

Osaka Central Advanced Mathematical Institute (OCAMI)
Osaka Metropolitan University
MEXT Joint Usage/Research Center on Mathematics and Theoretical Physics

OCAMI Reports Vol. 1 (2024)
doi: 10.24544/omu.20240328-001

Quandles and Symmetric Spaces 2023

Organized by
Seichi Kamada
Akira Kubo
Takayuki Okuda
Kanakano Oshiro
Hiroshi Tamaru
Makiko Sumi Tanaka
Hiroyuki Tasaki

January 26–27, 2024

Abstract

The workshop “Quandles and Symmetric Spaces” has been held annually since 2018. This volume records the abstracts and the slides of talks presented in this workshop on 2024.

2020 Mathematics Subject Classification.
53C35, 57K12

Key words and Phrases.
Quandles, Symmetric spaces

© 2024 OCAMI.

OCAMI. Quandles and Symmetric Spaces 2023. OCAMI Reports. Vol. 1, Osaka Central Advanced Mathematical Institute, Osaka Metropolitan University. 2024, 138 pp. doi: 10.24544/omu.20240328-001

Preface

The workshop “Quandles and Symmetric Spaces” has been held annually since 2018 in order to encourage the cross-pollination among topology (knot theory), differential geometry (symmetric spaces), and other areas through quandles. The series of workshops was organized by experts of knot theory (Kamada and Oshiro) and symmetric spaces (Kubo, Okuda, Tamaru, Tanaka and Tasaki). There have been many presenters and participants from various fields, not only topology and differential geometry but also algebraic geometry and combinatorics, etc.

On the conference “Quandles and Symmetric Spaces 2023”, the talks consisted of presentations by young researchers and seasoned experts. Some of their topics are as below:

- Euler characteristic of quandles,
- multiple conjugation quandles and G -families of quandles,
- generalized Alexander quandles of finite groups,
- embeddings of smooth quandles into Lie groups.

All of the talks are very interesting, and after the talks, the participants exchanged their ideas and information, and discussed possible perspectives actively.

In this volume the abstracts and the slides of the talks in the conference are collected. For the talks in 2019–2022, one can refer to the previous volumes in OCAMI Reports (Vol. 4 and Vol. 9 in 2021 and Vol. 9 in 2022). The organizers are convinced that the workshops and the volumes would disseminate quandles, and be effective for further developments of the theory of quandles.

March 2024

On behalf of the organizers:
Akira Kubo
Takayuki Okuda
Hiroshi Tamaru

Organizers

Seiichi Kamada

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka University,
1-1 Machikaneyama-cho, Toyonaka, Osaka 560-0043, Japan

Email address: kamada@math.sci.osaka-u.ac.jp

Akira Kubo

Department of Food Sciences and Biotechnology, Hiroshima Institute of Technology,
2-1-1 Miyake, Saeki-ku, Hiroshima 731-5193, Japan

Email address: a.kubo.3r@cc.it-hiroshima.ac.jp

Takayuki Okuda

Graduate School of Advanced Science and Engineering, Hiroshima University,
1-3-1 Kagamiyama, Higashihiroshima, Hiroshima 739-8526, Japan

Email address: okudatak@hiroshima-u.ac.jp

Kanako Oshiro

Department of Information and Communication Sciences, Sophia University,
7-1 Kioi-cho, Chiyoda-ku, Tokyo 102-8554, Japan

Email address: oshirok@sophia.ac.jp

Hiroshi Tamaru

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka Metropolitan University,
3-3-138 Sugimoto, Sumiyoshi-ku, Osaka 558-8585, Japan

Email address: tamaru@omu.ac.jp

Makiko Sumi Tanaka

Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Tokyo University of
Science,
2641 Yamazaki, Noda, Chiba 278-8510, Japan

Email address: tanaka_makiko@rs.tus.ac.jp

Hiroyuki Tasaki

Department of Mathematical Sciences, Faculty and Graduate School of Science, Tokyo
Metropolitan University,
1-1 Minami-Osawa, Hachioji, Tokyo 192-0397, Japan

Email address: tasaki@tmu.ac.jp

Contents

Ryoya Kai and Hiroshi Tamaru <i>A note on quandle Euler characteristics</i>	1
Kyoji Sugimoto <i>Antipodal sets of pseudo-Riemannian symmetric R-spaces</i>	12
Yuta Taniguchi <i>Multiple conjugation quandles and G-families of quandles</i>	26
Toshiyuki Akita <i>On associated groups of quandles</i>	41
Jin Kosaka <i>On generalized Alexander quandles arising from finite groups</i>	53
Kentaro Yonemura <i>An embedding of a smooth quandle into Lie group</i>	68
Masamichi Deguchi <i>Canonical connections on $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-symmetric spaces</i>	92
Teruo Nagase and Akiko Shima <i>Distinguishing surface-links described by 4-charts with 2 crossings and 8 black vertices</i>	102
Atsushi Ishii, Kengo Kawamura, Kanako Oshiro and Yuta Taniguchi <i>Shade quandle presentations for oriented links</i>	116

A note on quandle Euler characteristics

Ryoya Kai and Hiroshi Tamaru
(Presenter: Ryoya Kai)

ABSTRACT. A quandle is an algebraic system whose axioms are a generalization of the algebraic structure of the point symmetries of symmetric spaces. In this report, we give a definition of Euler characteristics of quandles. This is based on a formula for Euler characteristics of the symmetric space in terms of group actions. We also calculate Euler characteristics of some finite quandles.

1 Preliminary

Definition 1.1 ([2]). For a non-empty set X and a map $s : X \rightarrow \text{Map}(X, X)$, the pair (X, s) is called a *quandle* if the following three conditions hold:

- (i) $s_x(x) = x$ for any $x \in X$,
- (ii) $s_x : X \rightarrow X$ is a bijection,
- (iii) $s_x \circ s_y = s_{s_x(y)} \circ s_x$ for any $x, y \in X$.

Let $(X, s^X), (Y, s^Y)$ be quandles. A map $f : X \rightarrow Y$ is called a *quandle homomorphism* if $f \circ s_x^X = s_{f(x)}^Y \circ f$ for any $x \in X$. A map $f : X \rightarrow Y$ is called a *quandle isomorphism* if f is a bijective quandle homomorphism. Note that point symmetries $s_x : X \rightarrow X$ are quandle isomorphisms.

