

氏 名 森本 真弘

学 位 の 種 類 博士 (理学)

学 位 授 与 年 月 日 令和2年3月24日

学 位 論 文 名 Minimal PF submanifolds in Hilbert spaces with symmetries  
(ヒルベルト空間内の対称性をもつ極小固有フレドホルム部分多様体)

論文審査委員 主査 教授 大仁田 義裕

副査 教授 栢田 幹也

副査 教授 田丸 博士

#### 論文内容の要旨

有限次元リーマン多様体内において、特殊な対称性をもつ極小部分多様体がいくつか知られている。代表的な例として、鏡映部分多様体 (D. S. Leung), 弱鏡映部分多様体 (井川-酒井-田崎), オースティア部分多様体 (Harvey-Lawson), アリッド部分多様体 (武富) がある。当論文では、これらの概念がヒルベルト空間の固有フレドホルム部分多様体 (PF 部分多様体) (Terng) に対して定義され、無限次元の弱鏡映 PF 部分多様体, オースティア PF 部分多様体, アリッド PF 部分多様体が、平行移動写像と呼ばれる無限次元リーマン沈め込みによって多数得られることが示される。更にこれらの結果を通して、無限次元ヒルベルト空間内に全測地的でない等質極小 PF 部分多様体が多数存在することが判明する。有限次元ユークリッド空間において、等質極小部分多様体は全測地的なものに限ることが知られており (Di Scala), 故に当結果は有限次元部分多様体と無限次元部分多様体の1つの決定的差を示すと言える。

当論文は4つの節から成る。第1節では、PF 部分多様体に関連する基本事実が述べられた後、鏡映 PF 部分多様体, 弱鏡映 PF 部分多様体, オースティア PF 部分多様体, アリッド PF 部分多様体が定義・研究される。第2節では、平行移動写像を通して得られる PF 部分多様体の第二基本形式, 形作用素, 主曲率公式が示され、特にその PF 部分多様体が全測地的部分多様体となるための必要十分条件が与えられる。第3節では、平行移動写像を通して得られる PF 部分多様体の対称性が研究される。特に平行移動写像の各ファイバーは弱鏡映 PF 部分多様体であることが証明され、他にも無限次元ヒルベルト空間内の等質極小 PF 部分多様体の例が多数示される。第4節において、等質極小 PF 部分多様体について上で述べた有限次元・無限次元の差が述べられ、関連する問題が議論される。

#### 論文審査結果の要旨

本論文の研究は、微分幾何学において、有限次元ユークリッド空間内の部分多様体理論を、可分ヒルベルト空間内の無限次元部分多様体に拡張できるか、という問題に関わる。1980年代に Chuu-lian Terng, Richard Palais らによって、モース理論の観点からヒルベルト空間内の無限次元 PF (proper Fredholm 固有なフレドホルム) 部分多様体

の概念が導入された。各コンパクトリー群及びその対称リーマン空間、より一般に正規等質リーマン空間上には、そのリー代数に値をもつ  $L^2$  関数全体の可分ヒルベルト空間からの平行移動写像と呼ばれる無限次元リーマンサブマーシジョンが随伴され、その閉部分多様体の逆像は PF 部分多様体になることが知られている。申請者は、有限次元閉部分多様体の逆像として得られる PF 部分多様体の第 2 基本形式及び形作用素を記述する精密な公式を最も一般的な設定のもとで新たに計算した。また、極小曲面の一般化としてリーマン多様体の極小部分多様体（平均曲率が零な部分多様体）は基本的かつ重要な幾何学的対象で、ある対称性をもった極小部分多様体の特殊クラスとして鏡映部分多様体、弱鏡映部分多様体、*austere* 部分多様体、*arid* 部分多様体がよく知られている。申請者は、平行移動写像のファイバーが弱鏡映 PF 部分多様体になることを示したことをきっかけに、平行移動写像のもとで、そのような各種の対称性をもつ有限次元極小部分多様体の逆像であるヒルベルト空間内の PF 部分多様体が弱鏡映、*austere*、或いは *arid* となることを証明し、また、適切な設定の下、その逆も成り立つことも証明している。申請者の定理は、ヒルベルト空間内の各種の対称性をもつ非常に多くの全測地的（アフィン線形部分空間）でない無限次元等質極小 PF 部分多様体の存在と具体例を提供する。有限次元ユークリッド空間内の等質極小部分多様体は全測地的に限ることが知られており、有限次元と無限次元部分多様体の微分幾何学の相違を明示している。本論文は、有限次元から無限次元に亘る対称性と極小部分多様体の微分幾何学に新たな知見と今後の研究の多くの示唆を与えるものである。

よって、博士（理学）の学位の授与に値すると審査した。