{ \lambda^2 \int_0^1 \tilde{B}_1(s)^2 ds + (1-\lambda)^2 \int_0^1 \tilde{B}_2(s)^2 ds \right\}}$$

と変形できる。さらに、Perron (1989) や Morimune, Nakagawa (2001) では触れていないが³⁾、

$\frac{1}{T} \sum_{i=2}^T \hat{e}_i^2$ は攪乱項の分散 σ^2 の一致推定量ではなく³⁾、したがって $\hat{\phi}$ のt値の分布は、

$$t_{\hat{\phi}} \xrightarrow{D} \frac{\lambda \int_0^1 \tilde{B}_1(s) dB_1(s) + (1-\lambda) \int_0^1 \tilde{B}_2(s) dB_2(s) + \sqrt{\lambda(1-\lambda)} \tilde{B}_1(1) \tilde{B}_2(0) - \lambda \left\{ \tilde{B}_1(1) \right\}^2}{\sqrt{1 + \left\{ \sqrt{1-\lambda} \tilde{B}_2(0) - \sqrt{\lambda} \tilde{B}_1(1) \right\}^2} \sqrt{\lambda^2 \int_0^1 \tilde{B}_1(s)^2 ds + (1-\lambda)^2 \int_0^1 \tilde{B}_2(s)^2 ds}}$$

となる。

同様に、Morimune, Nakagawa (1997) によると、Model Aの回帰式 $\Delta \hat{u}_t = \phi \hat{u}_{t-1} + \hat{e}_t$ に関する帰無分布は、

2) 数学補遺1参照

3) 数学補遺2参照

$$T\hat{\phi} \xrightarrow{D} \frac{\lambda \int_0^1 \bar{B}_1(s) dB_2(s) + (1-\lambda) \int_0^1 \bar{B}_2(s) dB_1(s) + \sqrt{\lambda(1-\lambda)} \bar{B}_1(1) \bar{B}_2(0) - \lambda \{\bar{B}_1(1)\}^2}{\lambda^2 \int_0^1 \bar{B}_1(s)^2 ds + (1-\lambda)^2 \int_0^1 \bar{B}_2(s)^2 ds}$$

である。ただし、 $B_1(s), B_2(s)$ は互いに独立な標準ブラウン運動であり、

$$\tilde{\beta} = \frac{12 \left\{ \lambda^{5/2} \int_0^1 B_1(s)(s-1/2) dr + (1-\lambda)^{5/2} \int_0^1 B_2(s)(s-1/2) dr \right\}}{\lambda^3 + (1-\lambda)^3},$$

$$\bar{B}_i(s) = B_i(s) - \int_0^1 B_i(r) dr - \sqrt{\lambda} \tilde{\beta} (s-1/2)$$

である。さらに、確率積分に関する伊藤の補題を適用すると、

$$T\hat{\phi} \xrightarrow{D} \frac{(1-\lambda) \bar{B}_2(1)^2 - \left\{ \sqrt{1-\lambda} \bar{B}_2(0) - \sqrt{\lambda} \bar{B}_1(1) \right\}^2 - \lambda \bar{B}_1(0)^2 - 1}{2 \left\{ \lambda^2 \int_0^1 \bar{B}_1(s)^2 ds + (1-\lambda)^2 \int_0^1 \bar{B}_2(s)^2 ds \right\}}$$

となる⁴⁾。 $\frac{1}{T} \sum_{i=2}^T \hat{\varepsilon}_i^2$ や t 値に関しても Model C と同様である。その結果、

$$t_{\hat{\phi}} \xrightarrow{D} \frac{\lambda \int_0^1 \bar{B}_1(s) dB_1(s) + (1-\lambda) \int_0^1 \bar{B}_2(s) dB_2(s) + \sqrt{\lambda(1-\lambda)} \bar{B}_1(1) \bar{B}_2(0) - \lambda \{\bar{B}_1(1)\}^2}{\sqrt{1 + \left\{ \sqrt{1-\lambda} \bar{B}_2(0) - \sqrt{\lambda} \bar{B}_1(1) \right\}^2} \sqrt{\lambda^2 \int_0^1 \bar{B}_1(s)^2 ds + (1-\lambda)^2 \int_0^1 \bar{B}_2(s)^2 ds}}$$

を得る。

Morimune, Nakagawa (1997) , および, Morimune, Nakagawa (2001) によると、回帰式を $\Delta \hat{u}_t = \phi \hat{u}_{t-1} + D_t + \hat{\varepsilon}_t$ とすることにより、 $\frac{1}{T} \sum_{i=2}^T \hat{\varepsilon}_i^2$ の一致性を確保し、漸近分布をよりシンプルなものとするのが可能となる。このときは、 $\Delta u_{T_{b+1}}$ という変化点前後の値の差分が統計量に入らないので、

$$T\hat{\phi} \xrightarrow{D} \frac{\lambda \int_0^1 \tilde{B}_1(s) dB_1(s) + (1-\lambda) \int_0^1 \tilde{B}_2(s) dB_2(s)}{\lambda^2 \int_0^1 \tilde{B}_1(s)^2 ds + (1-\lambda)^2 \int_0^1 \tilde{B}_2(s)^2 ds}$$

となる。また、 D_t の効果によって $\hat{\varepsilon}_{T_{b+1}} = 0$ となり $\frac{1}{T} \sum_{i=2}^T \hat{\varepsilon}_i^2$ の一致性が確保されることから、

$$t_{\hat{\phi}} \xrightarrow{D} \frac{\lambda \int_0^1 \tilde{B}_1(s) dB_1(s) + (1-\lambda) \int_0^1 \tilde{B}_2(s) dB_2(s)}{\sqrt{\lambda^2 \int_0^1 \tilde{B}_1(s)^2 ds + (1-\lambda)^2 \int_0^1 \tilde{B}_2(s)^2 ds}}$$

となる。Model A) においても同様で、

4) 数学補遺 3 参照

$$T\hat{\phi} \xrightarrow{D} \frac{\lambda \int_0^1 \bar{B}_1(s) dB_1(s) + (1-\lambda) \int_0^1 \bar{B}_2(s) dB_2(s)}{\lambda^2 \int_0^1 \bar{B}_1(s)^2 ds + (1-\lambda)^2 \int_0^1 \bar{B}_2(s)^2 ds}$$

$$t_{\hat{\phi}} \xrightarrow{D} \frac{\lambda \int_0^1 \bar{B}_1(s) dB_1(s) + (1-\lambda) \int_0^1 \bar{B}_2(s) dB_2(s)}{\sqrt{\lambda^2 \int_0^1 \bar{B}_1(s)^2 ds + (1-\lambda)^2 \int_0^1 \bar{B}_2(s)^2 ds}}$$

となる。

Perron (1989) が実証分析に適用した Augmented Dickey-Fuller 検定においては, Model A, Model C に関して回帰式に D_t が入っている。Morimune, Nakagawa (2001) によれば, Model C 回帰式に D_t を含めないと統計量の発散を招くことになる。しかし, 回帰式に D_t が入れば, 回帰式 $\Delta \hat{u}_t = \phi \hat{u}_{t-1} + D_t + \hat{e}_t$ を用いた場合と同一の漸近分布を持つ。

一方, Model A ではそのようなことは起こらず, Augmented Dickey-Fuller 検定においては回帰式に D_t が入っても, 入らなくても帰無仮説において,

$$T\hat{\phi} \xrightarrow{D} \frac{\lambda \int_0^1 \bar{B}_1(s) dB_1(s) + (1-\lambda) \int_0^1 \bar{B}_2(s) dB_2(s)}{\lambda^2 \int_0^1 \bar{B}_1(s)^2 ds + (1-\lambda)^2 \int_0^1 \bar{B}_2(s)^2 ds}$$

$$t_{\hat{\phi}} \xrightarrow{D} \frac{\lambda \int_0^1 \bar{B}_1(s) dB_1(s) + (1-\lambda) \int_0^1 \bar{B}_2(s) dB_2(s)}{\sqrt{\lambda^2 \int_0^1 \bar{B}_1(s)^2 ds + (1-\lambda)^2 \int_0^1 \bar{B}_2(s)^2 ds}}$$

となる⁵⁾。これは回帰式 $\Delta \hat{u}_t = \phi \hat{u}_{t-1} + \hat{e}_t$ の場合と異なる点である。

4. 複数変化点の場合

Perron (1989) では, 係数の変化は1点のみであったが, 2, 2の考え方に基づき, 複数の変化点を持つ場合への拡張は容易である。以下では, Morimune, Nakagawa (1997) に従って説明していく。

式(2.1), (2.2)の下で, トレンド関数 $m(t)$ を次のように設定する。

$$m(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^m \alpha_i DU_{it} + \beta t & (\text{Model A}) \\ \alpha + \beta_1 t + \sum_{i=2}^m \beta_i (t - T_{B_{i-1}}) DU_{it} & (\text{Model B}) \\ \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \beta_i t) DU_{it} & (\text{Model C}) \end{cases}$$

とする. ここで,

$$0 < T_{B,i-1} < T_{B,i} < T,$$

$$T_{B1} = 0,$$

$$T_{B,m+1} = T,$$

$$\bar{T}_i = T_{B,i+1} - T_{B,i},$$

$$DU_{it} = \begin{cases} 1 & T_{B,i} + 1 \leq t \leq T_{B,i+1} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

