

氏名	堀口 達也
学位の種類	博士(理学)
学位記番号	第 6227 号
授与報告番号	甲第 3512 号
学位授与年月日	平成 28 年 3 月 22 日
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1 項該当者
学位論文名	<b>Equivariant cohomology rings of Springer varieties and regular nilpotent Hessenberg varieties</b> <b>(スプリンガー多様体と正則な冪零ヘッセンバーク多様体の同変コホモロジー環)</b>
論文審査委員	主査 教授 柘田 幹也 副査 教授 谷崎 俊之 副査 教授 兼田 正治 副査 McMaster 大学准教授 原田芽ぐみ

### 論文内容の要旨

(A 型) ヘッセンバーク多様体は旗多様体の部分多様体であり、冪零型と呼ばれるヘッセンバーク多様体は対称群の表現と関係のあるスプリンガー多様体や旗多様体の量子コホモロジーと関係のあるピーターソン多様体を特別な場合として含む。ピーターソン多様体の自然な一般化として正則な冪零ヘッセンバーク多様体と呼ばれるものがある。スプリンガー多様体と正則な冪零ヘッセンバーク多様体は冪零型のヘッセンバーク多様体の極端な場合である。スプリンガー多様体のコホモロジー環の明示的な表示(多項式環をイデアルで割った表示)は DeConcini-Procesi により与えられ、Tanisaki はその表示を簡明なものにした。一方、ピーターソン多様体の(同変)コホモロジー環の明示的な表示については、Fukukawa-Harada-Masuda により与えられており、その一般化である正則な冪零ヘッセンバーク多様体の(同変)コホモロジー環については、Brion-Carrell や Insko により調べられている。ただし、Brion-Carrell や Insko により、すべての正則な冪零ヘッセンバーク多様体の(同変)コホモロジー環の明示的な表示が完全に与えられた訳ではない。

本論文では、(A 型) スプリンガー多様体と (A 型) 正則な冪零ヘッセンバーク多様体の同変コホモロジー環の明示的な表示を与えた。特に、(A 型) 正則な冪零ヘッセンバーク多様体のコホモロジー環の明示的な表示は、多項式環を正則列で生成されるイデアルで割った形として与えられる(多項式環の変数の個数と正則列の個数は同じである)ことが分かり、そのことから (A 型) 正則な冪零ヘッセンバーク多様体のコホモロジー環は Poincare 双対性を満たすことが分かる。また、任意の Lie 型のピーターソン多様体の(同変)コホモロジー環の簡明な表示も与えた。その表示は Cartan 行列を用いて与えられ、Lie 型によらず一様な表示である。

### 論文審査の結果の要旨

本論文は、旗多様体の部分多様体である Hessenberg variety の(同変)コホモロジー環を調べている。Hessenberg variety は 2 つのパラメーターから定まる。1 つは  $n$  次正方形行列  $A$ 。もう 1 つは、1 から  $n$  までの整数の集合  $[n]$  からそれ自身への狭義単調増加関数  $h$  で、 $h(i) \geq i$  ( $i$  は  $[n]$  の元)をみたすもの(Hessenberg 関数)である。Hessenberg variety の族は、これまでバラバラに研究されてきた幾何学的対象を包括した族で、少しずつ様子が分かって来ているが不明な部分が多く、非常に興味ある研究対象である。

行列  $A$  が冪零のとき、Hessenberg variety を nilpotent という。Nilpotent Hessenberg variety の族の中で、( $A$  は任意で) Hessenberg 関数  $h$  が恒等写像のときは、対称群の既約表現の幾何学的実現を与える Springer variety に他ならず、一方( $h$  は任意で)  $A$  の階数が最大の  $n-1$  であるときは、regular nilpotent と呼ばれているものになる。本論文では、これら 2 つの両極端な場合に(同変)コホモロジー環を決定している。Springer variety に関しては、通常のコホモロジー環は既に決定されており、本論文の寄与は同変コホモロジー環を決定したことである。一方 regular nilpotent の場合は、これまでコホモロジーの加群構造(ベッチ数)は分かっていたが、本論文によって初めて環構造が決定された。この環構造の決定は基本的な結果で、この分野の研究を推進すると期待される。

なお上記の話は A 型の場合で、一般のリー型で Hessenberg variety が定義されている。Regular nilpotent Hessenberg variety の族の中に、旗多様体の量子コホモロジーに関連する Peterson variety と呼ばれるものがあり、本論文では、一般のリー型の Peterson variety のコホモロジー環も決定している。

以上、本論文の結果は重要な知見をもたらしており、博士(理学)の学位を授与するに値するものと審

査した.