The *quandle automorphism group* $\text{Aut}(X)$ is the group consisting of all quandle isomorphisms from X to X . This group acts on X from the left. The subgroup of $\text{Aut}(X)$ generated by all point symmetries is called the *inner automorphism group* and is denoted by $\text{Inn}(X)$. The following group is defined by Joyce [2, §5] as the transvection group.

Definition 1.2 ([2]). The subgroup of $\text{Inn}(X)$ defined by

$$\text{Dis}(X) = \langle s_x \circ s_y^{-1} \mid x, y \in X \rangle_{\text{Grp}}$$

is called the *displacement group* of X .

2 Definition and properties of the quandle Euler characteristic

Definition 2.1. Let X be a quandle. Then the *quandle Euler characteristic* $\chi^{\text{Qdle}}(X)$ is defined by

$$\chi^{\text{Qdle}}(X) := \inf\{\#\text{Fix}(g) \mid g \in \text{Dis}(X)\}.$$

A Riemannian symmetric space is a quandle by the point symmetries. The following theorem states that the quandle Euler characteristic matches the Euler characteristic as topological space for a Riemannian symmetric space.

Theorem 2.2. *For a compact Riemannian symmetric space, the quandle Euler characteristic is equal to the topological Euler characteristic.*

The proof is based on the fact that the Euler characteristic of a homogeneous space of a compact Lie group can be calculated by the action of the maximal torus [1].

For a group G and a group automorphism $\sigma \in \text{Aut}(G)$, the *generalized Alexander quandle* $Q(G, \sigma)$ is a quandle (G, s) , where the map $s : G \rightarrow \text{Map}(G, G)$ is defined by $s_h(g) = h\sigma(h^{-1}g)$ for $g, h \in G$. The next proposition is an analogy of the fact that the Euler characteristic of a nontrivial connected compact Lie group is 0.

Proposition 2.3. *If σ is a non-trivial group automorphism, then the quandle Euler characteristic of the generalized Alexander quandle $Q(G, \sigma)$ is equal to 0.*

For given quandles (X_1, s^1) and (X_2, s^2) , we can define a quandle structure on the disjoint union $X_1 \coprod X_2$ with point symmetries defined by

$$s_x(y) = \begin{cases} y & \text{if } \{x, y\} \not\subset X_0, X_1, \\ s_x^i(y) & \text{if } \{x, y\} \subset X_i. \end{cases}$$

The next proposition is an analogy of the fact that the Euler characteristic of disjoint union of topological spaces is equal to the sum of the Euler characteristics of the components.

Proposition 2.4. $\chi^{\text{Qdle}}(X_1 \coprod X_2) \leq \chi^{\text{Qdle}}(X_1) + \chi^{\text{Qdle}}(X_2)$.

3 Examples of quandle Euler characteristics of finite quandles

In this section, we calculate quandle Euler characteristics for finite subquandles of some Riemannian symmetric spaces and connected quandles with low order.

The n -dimensional unit sphere S^n is a Riemannian symmetric space. The subset $Q(n+1, 1) := \{\pm e_i\}$ is a finite subquandle of S^n .

Theorem 3.1. *For $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, it satisfies*

$$\chi^{\text{Qdle}}(Q(n+1, 1)) = \begin{cases} 0 & \text{if } n \text{ is odd,} \\ 2 & \text{if } n \text{ is even.} \end{cases}$$

In particular, the quandle Euler characteristic of $Q(n+1, 1)$ is equal to the topological Euler characteristic of S^n .

For $n, k \in \mathbb{Z}_{>0}$ with $n > k$, the real oriented Grassmannian manifold $\text{Gr}^+(n, k)$ is a set of oriented k -dimensional subspaces in \mathbb{R}^{n+1} . We consider a finite subquandle $Q(n, k)$ of $\text{Gr}^+(n, k)$ defined by

$$Q(n, k) = \{(W, \sigma_W) \mid W = \text{span}(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}), \sigma_W : \text{an orientation of } W\}.$$

Note that $\text{Gr}^+(n+1, 1)$ is the n -dimensional sphere S^n and $Q(n+1, 1)$ is the quandle defined above.

Theorem 3.2. *If n is even and k is odd, then the quandle Euler characteristic of $Q(n, k)$ is equal to the topological Euler characteristic of $\text{Gr}^+(n, k)$.*

A quandle is called *connected* if the inner automorphism group $\text{Inn}(X)$ acts transitively. Vendramin [3] listed connected quandles with order less than 48. The following theorem is a result of a calculation using a computer.

Theorem 3.3. *For any non-trivial connected quandle X with order less than 48, the quandle Euler characteristic is equal to 0.*

References

- [1] H. Hopf and H. Samelson. Ein Satz über die Wirkungsräume geschlossener Liescher Gruppen. *Commentarii Mathematici Helvetici*, Vol. 13, pp. 240–251, 1941.
- [2] D. Joyce. A classifying invariant of knots, the knot quandle. *Journal of Pure and Applied Algebra*, Vol. 23, No. 1, pp. 37–65, 1982.
- [3] L. Vendramin. Rig, a GAP package for racks, quandles and Nichols algebras. <http://code.google.com/p/rig/>.

(R. Kai) Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka Metropolitan University, 3-3-138, Sugimoto, Sumiyoshi-ku, Osaka, 558-8585, Japan

Email address: `sw23889b@st.omu.ac.jp`

(H. Tamaru) Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka Metropolitan University, 3-3-138, Sugimoto, Sumiyoshi-ku, Osaka, 558-8585, Japan

Email address: `tamaru@omu.ac.jp`

カンドルのオイラー数

甲斐涼哉
(田丸博士氏 (阪公大) との共同研究)

大阪公立大学

2024/1/26
カンドルと対称空間 © 大阪公立大学

概略

定義

カンドル X のオイラー数を次で定義する：

$$\chi^{\text{Qdle}}(X) := \inf\{\#\text{Fix}(g) \mid g \in \text{Dis}(X)\}$$

内容

- オイラー数の定義
- オイラー数の性質
 - ① 対称空間のオイラー数
 - ② 群のオイラー数
 - ③ 直和のオイラー数
- 計算例
 - ① 球面の離散部分カンドル
 - ② 有向 Grassmann 多様体の離散部分カンドル
 - ③ 連結カンドル

1 定義

2 性質

3 例

甲斐涼哉 (OMU)

1 / 11

1 定義

2 性質

3 例

甲斐涼哉 (OMU)

1 / 11

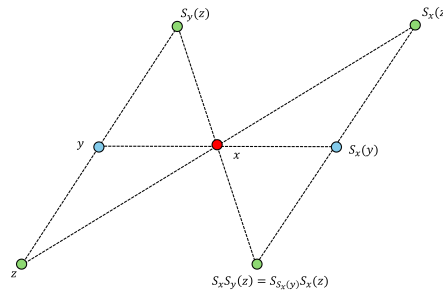
カンドル

定義 (Joyce, Matveev)

$X \neq \emptyset$: 集合, $s : X \rightarrow \text{Map}(X, X); x \mapsto s_x$: 写像
 (X, s) : カンドル

$\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 次の3条件を満たす:

- $\forall x \in X, s_x(x) = x$,
- $\forall x \in X, s_x : X \rightarrow X$: 全単射,
- $\forall x, y \in X, s_x \circ s_y = s_{s_x(y)} \circ s_x$.