とする. また, $\frac{T_i}{T} = \frac{T_{B,i+1} - T_{B,i}}{T} \longrightarrow \lambda_i$ と仮定する. さらに,

$$\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_T)'$$

$$\mathbf{1} = (\mathbf{1})_{T \times 1},$$

$$\mathbf{t} = (1, 2, \dots, T)'$$

$$\mathbf{du}_k = (DU_{k1}, DU_{k2}, \dots, DU_{kT})'$$

$$\mathbf{tdu}_k = (1DU_{k1}, 2DU_{k2}, \dots, TDU_{kT})' \quad (k=1, 2, \dots, m)$$

とする. ここで, $\hat{\mathbf{u}} = (I - Z(Z'Z)^{-1}Z')\mathbf{y}$ として, \hat{u}_i を $\mathbf{u} = (\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_T)$ によって定義する. ただし,

$$Z = \begin{cases} (\mathbf{du}_1, \dots, \mathbf{du}_m, \mathbf{t}) & (\text{Model A}) \\ (\mathbf{1}, \mathbf{t}, \mathbf{tdu}_2 - T_{B1}\mathbf{du}_2, \dots, \mathbf{tdu}_m - T_{B,m-1}\mathbf{du}_m) & (\text{Model B}) \\ (\mathbf{du}_1, \dots, \mathbf{du}_m, \mathbf{tdu}_1, \dots, \mathbf{tdu}_m) & (\text{Model C}) \end{cases}$$

である. このとき, $D_{it} = \begin{cases} 1 & t = T_{B,i} + 1 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$ として $\hat{\phi}$ を回帰式 $\Delta \hat{u}_t = \hat{\phi} \hat{u}_{t-1} + \sum_{i=2}^m D_{it} + \hat{e}_t$ に関する

$\hat{\phi}$ の最小二乗推定量, および, $\hat{\phi}$ の t 値 $t_{\hat{\phi}}$ をとする. Model Aにおいては,

$$T\hat{\phi} \xrightarrow{D} \frac{\sum_{i=1}^m \lambda_i \int_0^1 \bar{B}_i(s) dB_1(s)}{\sum_{i=1}^m \lambda_i^2 \int_0^1 \bar{B}_i(s)^2 ds},$$

$$t_{\hat{\phi}} \xrightarrow{D} \frac{\sum_{i=1}^m \lambda_i \int_0^1 \bar{B}_i(s) dB_1(s)}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \lambda_i^2 \int_0^1 \bar{B}_i(s)^2 ds}}$$

となる。ただし、

$$\tilde{\beta} = \frac{12\lambda^{5/2} \int_0^1 B_1(s)(s-1/2)dr + (1-\lambda)^{5/2} \int_0^1 B_1(s)(s-1/2)dr}{\lambda^3 + (1-\lambda)^3}$$

$\bar{B}_i(s) = B_i(s) - \int_0^1 B_i(r)dr - \sqrt{\lambda_i} \tilde{\beta}(s-1/2)$, である。回帰式

$$\Delta y_i = \phi y_{i-1} + \sum_{i=1}^m \alpha_i^+ DU_{it} + \sum_{i=2}^m \gamma_i D_{it} + \beta^+ t + \varepsilon_i$$

によってDickey-Fuller検定を行った場合も全く同様である。また、Model Cの場合は、

$$T\hat{\phi} \xrightarrow{D} \frac{\sum_{i=1}^m \lambda_i \int_0^1 \tilde{B}_i(s) dB_1(s)}{\sum_{i=1}^m \lambda_i^2 \int_0^1 \tilde{B}_i(s)^2 ds}$$

$$t_{\hat{\phi}} \xrightarrow{D} \frac{\sum_{i=1}^m \lambda_i \int_0^1 \tilde{B}_i(s) dB_1(s)}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \lambda_i^2 \int_0^1 \tilde{B}_i(s)^2 ds}}$$

となる。回帰式 $\Delta y_i = \phi y_{i-1} + \sum_{i=1}^m (\alpha_i^+ + \beta_i^+ t) DU_{it} + \sum_{i=2}^m \gamma_i D_{it} + \varepsilon_i$ によってDickey-Fuller検定を行った場合も全く同様である。このModel Cの漸近分布に関しては、Park, Sung (1994) が同じ漸近表現を与えているが、その回帰は、 $\Delta y_i = \phi y_{i-1} + \sum_{i=1}^m (\alpha_i^+ + \beta_i^+ t) DU_{it} + \varepsilon_i$ であり、この場合は、3で述べたとおり、 $T\hat{\phi}$ は発散してしまう。

さらに、構造変化のタイプはModel A,B,Cと3通りであるが、変化点が複数の場合は、これらの組み合わせが可能である（例えば、最初の構造変化はモデルA、次の変化はモデルCなど）。この場合も、Model A,Cの混在ならばMorimune, Nakagawa (1997) の考え方をういて一般化することが可能である。まず、モデルCの区間では $IC_i = 1$ 、それ以外では、 $IC_i = 0$ とする。モデルAの区間では $IA_i = 1$ 、それ以外では $IA_i = 0$ 、とする。ただし $IA_1 = 1$ 、 $IC_1 = 0$ とすると、

$$m(t) = \sum_{i=1}^K \alpha_i^* DU_{it} + \beta^* \sum_{i=1}^K IA_i(t-\bar{t}_i) DU_{it} + \sum_{i=1}^K \beta_i^* IC_i(t-\bar{t}_i) DU_{it}$$

というmean関数がとれる。このとき、

$$T\hat{\phi} \xrightarrow{D} \frac{\sum_{i=1}^K \lambda_i \int_0^1 \{IA_i \bar{B}_i(r) + IC_i \tilde{B}_i(r)\} dB_i(r)}{\sum_{i=1}^K \lambda_i^2 \int_0^1 \{IA_i \bar{B}_i(r)^2 + IC_i \tilde{B}_i(r)^2\} dr}$$

かつ,

$$t_{\hat{\phi}} \xrightarrow{D} \frac{\sum_{i=1}^K \lambda_i \int_0^1 \{IA_i \bar{B}_i(r) + IC_i \tilde{B}_i(r)\} dB_i(r)}{\sqrt{\sum_{i=1}^K \lambda_i^2 \int_0^1 \{IA_i \bar{B}_i(r)^2 + IC_i \tilde{B}_i(r)^2\} dr}}$$

である⁶⁾. ここで,

$$\begin{aligned} \bar{B}_i(s) &= B_i(s) - \int_0^1 B_i(r) dr - \sqrt{\lambda_i} \tilde{\beta}(s-1/2), \\ \tilde{B}_i(s) &= B_i(s) - \int_0^1 B_i(r) dr - 12(s-1/2) \int_0^1 (r-1/2) B_i(r) dr, \\ \tilde{\beta} &:= \frac{12 \sum_{i=1}^K IA_i \lambda_i^{5/2} \int_0^1 B_i(r)(r-1/2) dr}{\sum_{i=1}^K IA_i \lambda_i^3} \end{aligned}$$

とした.

5. 帰無仮説下での漸近分布が変化点の位置に依存しない検定

検定統計量の漸近分布が λ_i に依存する場合、 λ_i の組み合わせに対して、検定の臨界値の表を用意しなければならない. この問題に対する一つの解決として、Park, Sung (1994) では、変化点の位置に依存しない検定をModel Cに関して提案している (ただし回帰式に D_t は入っていないが、正しくは入れなければならない).

回帰式を

$$\Delta y_i = \phi \sum_{i=1}^m \frac{y_{i-1}}{\lambda_i} DU_{it} + \sum_{i=1}^m (\alpha_i^+ + \beta_i^+ t) DU_{it} + \sum_{i=2}^m \gamma_i D_{it} + \varepsilon_i$$

とすると,

$$T\hat{\phi} \xrightarrow{D} \frac{\sum_{i=1}^m \int_0^1 \tilde{B}_i(s) dB_i(s)}{\sum_{i=1}^m \int_0^1 \tilde{B}_i(s)^2 ds}$$

かつ,

$$t_{\hat{\phi}} \xrightarrow{D} \frac{\sum_{i=1}^m \int_0^1 \tilde{B}_i(s) dB_i(s)}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \int_0^1 \tilde{B}_i(s)^2 ds}}$$

6) 数学補遺 5 参照

であるので、変化点さえ指定すれば、分布表は1つあればよいことになる。

6. 変化点未知の場合の検定

以上の検定は変化点の位置を既知としたものである。Perron (1989) の論文に対するひとつの批判として、変化点が既知であると仮定されている点が指摘されてきた。この論文の実証部分では、変化点を1929年として単位根検定を行っているが、DGP (Data Generating Process) での変化点はこれと異なることを考慮しなければならないというものである。これは、変化点の誤設定の問題であり、それ自体は2.6に示す論文において検討が行われている。この節では、構造変化点が未知のケースに関してのアプローチに触れることにする。

Zivot, Andrews (1992) においては、帰無仮説では変化点が存在せず、対立仮説で変化点が存在する場合にのみ限定していることに注意を要する。この下で、Perron (1989) が提案したModel A, B, Cの回帰⁷⁾を行う。ただし、 T_B としては変化点が存在すると想定される区間 I のすべての点を取りうるものとする。こうして T_B の関数として $t_{\hat{\phi}}(T_B)$ が得られるが、この $\inf_{T_B \in I} t_{\hat{\phi}}(T_B)$ を検定統計量とするのである。このとき、Model Aでは

$$\inf_{T_B \in I} t_{\hat{\phi}}(T_B) \xrightarrow{D} \inf_{\lambda \in \Lambda} \frac{\lambda \int_0^1 \bar{B}_1(s) dB_1(s) + (1-\lambda) \int_0^1 \bar{B}_2(s) dB_2(s)}{\sqrt{\lambda^2 \int_0^1 \bar{B}_1(s)^2 ds + (1-\lambda)^2 \int_0^1 \bar{B}_2(s)^2 ds}}$$

