

氏名	畑中 美帆	
学位の種類	博士 (理学)	
学位記番号	第 6225 号	
授与報告番号	甲第 3510 号	
学位授与年月日	平成 28 年 3 月 22 日	
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1 項該当者	
学位論文名	<b>Topology of toric manifolds and graphs</b> <b>(トーリック多様体のトポロジーとグラフ)</b>	
論文審査委員	主査 教授 柘田 幹也	副査 教授 金信 泰造
	副査 教授 鎌田 聖一	

### 論文内容の要旨

本論文では、4つのトピックについて書いている。1つめのトピックはトーリック多様体の直積分解の一意性についてである。トーリック多様体を直積分解するとき、代数多様体として分解する方法と微分可能な多様体として分解する方法の2種類が考えられる。どちらを取るかによって分解の仕方が変わってくるため、両方の場合について考えている。さらに、コンパクトトーラス作用を持つ単連結でコンパクトな4次元多様体と複素1次元の複素射影空間の範疇で、微分可能な多様体としての直積分解の一意性についてと、実2次元以下の実トーリック多様体の微分可能な多様体としての直積分解の一意性についても書いている。

2つめのトピックは、グラフから作ったトーリック多様体にスピン構造が入るかどうかを判定し、スピン構造が入るトーリック多様体を構成できるグラフを特徴づけるというものである。ここでのグラフとは、通常の単純グラフだけでなく多重辺やループも許した pseudograph も入る。さらに、building set からトーリック多様体を構成することができ、スピン構造が入るトーリック多様体を構成できる building set の特徴づけもしている。

3つめのトピックは、単純グラフから作った graph associahedron の facet vectors の集合が、ちょうどルート系と一致するような単純グラフはサイクルグラフのみであり、このときのルート系はA型であることについて証明している。

4つめのトピックは、グラフの自己同型群による作用が導く、トーリック多様体のコホモロジー環の表現を記述するというものである。一般のグラフでこの表現を記述することはできないため、グラフを特別なものに制限して考える。前半は3,4,5頂点を持つサイクルグラフからできるトーリック多様体のコホモロジー環の二面体群による表現を記述している。サイクルグラフを選んだのは、3つめのトピックでサイクルグラフだけが出てきたからである。後半は完全グラフから辺を1本だけ除いたグラフからできるトーリック多様体のコホモロジー環の2つの対称群の直積による表現を記述している。

### 論文審査の結果の要旨

本論文は、トーリック多様体に関する2つの話題を扱っている。

1つ目の話題は、トーリック多様体の直積分解に関する一意性問題である。トーリック多様体は代数多様体であるが、代数多様体として直積分解したときに分解が一意であることを、トーリック多様体に対応する組合せ論の対象である扇の直積分解が一意であることを示すことによって証明している。次にトーリック多様体の可微分多様体としての直積分解の一意性を論じている。これに関しては、一般的な答えは得られていないが、低次元のときは直積分解が一意であることを示している。

2つ目の話題は、グラフ  $G$  から得られるトーリック多様体  $X(G)$  についてである。まず、 $X(G)$  がスピン構造を許す時のグラフ  $G$  を特徴づけている。次に、 $X(G)$  に対応する扇のエッジベクトルの集合がルート系となるグラフ  $G$  はサイクルグラフに限り、そのルート系はA型であることを示している。一方、A型ルート系の Weyl chamber から定まる扇に対応するトーリック多様体は、完全グラフから定まるトーリック多様体である。したがって、「サイクルグラフと完全グラフは、(この立場から見ると)互いに双対である」という興味深い事実を得ている。完全グラフから定まるトーリック多様体は permutohedral variety と呼ばれる重要な対象で、対称群が作用し、そのコホモロジーの対称群表現が Procesi により決定されている。一方、サイクルグラフに対応するトーリック多様体には2面体群が作用し、そのコホモロジーの2面体群表現を本論文では調べている。一般次元の場合には決定出来ていないが、低次元の場合には完全な答えを得ている。また、完全グラフから1本辺を除いたグラフに対応するトーリック多様体のコホモロジー表現も調べており、これに関しては一般次元で決定している。

以上、本論文の結果は重要な知見をもたらしており、博士（理学）の学位を授与するに値するものと審査した。