甲斐涼哉 (OMU)

2 / 11

カンドル準同型と Euler 数の定義

$(X, s^X), (Y, s^Y)$: カンドル, $f : X \rightarrow Y$: 写像.

- f : カンドル準同型 $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall x \in X, f \circ s_x^X = s_{f(x)}^Y \circ f$.
- f : カンドル同型 $\stackrel{\text{def}}{\iff} f$: 全単射カンドル準同型.

注: $s_x : X \rightarrow X$: カンドル同型 ($x \in X$).

定義

$X = (X, s)$: カンドル

- $\text{Aut}(X) := \{f : X \rightarrow X \mid f : \text{カンドル同型}\}$: 自己同型群
- $\text{Inn}(X) := \langle s_x \mid x \in X \rangle < \text{Aut}(X)$: 内部自己同型群
- $\text{Dis}(X) := \langle s_x \circ s_y^{-1} \mid x, y \in X \rangle < \text{Inn}(X)$: Displacement 群

定義

カンドル X のオイラー数を次で定義する:

$$\chi^{\text{Qdle}}(X) := \inf\{\#\text{Fix}(g) \mid g \in \text{Dis}(X)\}$$

甲斐涼哉 (OMU)

3 / 11

① 定義

② 性質

③ 例

甲斐涼哉 (OMU)

3 / 11

性質 1: 対称空間のオイラー数

$$\chi^{\text{Qdle}}(X) := \inf\{\#\text{Fix}(g) \mid g \in \text{Dis}(X)\}$$

事実 (等質空間のオイラー数)

M : コンパクト Lie 群 G の等質空間,

$T = \overline{\langle \exists g_0 \rangle} < G$: 極大トーラス.

このとき,

$$\chi^{\text{Top}}(M) = \#\text{Fix}(T \curvearrowright M) = \#\text{Fix}(g_0)$$

命題 (対称空間のオイラー数)

X : 連結コンパクト Riemann 対称空間

$$\implies \chi^{\text{Qdle}}(X) = \chi^{\text{Top}}(X).$$

甲斐涼哉 (OMU)

4 / 11

性質 2: 群のオイラー数

$$\chi^{\text{Qdle}}(X) := \inf\{\#\text{Fix}(g) \mid g \in \text{Dis}(X)\}$$

G : 群, $\sigma \in \text{Aut}(\cdot)G$, $h \in G$, $s_h(g) := h\sigma(h^{-1}g)$,
 $\rightsquigarrow Q(G, \sigma) := (G, s)$: 一般 Alexander カンドル

命題

$Q(G, \sigma)$: 一般 Alexander カンドル, $\sigma \neq 1$
 $\implies \chi^{\text{Qdle}}(Q(G, \sigma)) = 0$.

注意

$G \neq 1$: 連結コンパクト Lie 群 $\implies \chi^{\text{Top}}(G) = 0$

性質 3: 直和のオイラー数

$$\chi^{\text{Qdle}}(X) := \inf\{\#\text{Fix}(g) \mid g \in \text{Dis}(X)\}$$

$(X_1, s^1), (X_2, s^2)$: カンドル, $x, y \in X_1 \amalg X_2$,

$$s_x(y) := \begin{cases} y & \text{if } \{x, y\} \not\subset X_0, X_1 \\ s_x^i(y) & \text{if } \{x, y\} \subset X_i \end{cases}$$

$\rightsquigarrow (X_1 \amalg X_2, s)$: カンドル

命題

直和の Euler 数 $\chi^{\text{Qdle}}(X_1 \amalg X_2) \leq \chi^{\text{Qdle}}(X_1) + \chi^{\text{Qdle}}(X_2)$

注意

$\chi^{\text{Top}}(X_1 \amalg X_2) = \chi^{\text{Top}}(X_1) + \chi^{\text{Top}}(X_2)$.

① 定義

② 性質

③ 例

甲斐涼哉 (OMU)

6 / 11

球面の有限部分カンドル

$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\} \cong SO(n+1)/SO(n)$
 S^n には対称空間としてカンドル構造を与える.

$Q(n+1, 1) = \{\pm e_i \mid i = 1, \dots, n+1\} \subset S^n$: 有限部分カンドル

定理

$$\chi^{\text{Qdle}}(Q(n+1, 1)) = \begin{cases} 0 & n: \text{奇数} \\ 2 & n: \text{偶数} \end{cases}$$

注意

$$\chi^{\text{Top}}(S^n) = \begin{cases} 0 & n: \text{奇数} \\ 2 & n: \text{偶数} \end{cases}$$

甲斐涼哉 (OMU)

7 / 11

有向 Grassmann 多様体の有限部分カンドル

$n, k \in \mathbb{Z}_{>0}, n > k$

$$\begin{aligned} \text{Gr}^+(n, k) &= \{(W, \sigma_W) \mid W < \mathbb{R}^n : k \text{ 次元部分空間}, \sigma_W : W \text{ の向き} \} \\ &\cong SO(n)/(SO(k) \times SO(n-k)) \end{aligned}$$

$\text{Gr}^+(n, k)$ には対称空間としてカンドル構造を与える.

$Q(n, k) = \{(W, \sigma_W) \mid W = \text{span}(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})\} \subset \text{Gr}^+(n, k)$: 有限部分カンドル

Table: オイラー数 $\chi^{\text{Qdle}}(Q(n, k))$ ($\chi^{\text{Top}}(\text{Gr}^+(n, k))$)

$k \setminus n$	2	3	4	5	6	7	8
1	0(0)	2(2)	0(0)	2(2)	0(0)	2(2)	0(0)
2	-	-	4(4)	8(4)	14(6)	18(6)	24(8)
3	-	-	-	-	0(0)	30(6)	0(0)
4	-	-	-	-	-	-	60(12)

有向 Grassmann 多様体の有限部分カンドル

定理

n : 偶数, k : 奇数 $\implies \chi^{\text{Qdle}}(Q(n, k)) = 0$

概略.

$$G = \left\langle \left(\begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{array} \right) \middle| \begin{array}{l} \#\{i \mid \varepsilon_i = 1\} = k, \\ \#\{i \mid \varepsilon_i = -1\} = n - k \end{array} \right\rangle_{\text{Grp}} \quad \text{とすると,}$$

全射準同型 $\phi : G \rightarrow \text{Inn}(Q(n, k))$ が存在する.