であり、Model Bでは

$$\inf_{T_B \in I} t_{\hat{\phi}}(T_B) \xrightarrow{D} \inf_{\lambda \in \Lambda} \frac{\lambda \int_0^1 \tilde{B}_1(s) dB_1(s) + (1-\lambda) \int_0^1 \tilde{B}_2(s) dB_2(s)}{\sqrt{\lambda^2 \int_0^1 \tilde{B}_1(s)^2 ds + (1-\lambda)^2 \int_0^1 \tilde{B}_2(s)^2 ds}}$$

である。ただし、 $\Lambda = \{T_B / T; T_B \in I\}$ である。

Model Cで帰無仮説においてトレンド係数に変化が存在する場合には、 $\inf_{T_B \in I} t_{\hat{\phi}}(T_B)$ は $-\infty$ に発散してしまう (Hatanaka, Yamada (1997), Perron, Vogelsang (1998))。したがって、この方法は適用できない。

Model Cで帰無仮説においてトレンド係数に変化が存在する場合、Hatanaka, Yamada (1997) は、Model Cに関して、変化点をまずconsistentに推定し、しかる後に単位根検定を行うという方法をとっている。このとき、第1段階の変化点の推定については、先の結果から $\inf_{T_B \in I} t_{\hat{\phi}}(T_B)$ を用いることはできない。そのため、Model Cの回帰の残差二乗和を最小にする点を探索している。この場合、真の変化点を検出する確率が極限で1になる (つまり推定量は強一貫性を持つ)。次の段階で、単位根検定を行うが、このときには、Perron (1989) の

7) ここでも、Model Cの回帰から D_1 が抜けているが、これは当然 D_1 が入るべきである

Model Cの単位根検定を推定された λ に基づいて行うのである。ただし、論文では(1)、(2)

における $\left| \frac{\beta_2 - \beta_1}{\sigma} \right|$ が1より小さい場合には検出力が低いという問題点が指摘されている。

また、Perron, Vogelsang (1998) では、

$$\Delta y_t = \phi y_{t-1} + (\alpha_1^+ + \beta_1^+ t) DU_{1t} + (\alpha_2^+ + \beta_2^+ t) DU_{2t} + \delta^+ D_t + \varepsilon_t$$

を

$$\Delta y_t = \phi y_{t-1} + \alpha^+ + \beta^+ t + \alpha_2^+ DU_{2t} + \beta_2^+ t DU_{2t} + \delta^+ D_t + \varepsilon_t$$

と変換して、 $t_{\beta_2^+}$ を最大とする T_B または、 $F_{\alpha_2^+, \beta_2^+}$ を最大とする T_B を選ぶ。なお t_ω は係数 ω に関する t 値、また、 $F_{\omega, \pi}$ は係数 ω 、 π がともに0であるという帰無仮説に対する F 値である。このとき、 $\lambda = T_B / T$ は真の変化点比率 λ_0 の強一致推定量となる。これに基づいて、Perron (1989)の方法で単位根検定を行うとしている。

両者とも第一段階で得られた真の変化点、または、変化点比率の一致推定量を用いて2段階目のPerron (1989)の検定を行うという共通した構造を持っている。しかしながら、このような証明は、以下の3つの点を満たしていなければ完全とはいえない。第1は、一致性が強一致性、すなわち、概収束によるものでなければならないという点である。第2は、統計量が T_B 上で収束するか、または、変化点比率 λ で収束する場合においては、変化点の誤設定点と真の変化点との差が標本数 T のオーダーよりも小さいレートで増えるような設定時の統計量が、変化点の誤設定のない場合の統計量に収束する点である。第3は、統計量が変化点、または、変化点比率に対して連続である点である。

まず、第1の強一致性を要求するのは、以下の理由による。単なる一致性をもつ、

すなわち、 $\text{plim}_{T \rightarrow \infty} \hat{\lambda}_T \rightarrow \lambda_0$ としよう。さらに、 $\Pr \left[|\hat{\lambda}_T - \lambda_0| \geq 0.1 \right] = \frac{1}{T}$ 、かつ、

$|\hat{\lambda}_T - \lambda_0| \geq 0.1 \Rightarrow |X(\hat{\lambda}_T) - X(\lambda_0)| \geq T$ が確率1で起こるとする。この仮定は、 $X(\lambda)$ の λ_0 の近傍における連続性と矛盾しないが、 $E \left[|X(\hat{\lambda}_T) - X(\lambda_0)| \right] \geq 1$ となる。よって、 $X(\hat{\lambda}_T)$ は L^1 で収束しないのであるから、 $X(\lambda_0)$ に法則収束しない。もちろん、 $X(\hat{\lambda}_T) = O_p(1)$ であればContinuous Mapping Theoremから $X(\lambda_0)$ に法則収束するが、上記の例は、 $X(\hat{\lambda}_T) \rightarrow -\infty$ (概収束)であるためこの仮定を満たしていない。Hatanaka, Yamada (1997)は単なる一致性のみを示しており、この点において不十分であるといわざるを得ない。Perron, Vogelsang (1998)は、その証明において強一致性を示しているため、この点では問題ないといえよう。

第2点目であるが、誤設定点と真の変化点の差が固定であり、そのため、変化点比率としては、真の変化点比率に収束するような場合には、Morimune, Nakagawa (1999)が示したように、誤設定の影響によって統計量は発散する。さらに、変化点比率が同一で、かつ変化点

としても正しいのは1点しか存在しないため零集合となり、確率1で変化点を誤るという可能性が消されたわけではない。この場合、確率1で極限において発散するのである⁸⁾。

Hatanaka, Yamada (1997)はこの点を変化点で考えているので問題ない。Perron, Vogelsang (1998)は、変化点比率で考えているので、不十分である。

第3点目であるが⁹⁾、Morimune, Nakagawa (1999)が示したとおり、仮定によっては、 $T \xrightarrow{a.s.} T_B$ で、かつ、 $X(T_B)$ が不連続となるような例も作るができる。この点は、上記の両論文では扱われていない⁸⁾。

さらに、Nunes, et. al (1995)では、被説明変数が(1)過程+係数変化のないトレンドで表せるような場合では、被説明変数をトレンドに回帰したときの残差二乗和を最小にする点に基づいて変化点を設定すると、標本の中間付近に、本来存在しないはずの変化点を検出しやすいということがシミュレーション結果によって指摘されている。Bai (1998)はこれに数学的説明を与えている。このようなSpurious Breakの存在も2段階推定の危険性を示している。

したがって、Model Cに関しては、変化点未知の検定において漸近理論的に満足できるものは未だに存在しない。

7. 変化点誤設定による検定の歪みとその対策

2. 5の問題を考える上でも、変化点の設定が誤っていた場合に、単位根検定にどのような歪みが発生するかについて検討することは、非常に重要である。

まず、Model Aに関しては、Montanes (1997)において、変化点を誤設定したとしても

$$T\hat{\phi} \xrightarrow{D} \frac{\sum_{i=1}^m \lambda_i \int_0^1 \bar{B}_i(s) dB_1(s)}{\sum_{i=1}^m \lambda_i^2 \int_0^1 \bar{B}_i(s)^2 ds}$$

$$t_{\hat{\phi}} \xrightarrow{D} \frac{\sum_{i=1}^m \lambda_i \int_0^1 \bar{B}_i(s) dB_1(s)}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \lambda_i^2 \int_0^1 \bar{B}_i(s)^2 ds}}$$

に従うことが示されている。ただし、ここでの λ_i は回帰式における変化点に基づいて計算されたものである。

Morimune, Nakagawa (1999)は、Model Cにおける変化点の誤設定についての分析を行っている。回帰モデルは、

8) このような状況では収束の一様性はいえないので、極限操作の交換ができない。

$$\Delta y_t = \phi y_{t-1} + \sum_{i=1,2} \{\alpha_i + \beta_i(t - \bar{t}_i)\} DU_{it} + \sum_{i=1,2} \gamma_i D_{it} + \varepsilon_t$$

(ε_t は平均0, 分散 σ^2 , i.i.d.)

として, DGPを

$$y_t = \sum_{i=1,2} \{\alpha_i^+ + \beta_i^+(t - \bar{t}_i)\} DU_{it}^+ + \sum \varepsilon_t$$

とする. ただし,

$$DU_{it}^+ = \begin{cases} 1 & t \leq T_C \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

$$DU_{2t}^+ = 1 - DU_{it}^+$$

である. ここで, $\frac{\sigma}{\sqrt{T}} \rightarrow \sigma_0$ と $P = O(1/\sqrt{T})$ と仮定する. ただし, $P = |T_1 - T_C|$ とする.

前者の仮定は, $\sqrt{T} \left| \frac{\beta_2 - \beta_1}{\sigma} \right| \rightarrow \delta$ を表している. 係数変化点をmean関数へ回帰した残差

\hat{u}_t をプロットしても, 構造変化点が図から判別しがたいのは, $\sqrt{T} \left| \frac{\beta_2 - \beta_1}{\sigma} \right|$ が小さい場合で

ある (図2. 1). それ以外の場合は, 図2. 2から変化点の誤設定は明らかである.