- ① $\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}, \forall k < n, 1 \leq \forall i < \forall j \leq n,$
 $\phi(\text{diag}(1, \dots, \underbrace{-1}_i, \dots, \underbrace{-1}_j, \dots, 1)) \in \text{Dis}(Q(n, k)).$
- ② n : 偶数 $\implies \phi(-I) \in \text{Dis}(Q(n, k)).$
- ③ n : 偶数, k : 奇数 $\implies \text{Fix}(\phi(-I)) = \emptyset.$

連結カンドル

X : 連結カンドル $\stackrel{\text{def}}{\iff} \text{Inn}(X) \curvearrowright X$: 推移的

定理

X : 非自明な連結カンドル
 $\#X \leq 47 \implies \chi(X) = 0$

- 連結カンドルの乗算表のリスト [Vendramin,2014] を用いた
- 位数 47 以下の非自明連結カンドルは 710 個

今後の課題

問

$\exists? X_1, X_2$: カンドル, s.t. $\chi^{\text{Qdle}}(X_1 \amalg X_2) < \chi^{\text{Qdle}}(X_1) + \chi^{\text{Qdle}}(X_2)$.

問

- $\forall n, k, \chi^{\text{Top}}(\text{Gr}^+(n, k)) \leq \chi^{\text{Qdle}}(Q(n, k))$.
- より一般に,
 X : コンパクト Riemann 対称空間,
 $Q \subset X$: "十分大きい"有限部分カンドル

$$\chi^{\text{Top}}(X) \leq \chi^{\text{Qdle}}(Q).$$

問

$\exists? X$: 有限連結カンドル s.t. $\chi^{\text{Qdle}}(X) > 0$.

Antipodal sets of pseudo-Riemannian symmetric R -spaces

Kyoji Sugimoto

1 Antipodal sets of para-Hermitian symmetric spaces

Let G be a connected Lie group and let L be a closed subgroup of G . A pair $(G/L, \sigma)$ of the homogeneous space G/L and a non-trivial involutive automorphism σ of G is called a *symmetric space*, if the inclusion relation $(G^\sigma) \subset L \subset G^\sigma$ holds. Here G^σ is the fixed point set of σ in G and $(G^\sigma)_0$ is the identity component of G^σ .

Let $(G/L, \sigma)$ be a symmetric space and let $\Sigma : G/L \rightarrow G/L$ be a map defined by $\Sigma(xL) := \sigma(x)L$ for $xL \in G/L$. For any $p := xL \in G/L$, we define an involutive diffeomorphism $s_p : G/L \rightarrow G/L$ by $s_p := \tau_x \circ \Sigma \circ \tau_{x^{-1}}$, which is independent of the choice of $x \in G$ satisfying $p = xL$. We call s_p the *symmetry at a point p* of $(G/L, \sigma)$. A subset $S \subset G/L$ is called an *antipodal set* of G/L , if $s_p(q) = q$ holds for any two points $p, q \in S$. If the cardinality of an antipodal set S coincides with $\#_2 G/L$, which is defined as the supremum of the cardinalities of antipodal sets of G/L , S is said to be *great*.

A symmetric space $(G/L, \sigma)$ is said to be *para-Hermitian*, if it admits a G -invariant para-complex structure I and a G -invariant para-Hermitian metric with respect to I . We abbreviate “para-Hermitian symmetric space” to “PHSS”. We call a connected component of the fixed point set of an involutive para-antiholomorphic isometry of a PHSS a *para-real form*.

Lemma 1.1 [1] *Let $(G/L, \sigma, I, g)$ be an almost effective semisimple PHSS and let \mathfrak{g} be the Lie algebra of G . Then there exists a unique element $Z \in \mathfrak{g}^{\sigma^*}$ such that*

$$\mathfrak{g}^{\sigma^*} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \text{ad } Z(X) = 0\}, \quad I_o = \text{ad } Z|_{\mathfrak{g}^{-\sigma^*}}.$$

We call the element Z in Lemma 1.1 the characteristic element of G/L . If L coincides with $C_G(Z) := \{x \in G \mid \text{Ad } x(Z) = Z\}$, G/L is said to be of *hyperbolic orbit type*. In this case, G/L is the adjoint orbit through Z .

Theorem 1.1 [3] *Let M be an effective semisimple PHSS of hyperbolic orbit type and let S be an antipodal set of M . Then there exists a compact para-real form R of M such that $S \subset R$.*

Note that for an effective semisimple PHSS M of hyperbolic orbit type, there exists a compact para-real form R . Moreover any two compact para-real forms of an effective semisimple PHSS are transformed into each other by a para-holomorphic isometry. Then R is a symmetric R -space and M is diffeomorphic to the cotangent bundle of R . Hence we have $\#_2 M = \#_2 R < \infty$.

2 Antipodal sets of pseudo-Riemannian symmetric R -spaces

Let $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ is a semisimple graded Lie algebra of first kind, let Z be the characteristic element of $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$, let ρ be an involutive automorphism of \mathfrak{g} satisfying $\rho(\mathfrak{g}_\lambda) = \mathfrak{g}_{-\lambda}$. The pair $(\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1, \rho)$ is called a *symmetric graded Lie algebra* (SGLA, as an abbreviation), if the representation $\text{ad} : \mathfrak{g}_0 \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_{-1})$ is faithful and $\mathfrak{g}_0 = [\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_1]$ holds. Let H be the connected Lie subgroup of $GL(\mathfrak{g}^{-\rho})$ generated by $\exp(\text{ad } \mathfrak{g}^\rho|_{\mathfrak{g}^{-\rho}})$. Then H -orbit $H(Z)$ is called the *pseudo-Riemannian symmetric R -space* associated with the SGLA (\mathfrak{g}, ρ) . Note that $H(Z)$ is a symmetric R -space, when ρ is a Cartan involution of \mathfrak{g} . By the results in [4], a simple PHSS and the non-compact dual of a symmetric R -space are the pseudo-symmetric R -space associated with a SGLA. In addition, any pseudo-symmetric R -space associated with a SGLA is realized as a para-real form of an effective semisimple PHSS of hyperbolic orbit type (cf. [2]). Related to antipodal sets of pseudo-Riemannian symmetric R -spaces associated with SGLA's, we have the followings:

Theorem 2.1 [3] *Let G/L be an effective semisimple PHSS of hyperbolic orbit type, let $\mathfrak{g} := \text{Lie}(G)$, and let $Z \in \mathfrak{g}$ be the characteristic element of G/L . Let R be a para-real form of G/L containing the origin o . We identify G/L with $\text{Ad } G(Z)$.*

- (1) *Let S be a great antipodal set of R . Then there exists an involutive automorphism ξ of \mathfrak{g} and a Cartan involution θ of \mathfrak{g} satisfying $\theta \circ \xi = \xi \circ \theta$ and a maximal Abelian subspace \mathfrak{a} in $\mathfrak{g}^{-\theta} \cap \mathfrak{g}^{-\xi}$ such that $S = R \cap \mathfrak{a}$. Thus S is an orbit of the Weyl group of $(H^{\mathfrak{a}}, A)$. Here $H^{\mathfrak{a}}$ is the analytic subgroup of G whose Lie algebra is $(\mathfrak{g}^{\theta} \cap \mathfrak{g}^{\xi}) \oplus (\mathfrak{g}^{-\theta} \cap \mathfrak{g}^{-\xi})$ and $A := \exp \mathfrak{a}$.*
- (2) *Any antipodal set of R is included in a great antipodal set of R .*
- (3) *Let S_1 and S_2 be great antipodal sets of R . Then there exists a isometry Φ of R such that $\Phi(S_1) = S_2$.*

Corollary 2.1 [3] *Let N be the pseudo-Riemannian symmetric R -space associated with a SGLA. Then we have $\#_2 N < \infty$. Moreover,*

- (1) *Any antipodal set of N is included in a great antipodal set of N .*
- (2) *Let S_1 and S_2 be great antipodal sets of N . Then there exists a isometry Φ of N such that $\Phi(S_1) = S_2$.*

References

- [1] S. Kaneyuki and M. Kozai, Paracomplex structures and affine symmetric spaces, Tokyo J. Math. **8** (1985), 81–98.
- [2] K. Sugimoto, Para-real forms of para-Hermitian symmetric spaces and real forms of pseudo-Hermitian symmetric spaces, Hiroshima Math. J. **53** (2023), 143–170.
- [3] K. Sugimoto, Antipodal sets of pseudo-Riemannian symmetric R -spaces, to appear in Differential Geom. Appl.
- [4] H. Naitoh, Pseudo-Riemannian symmetric R -spaces, Osaka J. Math. **21** (1984), 733–764.

(Kyoji Sugimoto) Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Tokyo University of Science, 2641 Yamazaki, Noda, Chiba, 278-8510, Japan
Email address: a30825@rs.tus.ac.jp

Antipodal sets of pseudo-Riemannian symmetric R -spaces

杉本恭司 (すぎもと きょうじ)
東京理科大学創域理工学研究科数理科学専攻
2024/1/26

1. はじめに

対称階別 Lie 代数

Definition 1

• $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$: 半単純第一種階別 Lie 代数, i.e.,

$$[\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_\mu] \subset \mathfrak{g}_{\lambda+\mu} \quad (\lambda, \mu = 0, \pm 1),$$

• $\rho : \mathfrak{g}$ の対合的自己同型 satisfying $\rho(\mathfrak{g}_\lambda) = \mathfrak{g}_{-\lambda}$ ($\lambda = 0, \pm 1$).
次の (1), (2) をみたすとき, $(\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1, \rho)$ を半単純対称階別 Lie 代数という:

- (1) $\mathfrak{g}_0 = [\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_1]$.
- (2) 表現 $\text{ad} : \mathfrak{g}_0 \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_{-1})$ は忠実.

擬 Riemann 対称 R 空間

Definition 2

• $(\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1, \rho)$: 半単純対称階別 Lie 代数,
 • $Z \in \mathfrak{g} : \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ の特性元,
 • $\mathfrak{h} := \{X \in \mathfrak{g} \mid \rho(X) = X\}$, $\mathfrak{m} := \{X \in \mathfrak{g} \mid \rho(X) = -X\}$,
 • $H : \exp(\text{ad}|_{\mathfrak{h}})$ で生成される $GL(\mathfrak{m})$ の連結 Lie 部分群.
 このとき, H 軌道 $H(Z)$ を半単純対称階別 Lie 代数 (\mathfrak{g}, ρ) に付随した擬 Riemann 対称 R 空間という.

Remark

擬 Riemann 対称 R 空間は擬 Riemann 対称空間である. ρ が \mathfrak{g} の Cartan 対合であるとき, 対称 R 空間という. このとき, $H(Z)$ はコンパクト Riemann 対称空間である.

先行研究

本講演では, 次の定理が, より一般に, 半単純対称階別 Lie 代数に付随した擬 Riemann 対称 R 空間に対しても成り立つことを紹介する.

Theorem 1 (Tanaka-Tasaki)

N を対称 R 空間とする. このとき以下が成り立つ:

- (1) N の対蹠集合はある大対蹠集合に含まれる.
- (2) N の二つの大対蹠集合は互いに合同である.

擬 Riemann 対称 R 空間の実現

Proposition 1 (S.)

半単純対称階別 Lie 代数に付随した擬 Riemann 対称 R 空間は, ある双曲軌道型効果的半単純 para-Hermite 対称空間の para 実形として実現可能であり, その逆も成り立つ.

Remark

半単純対称階別 Lie 代数は, 同型を除いて, 非退化 Jordan 三項系と一対一に対応している. 特に, 単純 Jordan 三項系に付随した擬 Riemann 対称 R 空間は分類されている (by Naitoh).

2. Para-Hermitte 対称空間

対称空間の定義

Definition 3

- ・ G : 連結 Lie 群,
- ・ L : G の閉部分群,
- ・ $\sigma (\neq \text{id})$: G の対合的自己同型.

このとき, $(G/L, \sigma)$ が対称空間であるとは, 次を満たすことをいう:

$$(G^\sigma)_0 \subset L \subset G^\sigma.$$

但し, $G^\sigma = \{x \in G \mid \sigma(x) = x\}$, $(G^\sigma)_0$ は G^σ の単位連結成分.

Definition 4

- ・ 等質空間 G/L が半単純であるとは, $\text{Lie}(G)$ が半単純であることをいう.
- ・ 等質空間 G/L が (概) 効果的であるとは, G が G/L に (概) 効果的に作用していることをいう.