このように, 構造変化点が図から判別しがたい場合のみを扱おうというのが最初の仮定の意味である.

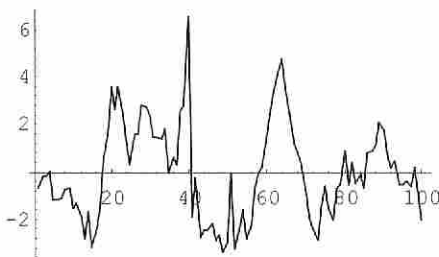


図2. 1

$T=100, (\beta_2 - \beta_1)/\sigma = -0.2, P=10,$
 $T_C=50, T_B=40$

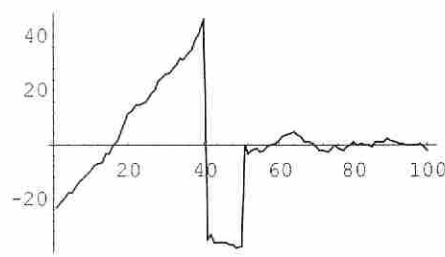


図2. 2

$T=100, (\beta_2 - \beta_1)/\sigma = -2, P=10,$
 $T_C=50, T_B=40$

Morimune, Nakagawa (1999) から転載

第2の仮定は, T が増えるに従って変化点の情報が正しくなっていくような状況を示している. 2. 6節で取り上げた2段階推定の1段階目が一致性をもつような場合に, 起こりう

る状況の一例を示しているといえよう。

このとき、

$$t_{\hat{\beta}} \xrightarrow{D} \frac{\sum_{i=1,2} \lambda_i \int_0^1 \tilde{B}_i(r) d\tilde{B}_i(r) + \lambda_1 \sqrt{\lambda_1} \delta \tilde{B}_1(1)}{\sqrt{\sum_{i=1,2} \lambda_i^2 \int_0^1 \tilde{B}_i(r)^2 d\tilde{B}_i(r)}}$$

となることが示されている。しかし、2. 6の2段階推定の文脈からすると、 $T \xrightarrow{as} T_B$ かつ、 $\lambda_T - \lambda_0 = O_p(1/T^{3/2})$ としても、 $X(T_B)$ が不連続となるような例があるということである。

また、これまでの考察より、構造変化がある場合の単位根検定においては回帰式に D_j が必要なことから、Morimune, Nakagawa (1999) は Jumped Interval 検定を提案している。これは、変化点そのものではなく、変化点を含む区間 = Jumped Interval と考え、その区間を回帰から除く = その区間の点に対して1点ダミー D_{t+j} ($j = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$) を回帰式に加えることによって、変化点の誤設定の影響を統計量から取り除くことを意図している。この方法の特長としては、通常の Perron 検定の臨界値を使用することが可能であり、変化点に関する事前情報を利用できるという点が挙げられる。ただし、実際の変化点が、回帰から取り除かれた区間に入らなければ、依然として統計量は発散する⁹⁾。

8. 帰無仮説が定常の場合の検定

通常の(二次)定常性対(二次)非定常性の検定においては、帰無を非定常、対立を定常にとるAR単位根型の検定と、帰無を定常、対立を非定常にとるMA単位根型の検定が存在する。帰無を定常、対立を非定常にとる検定の代表的なものは、Kwiatkowski et al. (1992) が提案したKPSS検定である。これは、

$$\begin{aligned} y_t &= m(t) + u_t + v_t \\ u_t &= u_{t-1} + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &\sim NID(0, \sigma_\varepsilon^2) \\ v_t &\sim NID(0, \sigma_v^2) \end{aligned}$$

としたときに、帰無仮説

$$H_0: \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_v^2} = 0$$

を検定するものである。

KPSS検定を構造変化がある場合、すなわち、 $m(t)$ が(2)のような場合の(二次)定常性

9) この手法において Jumped Interval の設定の恣意性を統計的手続きで避ける試みについては、Morimune, Nakagawa (2004) を参照

対（二次）非定常性の検定に拡張したのが、Kurozumi（2002）である。

検定統計量は、 $S_T = \frac{1}{\tilde{\sigma}^2 T^2} \sum_{j=1}^{T-1} \left(\sum_{t=1}^j \hat{u}_t \right)^2$ である。ただし、 $\tilde{\sigma}^2 = \bar{y}(0) + 2 \sum_{l=1}^l w(i,l) \bar{y}(i)$ 、かつ、

$\bar{y}(i) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_t \hat{u}_{t+i}$ である。帰無仮説の下で、

$$S_T \xrightarrow{D} \lambda^2 \int_0^1 \bar{B}_1(s)^2 ds + (1-\lambda)^2 \int_0^1 \bar{B}_2(s)^2 ds \quad (\text{Model A})$$

$$S_T \xrightarrow{D} \lambda^2 \int_0^1 \tilde{B}_1(s)^2 ds + (1-\lambda)^2 \int_0^1 \tilde{B}_2(s)^2 ds \quad (\text{Model C})$$

となる¹⁰⁾。特に、Model AとModel Cに関しては、漸近分布の形からみて、複数変化点の場合に容易に拡張できることがわかる。

この検定の利点は、構造変化点 T_B の位置が未知でも、定常過程に関する変化点検出の検定、推定を利用して、変化点数、変化点位置を推定、検定でき、その結果を基に変化点位置を設定できるという点にある。しかし、実際のシミュレーションでは、過程が非定常に近づくほど変化点位置の推定誤差が大きくなるという点が報告されている。また、変化点を誤設定した場合に、 S_T が有限に止まるかどうかについては今のところ明らかではない。この点は、今後の課題といえる。しかし、mean関数に構造変化がない場合については、実証分析では、すでにAR単位根型の検定と、帰無を定常、対立を非定常にとるMA単位根型の検定を併用しているのであるから、構造変化のある場合でも、両者を併用すべきであろう。

また、Model Cに関しては、AR型と同様に漸近分布の分布表が一つしか必要とならない、漸近分布が変化点比率に依存しないPark, Sung（1994）と同様な検定を作ることができる。これは、

$$y_t^* = \frac{y_t}{\lambda} DU_{1t} + \frac{y_t}{1-\lambda} DU_{2t}$$

として、

$$\hat{u}_t^* = (I - Z(Z'Z)^{-1}Z')y_t^*$$

から、

$$S_T = \frac{1}{\tilde{\sigma}^2 T^2} \sum_{j=1}^{T-1} \left(\sum_{t=1}^j \hat{u}_t^* \right)^2$$

を計算し検定統計量とするのである。ただし、 $\tilde{\sigma}^2 = \bar{y}(0) + 2 \sum_{l=1}^l w(i,l) \bar{y}(i)$ 、かつ、 $\bar{y}(i) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_t^* \hat{u}_{t+i}^*$

10) Model Aに関しては、Morimune, Nakagawa（1997）に基づいて漸近表現を簡略化した

である。このとき、

$$S_T \xrightarrow{D} \int_0^1 \tilde{B}_1(s)^2 ds + \int_0^1 \tilde{B}_2(s)^2 ds$$

となり、漸近分布が変化点比率に依存しない。

9. まとめ

以上、構造変化のある単位根検定の理論的枠組みを概観した。非定常性の存在が、どのように標準的な統計的手続きでは処理できない問題を提示し、それに対してどのような対処がなされてきたかについて、跡づけたことになる。

単位根検定は、回帰分析においては共和分分析の前段階ととらえることもできる。したがって、構造変化の存在が共和分分析にどのように影響を与えるかについて論ずることが「理想的でない条件の下における統計分析」を論ずる上で必要であるが、紙数も尽きたので別の機会を待ちたい。

[数学補遺]

A. 1 回帰式 $\Delta \hat{u}_t = \phi \hat{u}_{t-1} + \hat{e}_t$ における $T\hat{\phi}$ の帰無仮説下での漸近分布 (Model C)

帰無仮説の下でのDGPは、 $y_t = \eta_t + (\alpha_1 + \beta_1 t) DU_{1t} + (\alpha_2 + \beta_2 t) DU_{2t}$ である。こ

こで、 $\eta_t = \sum_{i=1}^t \varepsilon_i$ かつ ε_i は平均0、分散 σ^2 の独立な確率変数である。残

差に関して $y_t = (\alpha_1 + \beta_1 t) DU_{1t} + (\alpha_2 + \beta_2 t) DU_{2t} + u_t$ と等価な直交回帰は、

$$y_t = (\alpha_1 + \beta_1(t - \bar{t}_1)) DU_{1t} + (\alpha_2 + \beta_2(t - \bar{t}_2)) DU_{2t} + u_t \quad \text{で、ここで} \quad \bar{t}_1 = \frac{1}{T_B} \sum_{t=1}^{T_B} t = \frac{T_B + 1}{2}$$

$$\text{かつ} \quad \bar{t}_2 = \frac{1}{T - T_B} \sum_{t=T_B+1}^T t = \frac{T + T_B + 1}{2} \quad \text{である。残差は、} \quad \sum_{t=1}^{T_B} (t - \bar{t}_1)^2 = \frac{1}{12} T_B (T_B^2 - 1) \quad \text{と}$$

$$\sum_{t=T_B+1}^T (t - \bar{t}_2)^2 = \frac{1}{12} (T - T_B) \{(T - T_B)^2 - 1\} \quad \text{から、}$$

$$\begin{aligned} \hat{u}_t = & \eta_t - \frac{\sum_{s=1}^{T_B} \eta_s}{T_B} DU_{1t} - (t - \bar{t}_1) \frac{12 \sum_{s=1}^{T_B} \eta_s (s - \bar{t}_1)}{T_B (T_B^2 - 1)} DU_{1t} \\ & - \frac{\sum_{s=T_B+1}^T \eta_s}{T - T_B} DU_{2t} - (t - \bar{t}_2) \frac{12 \sum_{s=T_B+1}^T \eta_s (s - \bar{t}_2)}{(T - T_B) \{(T - T_B)^2 - 1\}} DU_{2t} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

ここで、 $\xi_{[m,n]} = \sum_{i=m}^n \varepsilon_i$ とおく。この式により以下の表現を得る。

$$\eta_t = \eta_t DU_{1t} + \eta_t DU_{2t} = \xi_{[1,t]} DU_{1t} + (\eta_{T_B} + \xi_{[T_B+1,t]}) DU_{2t} \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\sum_{s=\bar{i}_B+1}^T \eta_s}{T - T_B} = \eta_{T_B} + \frac{\sum_{s=1}^{T-T_B} \xi_{[T_B+1, T_B+s]}}{(1-\lambda)T} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} \sum_{s=\bar{i}_B+1}^T \eta_s (s - \bar{i}_2) &= \sum_{s=1}^{T-T_B} \eta_{T_B+s} \left(T_B + s - T_B - \frac{T - T_B + 1}{2} \right) \\ &= \sum_{s=1}^{T-T_B} (\eta_{T_B} + \xi_{[T_B+1, T_B+s]}) \left(s - \frac{(T - T_B) + 1}{2} \right) \\ &= \sum_{s=1}^{T-T_B} \xi_{[T_B+1, T_B+s]} \left(s - \frac{(T - T_B) + 1}{2} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

さらに,

$$t - \bar{i}_2 = (t - T_B) - \bar{i}_2 + T_B = (t - T_B) - \frac{(T_B - T) + 1}{2} \quad (\text{A.5})$$

である, (A.1) に (A.2), (A.3), (A.4) 及び (A.5) を代入すると,

$$\hat{u}_t = \left\{ \xi_{[1,t]} - \frac{\sum_{s=1}^{\lambda T} \xi_{[1,s]}}{\lambda T} - (t - \bar{i}_1) \frac{12 \sum_{s=1}^{\lambda T} \xi_{[1,s]} (s - \bar{i}_1)}{\lambda T (\lambda^2 T^2 - 1)} \right\} DU_{1t} + \left\{ \xi_{[T_B+1,t]} - \frac{\sum_{s=1}^{(1-\lambda)T} \xi_{[T_B+1, T_B+s]}}{(1-\lambda)T} - \left[(t - T_B) - \frac{(T_B - T) + 1}{2} \right] \frac{12 \sum_{s=1}^{(1-\lambda)T} \xi_{[T_B+1, T_B+s]} \left(s - \frac{(T - T_B) + 1}{2} \right)}{(1-\lambda)T ((1-\lambda)^2 T^2 - 1)} \right\} DU_{2t}$$

を得る.

$$T\hat{\phi} = \frac{\frac{1}{T} \sum_{i=2}^T \Delta \hat{u}_i u_{i-1}}{\frac{1}{T^2} \sum_{i=2}^T u_{i-2}^2} = \frac{\frac{1}{T} \sum_{i=2}^{T_B} \Delta \hat{u}_i \hat{u}_{i-1} + \frac{1}{T} \Delta \hat{u}_{T_B-1} \hat{u}_{T_B} + \frac{1}{T} \sum_{i=T_B+2}^T \Delta \hat{u}_i \hat{u}_{i-1}}{\frac{1}{T^2} \sum_{i=2}^{T_B} \hat{u}_{i-1}^2 + \frac{1}{T^2} \hat{u}_{T_B}^2 + \frac{1}{T} \sum_{i=T_B+2}^T \hat{u}_{i-1}^2} \quad \text{となるので, 各項を調}$$

べてみる. まず,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{T} \sum_{t=2}^{T_B} \Delta \hat{u}_t \hat{u}_{t-1} \\
&= \sum_{t=2}^{T_B} \left\{ \left(\frac{\varepsilon_t}{\sqrt{T}} - \frac{12 \sum_{s=1}^{2T} \xi_{[t,s]} (s - \bar{t}_1)}{\sqrt{T} \lambda T (\lambda^2 T^2 - 1)} \right) \left(\frac{\xi_{[t,t-1]}}{\sqrt{T}} - \frac{\sum_{s=1}^{T_B} \xi_{[t,s]}}{\lambda T \sqrt{T}} - \frac{12 \sum_{s=1}^{2T} \xi_{[t,s]} (s - \bar{t}_1)}{\lambda T (\lambda^2 T^2 - 1) \sqrt{T}} (t - 1 - \bar{t}_1) \right) \right\} \\
&= \sigma^2 \sum_{t=2}^{T_B} \left\{ \left(\sqrt{\lambda} \frac{\varepsilon_t}{\sigma \sqrt{\lambda T}} - \frac{12}{\lambda T} \sum_{s=1}^{2T} \frac{\xi_{[t,s]} (s - \bar{t}_1)}{\sigma \sqrt{\lambda T}} \frac{1}{\lambda T \sqrt{\lambda T}} \right) \times \right. \\
&\quad \left. \left(\sqrt{\lambda} \frac{\xi_{[t,t-1]}}{\sigma \sqrt{\lambda T}} - \sqrt{\lambda} \frac{1}{\lambda T} \sum_{s=1}^{T_B} \frac{\xi_{[t,s]}}{\sigma \sqrt{\lambda T}} - \sqrt{\lambda} \frac{12}{\lambda T} \sum_{s=1}^{2T} \frac{\xi_{[t,s]} (s - \bar{t}_1) (t - 1 - \bar{t}_1)}{\sigma \sqrt{\lambda T} \lambda T} \right) \right\} + o_p(1)
\end{aligned}$$

まず, $u = \frac{s}{\lambda T}$ とおくと, Donsker不変原理から $\frac{\xi_{[t,s]}}{\sigma \sqrt{\lambda T}} \xrightarrow{D} B_1\left(\frac{s}{\lambda T}\right) = B_1(u)$ である.

さらに, 同じ原理で,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\lambda T} \sum_{s=1}^{2T} \frac{\xi_{[t,s]} (s - \bar{t}_1)}{\sigma \sqrt{\lambda T} \lambda T} \xrightarrow{D} \int_0^1 (u - 1/2) B_1(u) du \\
& \frac{1}{\lambda T} \sum_{s=1}^{2T} \frac{\xi_{[t,s]}}{\sigma \sqrt{\lambda T}} \xrightarrow{D} \int_0^1 B_1(u) du
\end{aligned}$$

となるから, $v = \frac{t}{\lambda T}$ とおくと, 以下の収束結果を得る.

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\lambda} \frac{\varepsilon_t}{\sigma \sqrt{\lambda T}} - \frac{12}{\lambda T} \sum_{s=1}^{2T} \frac{\xi_{[t,s]} (s - \bar{t}_1)}{\sigma \sqrt{\lambda T} \lambda T \sqrt{\lambda T}} = \sqrt{\lambda} \frac{\varepsilon_t}{\sigma \sqrt{\lambda T}} + o_p(1) \\
& \sqrt{\lambda} \frac{\xi_{[t,t-1]}}{\sigma \sqrt{\lambda T}} - \sqrt{\lambda} \frac{1}{\lambda T} \sum_{s=1}^{T_B} \frac{\xi_{[t,s]}}{\sigma \sqrt{\lambda T}} - \sqrt{\lambda} \frac{12}{\lambda T} \sum_{s=1}^{2T} \frac{\xi_{[t,s]} (s - \bar{t}_1) (t - 1 - \bar{t}_1)}{\sigma \sqrt{\lambda T} \lambda T} \\
& \xrightarrow{D} \sqrt{\lambda} \left\{ B_1(v) - \int_0^1 B_1(u) du - 12(v - 1/2) \int_0^1 (u - 1/2) B_1(u) du \right\}
\end{aligned}$$

最後の収束は, ブラウン運動の経路が確率1で連続であることから, $B_1\left(\frac{t-1}{\lambda T}\right) \xrightarrow{a.s.} B_1(v)$

であることによる. よって,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{T} \sum_{t=2}^{T_B} \Delta \hat{u}_t \hat{u}_{t-1} \\
&= \sigma^2 \sum_{t=2}^{T_B} \left\{ \left(\sqrt{\lambda} \frac{\varepsilon_t}{\sigma \sqrt{\lambda T}} + o_p(1) \right) \times \right. \\
&\quad \left. \left(\sqrt{\lambda} \frac{\xi_{[t,t-1]}}{\sigma \sqrt{\lambda T}} - \sqrt{\lambda} \frac{1}{\lambda T} \sum_{s=1}^{T_B} \frac{\xi_{[t,s]}}{\sigma \sqrt{\lambda T}} - 12 \sqrt{\lambda} \left(\frac{1}{\lambda T} \sum_{s=1}^{2T} \frac{\xi_{[t,s]} (s - \bar{t}_1)}{\sigma \sqrt{\lambda T} \lambda T} \right) \frac{(t - 1 - \bar{t}_1)}{\lambda T} + o_p(1) \right) \right\} \\
&\xrightarrow{w} \sigma^2 \lambda \int_0^1 \left(B_1(v) - \int_0^1 B_1(u) du - 12(v - 1/2) \int_0^1 (u - 1/2) B_1(u) du \right) dB_1(v)
\end{aligned}$$