点対称と対蹠集合

Definition 5

- $(G/L, \sigma)$: 対称空間, $o := eL$
- $x \in G$ に対して, $\tau_x(yL) := xyL$ ($yL \in G/L$).
- $s_o : G/L \rightarrow G/L$, $s_o(xL) := \sigma(x)L$ ($xL \in G/L$).
- $p := xL \in G/L$ に対して, $s_p := \tau_x \circ s_o \circ \tau_x^{-1}$.

このとき, s_p は well-defined であり, s_p を p における **点対称** という. 部分集合 $S \subset G/L$ が **対蹠集合** であるとは,

$$\forall p, q \in S, s_p(q) = q$$

となることをいう.

点対称

Remark

対称空間 G/L の点対称 s_p ($p \in G/L$) は以下を満たす:

- (1) p は s_p の孤立固定点.
- (2) $(s_p)^2 = \text{id}_{G/L}$.
- (3) $s_p \circ s_q = s_{s_p(q)} \circ s_p$ ($p, q \in G/L$).

Para-Hermite 対称空間

Definition 6

- $(G/L, \sigma)$: 対称空間,
 - $I : G/L$ 上の G 不変 $(1, 1)$ 型テンソル場,
 - $g : G/L$ 上の G 不変擬 Riemann 計量.
- このとき, $(G/L, \sigma, I, g)$ が **para-Hermite 対称空間** であるとは次の (1) から (4) を満たすことをいう:

- (1) $I^2 = \text{id}$,
- (2) $\dim T_p^+(G/L) = \dim T_p^-(G/L)$ for $\forall p \in G/L$,
- (3) $[IX, IY] - I[IX, Y] - I[X, IY] + [X, Y] = 0$ for $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(G/L)$,
- (4) $g(IX, Y) + g(X, IY) = 0$ for $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(G/L)$.

但し, $I_p : T_p(G/L) \rightarrow T_p(G/L)$ の ± 1 固有空間を, $T_p^\pm(G/L)$ とする.

双曲軌道型 para-Hermite 対称空間

Lemma 1 (Kaneyuki-Kozai)

- $(G/L, \sigma, I, g)$: 概効果的半単純 para-Hermite 対称空間,
 - $\mathfrak{g} := \text{Lie}(G)$,
 - $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u} : \sigma_*$ に関する \mathfrak{g} の ± 1 固有空間への分解.
- このとき, 次を満たす $Z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{l})$ が唯一つ存在する:

$$(1) \mathfrak{l} = \mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(Z), \quad (2) I_o = \text{ad } Z|_{\mathfrak{u}}.$$

但し, $\mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(Z) = \{X \in \mathfrak{g} \mid \text{ad } Z(X) = 0\}$, o は G/L の原点.

この Z を概効果的半単純 para-Hermite 対称空間の**特性元**という.
Lem. 1 より, $C_G(Z)_0 \subset L \subset C_G(Z)$ となる. $L = C_G(Z)$ となる
とき G/L は**双曲軌道型**であるという. このとき, $G/L \cong \text{Ad } G(Z)$ で
ある. 但し, $C_G(Z) := \{x \in G \mid \text{Ad } x(Z) = Z\}$.

Para-Hermite 対称空間の例

Example

$G := SL(p+q, \mathbb{R})$, $\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$ ($1 \leq p \leq q$) とし,

$$Z := \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} qE_p & O \\ O & -pE_q \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}.$$

とする. このとき, $G/C_G(Z)$ は Z を特性元とする単純 para-Hermite 対称空間になる. ここで, para-Hermite 計量は \mathfrak{g} の Killing 形式から誘導される.

$$C_G(Z) = \left\{ \begin{pmatrix} X & O \\ O & Y \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} X \in GL(p, \mathbb{R}), Y \in GL(q, \mathbb{R}), \\ (\det X)(\det Y) = 1 \end{array} \right\}$$

であり, $C_G(Z)$ の連結成分は二つである. 特に $p = q = 1$ のとき, $G/C_G(Z)$ は一葉双曲面である.

Para 実形

Definition 7

- $(M, I), (M', I')$: para 複素多様体,
- $\Phi: M \rightarrow M'$: 可微分写像.

(1) Φ : para 正則 $\stackrel{\text{def}}{\iff} (d\Phi)_p \circ I_p = I'_{\Phi(p)} \circ (d\Phi)_p$ for $\forall p \in M$.

(2) Φ : 反 para 正則 $\stackrel{\text{def}}{\iff} (d\Phi)_p \circ I_p = -I'_{\Phi(p)} \circ (d\Phi)_p$ for $\forall p \in M$.

Definition 8

Para-Hermite 対称空間の対合的反 para 正則等長変換の固定点集合の連結成分を para 実形という.

以下では, para-Hermite 対称空間といえば, 双曲軌道型効果的半単純であると約束する. また, 簡単のため, 以下では para-Hermite 対称空間 G/L の para-Hermite 計量は G の Lie 代数の Killing 形式から誘導されているとする.

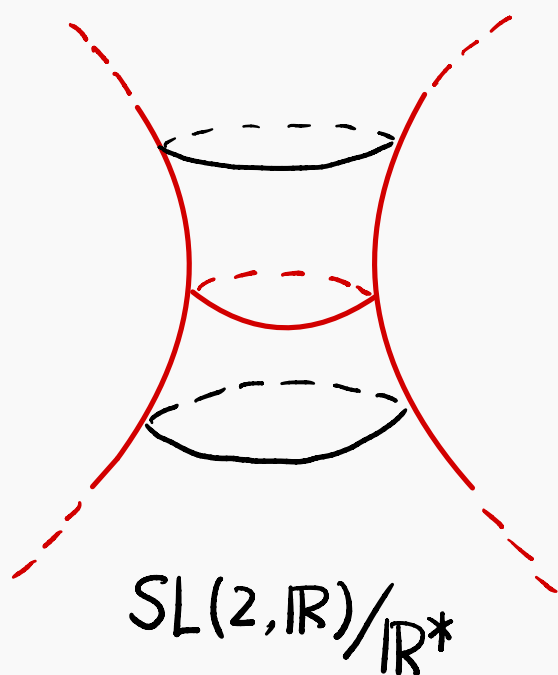
R を para-Hermite 対称空間 $(G/L, \sigma)$ の原点を含む para 実形, Ξ を R を定義する対合的反 para 正則等長変換とする. このとき, 次を満たす G の対合的自己同型 ξ が唯一存在する:

$$\xi \circ \sigma = \sigma \circ \xi, \quad \xi(L) = L, \quad \Xi(xL) = \xi(x)L.$$

$I(R) := \xi_*$ とする. このとき $\xi_*(Z) = -Z$ である (Z は G/L の特性元).