となる。同様に、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T^2} \sum_{t=2}^{T_B} \hat{u}_{t-1}^2 \\ &= \sigma^2 \lambda \frac{1}{\lambda T} \sum_{t=2}^{T_B} \left(\sqrt{\lambda} \frac{\xi_{[1,t-1]}}{\sigma \sqrt{\lambda T}} - \sqrt{\lambda} \frac{1}{\lambda T} \sum_{s=1}^{T_B} \frac{\xi_{[1,s]}}{\sigma \sqrt{\lambda T}} - 12 \sqrt{\lambda} \left(\frac{1}{\lambda T} \sum_{s=1}^{T_B} \frac{\xi_{[1,s]} s - \bar{t}_1}{\sigma \sqrt{\lambda T} \lambda T} \right) \frac{(t-1-\bar{t}_1)}{\lambda T} + o_p(1) \right)^2 \\ &\xrightarrow{w} \sigma^2 \lambda^2 \int_0^1 \left(B_1(v) - \int_0^1 B_1(u) du - 12(v-1/2) \int_0^1 (u-1/2) B_1(u) du \right)^2 dv. \end{aligned}$$

変化点 T_B より後半のデータに関しても前半と同様な議論を適用し、 $u = \frac{s-T_B}{(1-\lambda)T}$ とおくと

$$\frac{\xi_{[T_B+1,s]}}{\sigma \sqrt{(1-\lambda)T}} \xrightarrow{w} B_2 \left(\frac{s-T_B}{(1-\lambda)T} \right) = B_2(u) \text{ となる. さらに, } \xi_{[T_B+1,s]} \ (s \geq T_B+1) \text{ と } \xi_{[1,s]} \ (s \leq T_B)$$

はお互いに独立だから、 $B_2(u)$ は $B_1(u)$ と独立である。したがって、 $\frac{1}{T} \sum_{t=2}^{T_B} \Delta \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}$ 、 $\frac{1}{T^2} \sum_{t=2}^{T_B} \hat{u}_{t-1}^2$

と同様な議論が $\frac{1}{T} \sum_{t=T_B+2}^T \Delta \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}$ に $\frac{1}{T^2} \sum_{t=T_B+2}^T \hat{u}_{t-1}^2$ に適用でき、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T} \sum_{t=T_B+2}^T \Delta \hat{u}_t \hat{u}_{t-1} \xrightarrow{w} \sigma^2 (1-\lambda) \int_0^1 \left(B_2(v) - \int_0^1 B_2(u) du - 12(v-1/2) \int_0^1 (u-1/2) B_2(u) du \right) dB_2(v), \\ & \frac{1}{T^2} \sum_{t=T_B+2}^T \hat{u}_{t-1}^2 \xrightarrow{w} \sigma^2 (1-\lambda)^2 \int_0^1 \left(B_2(v) - \int_0^1 B_2(u) du - 12(v-1/2) \int_0^1 (u-1/2) B_2(u) du \right)^2 dv \end{aligned}$$

が成立する。

次に、 $\frac{1}{T} \Delta \hat{u}_{T_B+1} \hat{u}_{T_B}$ の項であるが、

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \hat{u}_{T_B+1}}{\sqrt{T}} &= \frac{1}{\sqrt{T}} \left\{ \varepsilon_{T_B+1} - \frac{\sum_{s=1}^{T-T_B} \xi_{[T_B+1, T_B+s]}}{T-T_B} - 12(T_B+1-\bar{t}_2) \frac{\sum_{s=1}^{T-T_B} \xi_{[T_B+1, T_B+s]}(s-\bar{t}_2)}{(T-T_B)(T-T_B+1)} \right\} - \\ & \frac{1}{\sqrt{T}} \left\{ \xi_{[1, T_B]} - \frac{\sum_{s=1}^{T_B} \xi_{[1,s]}}{T_B} - 12(T_B-\bar{t}_1) \frac{\sum_{s=1}^{T_B} \xi_{[1, T_B]}(s-\bar{t}_1)}{T_B(T_B+1)} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{T}} \left\{ \xi_{[T_B+1, T_B+1]} - \frac{\sum_{s=1}^{T-T_B} \xi_{[T_B+1, T_B+s]}}{T-T_B} - 12(T_B+1-\bar{t}_2) \frac{\sum_{s=1}^{T-T_B} \xi_{[T_B+1, T_B+s]}(s-\bar{t}_2)}{(T-T_B)(T-T_B+1)} \right\} - \\ & \frac{1}{\sqrt{T}} \left\{ \xi_{[1, T_B]} - \frac{\sum_{s=1}^{T_B} \xi_{[1,s]}}{T_B} - 12(T_B-\bar{t}_1) \frac{\sum_{s=1}^{T_B} \xi_{[1, T_B]}(s-\bar{t}_1)}{T_B(T_B+1)} \right\} \\ & \xrightarrow{D} \sigma \left\{ \sqrt{1-\lambda} \tilde{B}_2(0) - \sqrt{\lambda} \tilde{B}_1(1) \right\} \end{aligned}$$

かつ,

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \hat{u}_{T_B} = \frac{1}{\sqrt{T}} \left\{ \xi_{[1, T_B]} - \frac{\sum_{s=1}^{T_B} \xi_{[1, s]}}{T_B} - (T_B - \bar{t}_2) \frac{12 \sum_{s=1}^{T_B} \xi_{[1, s]} (s - \bar{t}_1)}{T_B (T_B^2 - 1)} \right\} \xrightarrow{D} \sigma \sqrt{\lambda} \tilde{B}_1(1)$$

であるから,

$$\frac{1}{T} \Delta \hat{u}_{T_B+1} \hat{u}_{T_B} \xrightarrow{D} \sigma^2 \sqrt{\lambda(1-\lambda)} \tilde{B}_1(1) \tilde{B}_2(0) - \sigma^2 \lambda \{\tilde{B}_1(1)\}^2$$

である. また, 分母に関しては, $\frac{1}{T} \hat{u}_{T_B}^2 = \frac{1}{T} \left(\frac{\hat{u}_{T_B}}{\sqrt{T}} \right)^2 = o_p(1)$ であるから,

$$T \hat{\phi} \xrightarrow{D} \frac{\lambda \int_0^1 \tilde{B}_1(s) dB_1(s) + (1-\lambda) \int_0^1 \tilde{B}_2(s) dB_2(s) + \sqrt{\lambda(1-\lambda)} \tilde{B}_1(1) \tilde{B}_2(0) - \lambda \{\tilde{B}_1(1)\}^2}{\lambda^2 \int_0^1 \tilde{B}_1(s)^2 ds + (1-\lambda)^2 \int_0^1 \tilde{B}_2(s)^2 ds}$$

を得る.

A. 2 $\Delta \hat{u}_t = \phi \hat{u}_{t-1} + \hat{e}_t$ の回帰における $\frac{1}{T} \sum_{t=2}^T \hat{e}_t^2$ の極限分布

$$\frac{1}{T} \sum_{t=2}^T \hat{e}_t^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T \Delta \hat{u}_t^2 - \frac{1}{T} \hat{\phi}^2 \sum_{t=2}^T \hat{u}_{t-1}^2 \quad \text{であるが, 数学補題 1-1 より,}$$

$$\frac{1}{T} \hat{\phi}^2 \sum_{t=2}^T \hat{u}_{t-1}^2 = \frac{1}{T^2} (T \hat{\phi})^2 \left(\frac{1}{T} \sum_{t=2}^T \hat{u}_{t-1}^2 \right) = o_p(1) \quad \text{であるから, } \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T \hat{e}_t^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T \Delta \hat{u}_t^2 + o_p(1) \quad \text{となり,}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T \Delta \hat{u}_t^2 &= \frac{1}{T} \sum_{t=T_B+1}^T \Delta \hat{u}_t^2 + \frac{1}{T} (\hat{u}_{T_B+1} - \hat{u}_{T_B})^2 \\ &= \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T \varepsilon_t^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{T}} \hat{u}_{T_B+1} - \frac{1}{\sqrt{T}} \hat{u}_{T_B} \right)^2 + o_p(1) \\ &\xrightarrow{D} \sigma^2 + \sigma^2 \left\{ \sqrt{1-\lambda} \tilde{B}_2(0) - \sqrt{\lambda} \tilde{B}_1(1) \right\}^2 \end{aligned}$$

である. したがって,

$$T \hat{\phi} \xrightarrow{D} \frac{\lambda \int_0^1 \tilde{B}_1(s) dB_1(s) + (1-\lambda) \int_0^1 \tilde{B}_2(s) dB_2(s) + \sqrt{\lambda(1-\lambda)} \tilde{B}_1(1) \tilde{B}_2(0) - \lambda \{\tilde{B}_1(1)\}^2}{\sqrt{1 + \left\{ \sqrt{1-\lambda} \tilde{B}_2(0) - \sqrt{\lambda} \tilde{B}_1(1) \right\}^2} \sqrt{\lambda^2 \int_0^1 \tilde{B}_1(s)^2 ds + (1-\lambda)^2 \int_0^1 \tilde{B}_2(s)^2 ds}}$$

となる.