H を $\text{Lie}(H) = \mathfrak{g}^{\xi_*}$ であるような G の連結 Lie 部分群とすると, R は対称空間 $(H/(H \cap L), \sigma|_H)$ と一致する. 従って,

$$R \cong \text{Ad } H(Z).$$



・赤線はそれぞれ para 実形

・双曲線は

$x \mathbb{R}^* \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbb{R}^*$
の固定点集合.

・ S^1 は

$x \mathbb{R}^* \mapsto {}^t x^{-1} \mathbb{R}^*$

の固定点集合.

コンパクト Para 実形

Lemma 2 (Shimokawa and S.)

- ・ G/L : para-Hermite 対称空間,
 - ・ R : G/L の para 実形.
- (1) 原点を含む G/L の para 実形 R_0 と, G/L 上の para 正則等長変換 Φ で, $\Phi(R) = R_0$ となるものが存在する.
 - (2) para-Hermite 対称空間にはコンパクト para 実形が一意的に存在する.

Remark

- (1) G/L を para-Hermite 対称空間, R をそのコンパクト para 実形とする. R は対称 R 空間であり, G/L はその余接束と微分同型である.
- (2) 逆に, 対称 R 空間の余接束は para-Hermite 対称空間の構造をもつ. ここで, 対称 R 空間と para-Hermite 対称空間は一対一には対応していないことに注意する.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{SU}^*(8)/(\text{SU}^*(4) \times \text{SU}^*(4) \times \mathbb{R}^+) & & \text{E}_{6(6)}/(\text{Spin}(5,5) \times \mathbb{R}^*) \\
 \swarrow & & \swarrow \\
 & \text{G}_2(\mathbb{H}^4) &
 \end{array}$$

Para-Hermite 対称空間の対蹠集合

Theorem 2 (S.)

- ・ M : para-Hermite 対称空間,
- ・ S : M の対蹠集合.

このとき, M のあるコンパクト para 実形 R が存在して, $S \subset R$.
従って, $\#_2 M = \#_2 R$. 但し, $U = M$ or R に対して,

$$\#_2 U := \sup\{\#S \mid S : \text{antipodal set in } U\}.$$

Definition 9

Para-Hermite 対称空間 M の対蹠集合 S に対して, $\#S = \#_2 M$ となるとき, S を **大対蹠集合** という.

Para-Hermite 対称空間の対蹠集合

Theorem 3 (S.)

- ・ G/L : para-Hermite 対称空間 with 特性元 Z ,
- ・ \mathfrak{g} : G の Lie 代数,
- ・ $M := \text{Ad } G(Z) \cong G/L$.

- (1) S を M の大対蹠集合とすると, \mathfrak{g} のある Cartan 対合 θ と $\mathfrak{g}^{-\theta}$ の極大可換部分空間 \mathfrak{a} が存在して, $S = M \cap \mathfrak{a}$. 従って, S は (G, A) の Weyl 群の軌道である ($A := \exp \mathfrak{a}$).
- (2) M の対蹠集合はある大対蹠集合に含まれる.
- (3) M の二つの大対蹠集合は para 正則等長変換で互いに移りあう.

3. 擬 Riemann 対称 R 空間の対蹠集合

Para 実形の対蹠集合

Theorem 4 (S.)

- ・ G/L : para-Hermite 対称空間 with 特性元 Z ,
 - ・ \mathfrak{g} : G の Lie 代数,
 - ・ R : G/L の原点を含む para 実形,
 - ・ $\xi := I(R)$,
 - ・ $R \cong \text{Ad } H(Z)$ (H は G の連結 Lie 部分群で, $\text{Lie}(H) = \mathfrak{g}^\xi$).
- (1) S を R の大対蹠集合とすると, \mathfrak{g} のある Cartan 対合 θ で ξ と可換なものと, $\mathfrak{g}^{-\theta} \cap \mathfrak{g}^{-\xi}$ の極大可換部分空間 \mathfrak{a} が存在して, $S = R \cap \mathfrak{a}$. 従って S は $(H^{\mathfrak{a}}, A)$ の Weyl 群の軌道である. 但し, $H^{\mathfrak{a}}$ は $\text{Lie}(H^{\mathfrak{a}}) = (\mathfrak{g}^{\theta} \cap \mathfrak{g}^{\xi}) \oplus (\mathfrak{g}^{-\theta} \cap \mathfrak{g}^{-\xi})$ なる G の連結 Lie 部分群, $A := \exp \mathfrak{a}$.
- (2) R の対蹠集合はある大対蹠集合に含まれる.
- (3) R の二つの大対蹠集合は等長変換で互いに移りあう.

擬 Riemann 対称 R 空間の対蹠集合

Corollary 1 (S.)

N を半単純対称階別 Lie 代数に付随した擬 Riemann 対称 R 空間とする.

- (1) $\#_2 N < \infty$.
- (2) N の対蹠集合はある大対蹠集合に含まれる.
- (3) N の二つの大対蹠集合は等長変換で互いに移りあう.

Proposition 2 (S.)

N を半単純対称階別 Lie 代数に付随した擬 Riemann 対称 R 空間とする. $\#_2 N \geq 2$ となる必要十分条件は N がある対称 R 空間の非コンパクト双対でないことである.

ご清聴ありがとうございました.

Multiple conjugation quandles and G -families of quandles

Yuta Taniguchi

1 Definition

Definition 1.1. ([2]) A *multiple conjugation quandle (MCQ)* X is the disjoint union of groups $G_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ with a binary operation $* : X^2 \rightarrow X$ satisfying the following conditions:

- For any $\lambda \in \Lambda$ and $a, b \in G_\lambda$, we have $a * b = b^{-1}ab$.
- For any $x \in X, \lambda \in \Lambda$ and $a, b \in G_\lambda$, we have $x * (ab) = (x * a) * b$ and $x * e_\lambda = x$, where e_λ is the identity element of G_λ .
- For any $x, y, z \in X$, we have $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$.
- For any $x \in X$ and $\lambda \in \Lambda$, there exists the unique element $\mu \in \Lambda$ such that for any $a, b \in G_\lambda$, we have $a * x, b * x \in G_\mu$ and $(ab) * x = (a * x)(b * x)$.