A. 3 回帰式が $\Delta \hat{u}_t = \phi \hat{u}_{t-1} + \hat{e}_t$ の場合の $T \hat{\phi}$ の帰無仮説下での漸近分布 (Model A)

以下, 2-1 の記法に従う. $y_t = \alpha_1 DU_{1t} + \alpha_2 DU_{2t} + \beta t + u_t$ の回帰式において,

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= \frac{\sum_{t=1}^T \{y_t DU_{1t} + y_t DU_{2t}\} \{(t-\bar{t}_1)DU_{1t} + (t-\bar{t}_2)DU_{2t}\}}{\sum_{t=1}^T \{(t-\bar{t}_1)DU_{1t} + (t-\bar{t}_2)DU_{2t}\}^2} \\ &= \frac{\sum_{t=1}^{T_B} y_t (t-\bar{t}_1) + \sum_{t=T_B+1}^T y_t (t-\bar{t}_2)}{\sum_{t=1}^{T_B} (t-\bar{t}_1)^2 + \sum_{t=T_B+1}^T (t-\bar{t}_2)^2} \\ &= \frac{\sum_{t=1}^{T_B} y_t (t-\bar{t}_1) + \sum_{t=T_B+1}^T y_t (t-\bar{t}_2)}{\frac{T^3}{12} \left\{ \left(\lambda^3 - \frac{\lambda}{T^2} \right) + \left((1-\lambda)^3 - \frac{(1-\lambda)}{T^2} \right) \right\}} + o(1) \end{aligned}$$

となるが, $\beta^* := \frac{\sum_{t=1}^{T_B} y_s (t-\bar{t}_1) + \sum_{t=T_B+1}^T y_s (t-\bar{t}_2)}{\frac{T^3}{12} \left\{ \left(\lambda^3 - \frac{\lambda}{T^2} \right) + \left((1-\lambda)^3 - \frac{(1-\lambda)}{T^2} \right) \right\}}$ とすれば,

$$\hat{u}_t = \left\{ y_t - \frac{\sum_{s=1}^{T_B} y_s}{\lambda T} - \beta^* (t-\bar{t}_1) \right\} DU_{1t} + \left\{ y_t - \frac{\sum_{s=T_B+1}^T y_s}{(1-\lambda)T} - \beta^* (t-\bar{t}_2) \right\} DU_{2t}$$

となる。帰無仮説の下では, $y_t = \eta_t + \alpha_1 DU_{1t} + \alpha_2 DU_{2t} + \beta t$ であるから,

$$\beta^* = \beta + \frac{\sum_{t=1}^{T_B} \xi_{[1,t]} (t-\bar{t}_1) + \sum_{t=T_B+1}^T \xi_{[T_B+1,t]} (t-\bar{t}_2)}{\frac{T^3}{12} \left\{ \left(\lambda^3 - \frac{\lambda}{T^2} \right) + \left((1-\lambda)^3 - \frac{(1-\lambda)}{T^2} \right) \right\}}$$

$$\begin{aligned} \hat{u}_t &= \left\{ \xi_{[1,t]} - \frac{\sum_{s=1}^{T_B} \xi_{[1,s]}}{\lambda T} - (\beta^* - \beta)(t-\bar{t}_1) \right\} DU_{1t} \\ &\quad + \left\{ \xi_{[T_B+1,t]} - \frac{\sum_{s=T_B+1}^T \xi_{[T_B+1,s]}}{(1-\lambda)T} - (\beta^* - \beta)(t-\bar{t}_2) \right\} DU_{2t} \end{aligned}$$

となる。漸近的には,

$$\sqrt{T}(\beta^* - \beta) = \frac{T^3 \lambda^{5/2} \frac{1}{\lambda T} \sum_{t=1}^{T_B} \frac{\xi_{[1,t]}}{\sqrt{\lambda T}} \frac{t - \bar{t}_1}{\lambda T} + T^3 (1-\lambda)^{5/2} \frac{1}{(1-\lambda)T} \sum_{t=T_B+1}^T \frac{\xi_{[T_B+1,t]}}{\sqrt{(1-\lambda)T}} \frac{t - \bar{t}_2}{(1-\lambda)T}}{\frac{T^3}{12} \left\{ \left(\lambda^3 - \frac{\lambda}{T^2} \right) + \left((1-\lambda)^3 - \frac{(1-\lambda)}{T^2} \right) \right\}} + o(1)$$

$$\xrightarrow{D} \frac{12 \left\{ \lambda^{5/2} \int_0^1 B_1(s) \left(s - \frac{1}{2} \right) ds + (1-\lambda)^{5/2} \int_0^1 B_2(s) \left(s - \frac{1}{2} \right) ds \right\}}{\lambda^3 + (1-\lambda)^3}$$

であり,

$$\frac{\hat{u}_t}{\sqrt{T}} = \sqrt{\lambda} \left\{ \frac{\xi_{[1,t]}}{\sqrt{\lambda T}} - \frac{1}{\lambda T} \sum_{t=1}^{T_B} \frac{\xi_{[1,t]}}{\sqrt{\lambda T}} - \sqrt{\lambda} \sqrt{T} (\beta^* - \beta) \frac{t - \bar{t}_1}{\lambda T} \right\} DU_{1t}$$

$$+ \sqrt{1-\lambda} \left\{ \frac{\xi_{[T_B+1,t]}}{\sqrt{(1-\lambda)T}} - \frac{1}{(1-\lambda)T} \sum_{t=T_B+1}^T \frac{\xi_{[T_B+1,t]}}{\sqrt{(1-\lambda)T}} - \sqrt{1-\lambda} \sqrt{T} (\beta^* - \beta) \frac{t - \bar{t}_2}{(1-\lambda)T} \right\} DU_{2t}$$

$$\text{となる. } \tilde{\beta} := \frac{12 \left\{ \lambda^{5/2} \int_0^1 B_1(s) \left(s - \frac{1}{2} \right) ds + (1-\lambda)^{5/2} \int_0^1 B_2(s) \left(s - \frac{1}{2} \right) ds \right\}}{\lambda^3 + (1-\lambda)^3} \text{ とおくと,}$$

$$\frac{\xi_{[1,t]}}{\sqrt{\lambda T}} - \frac{1}{\lambda T} \sum_{t=1}^{T_B} \frac{\xi_{[1,t]}}{\sqrt{\lambda T}} - \sqrt{\lambda} \sqrt{T} (\beta^* - \beta) \frac{t - \bar{t}_1}{\lambda T} \xrightarrow{D} B_1(s) - \int_0^1 B_1(s) ds - \sqrt{\lambda} \tilde{\beta} \left(s - \frac{1}{2} \right)$$

$$\frac{\xi_{[T_B+1,t]}}{\sqrt{(1-\lambda)T}} - \frac{1}{(1-\lambda)T} \sum_{t=T_B+1}^T \frac{\xi_{[T_B+1,t]}}{\sqrt{(1-\lambda)T}} - \sqrt{1-\lambda} \sqrt{T} (\beta^* - \beta) \frac{t - \bar{t}_2}{(1-\lambda)T}$$

$$\xrightarrow{D} B_2(s) - \int_0^1 B_2(s) ds - \sqrt{1-\lambda} \tilde{\beta} \left(s - \frac{1}{2} \right)$$

となり, 題意を得る.

A. 4 Dickey-Fuller検定の場合

$$2-1 \text{ の記法を用いる. まず Model C を考える. 回帰式を } \Delta y_t = \phi y_{t-1} + \sum_{i=1}^2 \alpha_i DU_{it} + \sum_{i=1}^2 \beta_i t DU_{it} + e_t$$

とする. また, DGP を,

$$y_t = \alpha_1 DU_{1t} + \beta_1 t DU_{1t} + \alpha_2 DU_{2t} + \beta_2 t DU_{2t} + \eta_t$$

とする. また, $Z = [\mathbf{du}_1 \quad \mathbf{tdu}_1 \quad \mathbf{du}_2 \quad \mathbf{tdu}_2]$, $M_Z = I - Z(Z'Z)^{-1}Z'$ とする. DGP の下で

$$y_{t-1} = \alpha_1 (DU_{1t} + D_t) + \beta_1 (t-1) (DU_{1t} + D_t) + \alpha_2 (DU_{2t} - D_t) + \beta_2 (t-1) (DU_{2t} - D_t) + \eta_{t-1}$$

$$= (\alpha_1 - \beta_1) DU_{1t} + \beta_1 t DU_{1t} + (\alpha_2 - \beta_2) DU_{2t} + \beta_2 t DU_{2t} + (\alpha_1 - \alpha_2 + (\beta_1 - \beta_2) T_B) D_t + \eta_{t-1}$$

であるが,

$$M_z y_{t-1} = M_z \eta_{t-1} + (\alpha_1 - \alpha_2 + (\beta_1 - \beta_2)T_B) M_z D_t$$

である。ここで、

$$M_z D_t = D_t - \frac{4 + 6\lambda T + 4(1-\lambda)T}{(1-\lambda)^2 T^2 + (1-\lambda)T} DU_{2t} + \left\{ \frac{6}{(1-\lambda)T + 1} \right\} \frac{t}{(1-\lambda)T} DU_{2t}$$

から、 $\frac{M_z y_{t-1}}{\sqrt{T}} = \frac{M_z \eta_{t-1}}{\sqrt{T}} + \frac{\alpha_1 - \alpha_2 + (\beta_1 - \beta_2)T_B}{T} \sqrt{T} D_t + o_p(1)$ となるので、

$$\frac{1}{T^2} \sum_{t=2}^T (M_z y_{t-1})^2 = \frac{1}{T^2} \sum_{t=2}^T (M_z \eta_{t-1})^2 + o_p(1) \text{ となる。 ところが、}$$

$$\Delta y_{t-1} = \varepsilon_t + \beta_1 DU_{1t} + \beta_2 DU_{2t} + \{(\alpha_2 - \alpha_1) + (\beta_2 - \beta_1)T_B\} D_t$$

であるので、

$$\sum_{t=2}^T \frac{\Delta y_{t-1}}{\sqrt{T}} \frac{M_z y_{t-1}}{\sqrt{T}} = \left(\frac{(\alpha_2 - \alpha_1) + (\beta_2 - \beta_1)T_B}{T} \right)^2 T + O_p(1)$$

となり、 $T\hat{\phi}$ は発散する ($\hat{\phi} = O_p(1)$ であり、 $\hat{\phi}$ の分布には nuisance parameter $\{\lambda(\beta_2 - \beta_1)\}^2$ が影響を与える)

しかし、回帰式に D_t が含まれれば、 $Z = [\mathbf{du}_1 \quad \mathbf{tdu}_1 \quad \mathbf{du}_2 \quad \mathbf{tdu}_2 \quad \mathbf{d}]$ として、

$M_z y_{t-1} = M_z \eta_{t-1} = M_{M_z} M_{[d]} \eta_{t-1}$ であるから、 $M_z y_{t-1} D_t = 0$ でそれ以外では、

$$\begin{aligned} M_z y_{t-1} &= \eta_{t-1} - \frac{\sum_{s=2}^{T_B-1} \eta_s}{T_B} DU_{1t} - (t - \bar{t}_1) \frac{12 \sum_{s=2}^{T_B-1} \eta_s (s - \bar{t}_1)}{T_B (T_B^2 - 1)} DU_{1t} \\ &\quad - \frac{\sum_{s=\bar{t}_2+1}^{T-1} \eta_s}{T - T_B - 1} (DU_{2t} - D_t) - (t - \bar{t}_2) \frac{12 \sum_{s=\bar{t}_2+1}^{T-1} \eta_s (s - \bar{t}_2)}{(T - T_B - 1) \{ (T - T_B - 1)^2 - 1 \}} (DU_{2t} - D_t) \\ &= \hat{u}_{t-1} + o_p(1) \end{aligned}$$

となり、さらに、 $\sum_{t=2}^T (M_z y_{t-1}) D_t = 0$ であるので、

$$\sum_{t=2}^T \Delta y_t M_z y_{t-1} = \sum_{t=2}^{T_B} \varepsilon_t \hat{u}_{t-1} + \sum_{t=\bar{t}_2+2}^T \varepsilon_t \hat{u}_{t-1} + o_p(1)$$

となる。あとは、2-1と同様にして、

$$\begin{aligned} T\hat{\phi} &\xrightarrow{D} \frac{\lambda \int_0^1 \tilde{B}_1(s) dB_1(s) + (1-\lambda) \int_0^1 \tilde{B}_2(s) dB_2(s)}{\lambda^2 \int_0^1 \tilde{B}_1(s)^2 ds + (1-\lambda)^2 \int_0^1 \tilde{B}_2(s)^2 ds} \\ t_{\hat{\phi}} &\xrightarrow{D} \frac{\lambda \int_0^1 \tilde{B}_1(s) dB_1(s) + (1-\lambda) \int_0^1 \tilde{B}_2(s) dB_2(s)}{\sqrt{\lambda^2 \int_0^1 \tilde{B}_1(s)^2 ds + (1-\lambda)^2 \int_0^1 \tilde{B}_2(s)^2 ds}} \end{aligned}$$

が証明できる。

Model Aに関しては、 $M_2 y_{t-1}$ 、および、 Δy_{t-1} に $O(T)$ の項が現れない。したがって、Dickey-Fuller検定において回帰式に D_t を入れなくても、帰無仮説において、

$$T\hat{\phi} \xrightarrow{D} \frac{\lambda \int_0^1 \bar{B}_1(s) dB_1(s) + (1-\lambda) \int_0^1 \bar{B}_2(s) dB_2(s)}{\lambda^2 \int_0^1 \bar{B}_1(s)^2 ds + (1-\lambda)^2 \int_0^1 \bar{B}_2(s)^2 ds}$$

$$t_{\hat{\phi}} \xrightarrow{D} \frac{\lambda \int_0^1 \bar{B}_1(s) dB_1(s) + (1-\lambda) \int_0^1 \bar{B}_2(s) dB_2(s)}{\sqrt{\lambda^2 \int_0^1 \bar{B}_1(s)^2 ds + (1-\lambda)^2 \int_0^1 \bar{B}_2(s)^2 ds}}$$

となる。

A. 5 Model A,Cの混在する場合

たとえば、2区間のAモデルでは

$$\beta^* := \frac{\sum_{s=1}^{T_B} y_s (s - \bar{t}_1) + \sum_{s=T_B+1}^T y_s (s - \bar{t}_2)}{\frac{T^3}{12} \left\{ \left(\lambda^3 - \frac{\lambda}{T^2} \right) + \left((1-\lambda)^3 - \frac{(1-\lambda)}{T^2} \right) \right\}}$$

であるから、一般的には

$$\sqrt{T} \beta^* \xrightarrow{D} \frac{12 \sum_{i=1}^K I A_i \lambda_i^{5/2} \int_0^1 B_i(r) (r-1/2) dr}{\sum_{i=1}^K I A_i \lambda_i^3} = \tilde{\beta}$$

となる。二区間Aモデルでは、

$$\hat{u}_t = \left\{ y_t - \frac{\sum_{s=1}^{T_B} y_s}{\lambda T} - \beta^* (t - \bar{t}_1) \right\} DU_{1t} + \left\{ y_t - \frac{\sum_{s=T_B+1}^T y_s}{(1-\lambda)T} - \beta^* (t - \bar{t}_2) \right\} DU_{2t}$$

となる。したがって、 $\bar{B}_i(s) = B_i(s) - \int_0^1 B_i(r) dr - \sqrt{\lambda_i} \tilde{\beta} (s-1/2)$ 、

$\tilde{B}_i(s) = B_i(s) - \int_0^1 B_i(r) dr - 12(s-1/2) \int_0^1 (r-1/2) B_i(r) dr$ とすると、

$$T\hat{\phi} \xrightarrow{D} \frac{\sum_{i=1}^K \lambda_i \int_0^1 \{ I A_i \bar{B}_i(r) + I C_i \tilde{B}_i(r) \} dB_i(r)}{\sum_{i=1}^K \lambda_i^2 \int_0^1 \{ I A_i \bar{B}_i(r)^2 + I C_i \tilde{B}_i(r)^2 \} dr}$$

が容易に得られる。

参考文献

- Bai, J. (1998) "A Note on Spurious Break," *Econometric Theory*, 14, 663-669.
- Hatanaka, M. and K. Yamada (1997) "A Characteristic of Japanese Macro-Economic Data in Relation to Unit Root Tests," mimeo.
- Kurozumi, E. (2002) "Testing for Stationarity with a Break," *Journal of Econometrics*, 108 (1), 63-99.
- Kwiatkowski, D., P. C. B. Phillips and .P. Schmidt (1992) "Testing the Null Hypothesis of Stationarity against the Alternative of a Unit Root," *Journal of Econometrics*, 54, 159-178.
- Montanes, A. (1997) "Level shifts, Unit Roots and Misspecification of the Breaking Date," *Economics Letters*, 54 (1), 7-14.
- Morimune, K. and M. Nakagawa (1997) "Unit Root Tests which allow for Multiple Trend Breaks," Discussion Paper No 457, Institute of Economic Research, Kyoto University.
- Morimune, M. and M. Nakagawa (1999) "The Discontinuous Trend Unit Root Test when the Break Point is misspecified," *Mathematics and Computers in Simulation*, 48, 417-427.
- Morimune, K. and M. Nakagawa (2001) "Power Comparisons of the Discontinuous Trend Unit Root Tests," in Chapter 13 of '*Nonlinear Statistical Modeling: Proceedings of the Thirteenth International Symposium in Economic Theory and Econometrics: Essays in Honor of Takeshi Amemiya*,' Edited by C. Hsiao, K. Morimune, J. L. Powell, Cambridge University Press.
- Morimune, K. and M. Nakagawa (2004) "Discontinuous Trend Unit Root Test with a Break Interval," *The Kyoto Economic Review*, 73:41-55.
- Nelson, C. R. and C. I. Plosser (1982) "Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series," *Journal of Monetary Economics*, 10, 139-162.
- Nunes, L. C., C. M. Kuan and P. Newbold (1995) "Spurious Break," *Econometric Theory*, 11, 736-749.
- Park, J. Y. and Sung, J. (1994), "Testing for Unit Roots in Models with Structural Change," *Econometric Theory*, 10, 917-936.
- Perron, P. (1989) "The Great Crash, the Oil Price Shock, and the Unit Root Hypothesis," *Econometrica*, 57, 1361-1401.
- Perron, P. and J. Vogelsang, (1993) "Erratum for "The Great Crash, the Oil Price Shock, and the Unit Root Hypothesis"," *Econometrica*, 61, 248-249.
- Perron, P. and J. Vogelsang, (1998) "Additional Tests for a Unit Root Allowing for a Break in the Trend Function at an Unknown Time," *International Economic Review*, 39, 1073-1100.
- Zivot, E. and , W. K. Andrews (1992) "Further Evidence on the Great Crash, the Oil-Price Shock, and the Unit Root Hypothesis," *Journal of Business and Economic Statistics*, 10, 251-270