By the second axiom, we see that the map $S_y : X \rightarrow X; x \mapsto x * y$ is a bijection for any $y \in X$. We note that an MCQ itself is a *quandle* [4, 6].

Definition 1.2. ([3]) Let G be a group. A G -family of quandles $(X, \{ *^g \}_{g \in G})$ is a non-empty set X with a family of binary operations $*^g : X^2 \rightarrow X$ satisfying the following conditions:

- For any $x \in X$ and $g \in G$, we have $x *^g x = x$.
- For any $x, y \in X$ and $g, h \in G$, we have $x *^{gh} y = (x *^g y) *^h y$ and $x *^e y = x$, where e is the identity element of G .
- For any $x, y, z \in X$ and $g, h \in G$, we have $(x *^g y) *^h z = (x *^h z) *^{h^{-1}gh} (y *^h z)$.

We remark that for each $g \in G$, the pair $(X, *^g)$ is a quandle. Let $(X, \{ *^g \}_{g \in G})$ be a G -family of quandles. Then $X \times G = \sqcup_{g \in G} \{x\} \times G$ is an MCQ with $(x, g) * (y, h) := (x *^h y, h^{-1}gh)$ and $(x, g)(x, h) = (x, gh)$ for any $x, y \in X$ and $g, h \in G$. We call this MCQ the *associated MCQ* of $(X, \{ *^g \}_{g \in G})$.

2 Main result

A *handlebody-knot* is a handlebody embedded in S^3 . A *diagram* of a handlebody-knot H is a diagram of a spatial trivalent graph whose regular neighborhood is H . We denote the set of all arcs of a handlebody-knot diagram D by $A(D)$. A Y -orientation of a handlebody-knot diagram D is a collection of orientations of all edges of D so that there are no source or sink vertices with respect to the orientation.

The author was supported by JSPS KAKENHI Grant Number 21J21482.

Let D be a Y -oriented diagram of a handlebody-knot H , and let $X = \sqcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ be an MCQ. A map $c : A(D) \rightarrow X$ is an X -coloring of D if it satisfies the conditions (1), (2) and (3) depicted in Figure 1 at each crossing and vertex.

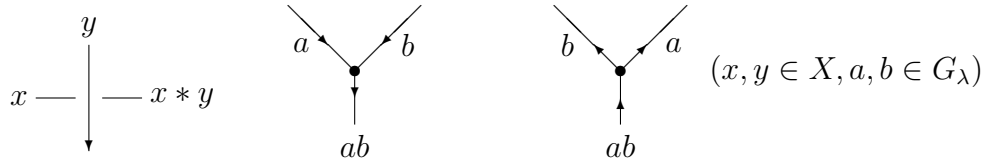


Figure 1

Let D_1 and D_2 be Y -oriented handlebody-knot diagrams. We denote by $D_1 \#_1 D_2$ the diagram obtained from D_1 and D_2 by attaching an arc α as shown Figure 2.

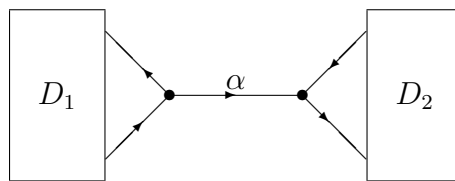


Figure 2

Then we consider the following question:

Question 2.1. *Is there an MCQ X which satisfies the following condition?*

- *There is an X -coloring $c : A(D_1 \#_1 D_2) \rightarrow X$ such that $c(\alpha)$ is not the identity element for some D_1 and D_2 .*

The main result of this note is to give an affirmative answer to Question 2.1.

Theorem 2.2. *There are infinitely many (finite) MCQs X which satisfy the condition of Question 2.1.*

We remark that if an MCQ X satisfies the condition of Question 2.1, the MCQ X is not the associated MCQ of a G -family of quandles. Hence, we have the following corollary:

Corollary 2.3. *There are infinitely many (finite) MCQs X such that each MCQ X is not the associated MCQ of a G -family of quandles.*

The proof of Theorem 2.2 is to construct such MCQ's using an extension by an MCQ 2-cocycle [1].

References

- [1] J. S. CARTER, A. ISHII, M. SAITO, K. TANAKA, *Homology for quandles with partial group operations*, Pacific J. Math. **287**, no. 1 (2017), 19-48.
- [2] A. ISHII, *A multiple conjugation quandle and handlebody-knots*, Topology Appl., **196** (2015), 492–500.
- [3] A. ISHII, M. IWAKIRI, Y. JANG, K. OSHIRO, *A G -family of quandles and handlebody-knots*, Illinois J. Math. **57** (2013), 817-838.

- [4] D. JOYCE, *A classifying invariant of knots, the knot quandle*, J. Pure Appl. Algebra, **23**, no. 1 (1982), 37–65.
- [5] S. KAMADA, K. OSHIRO, *Homology groups of symmetric quandles and cocycle invariants of links and surface-links*, Trans. Am. Math. Soc. **362**, (10) (2010), 5501-5527.
- [6] S. V. MATVEEV, *Distributive groupoids in knot theory*, Mat. Sb., **161**, no. 1 (1982) 78–88.

(Y. Taniguchi) DEPARTMENT OF MATHEMATICS, GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE,
OSAKA UNIVERSITY, 1-1, MACHIKANNEYAMA, TOYONAKA, OSAKA, 560-0043, JAPAN
Email address: yuta.taniguchi.math@gmail.com

多重共役カンドルとカンドルの G 族

谷口 雄大

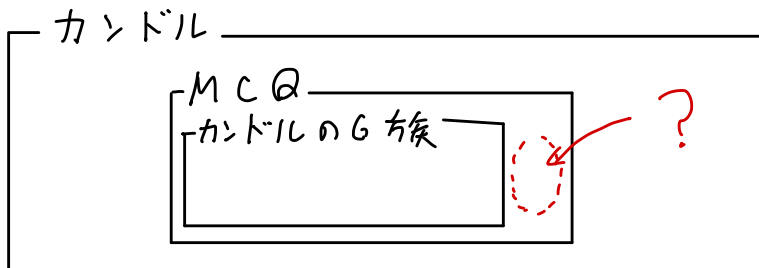
大阪大学大学院理学研究科

カンドルと対称空間

January 26, 2024

Summary

- カンドル ... 結び目と相性の良い代数系.
- 多重共役カンドル (MCQ) ... ハンドル体結び目と相性の良い代数系.
- $(X, \{*\}^g)_{g \in G}$: カンドルの G 族 $\rightsquigarrow X \times G$: MCQ.



Summary

- カンドル ... 結び目と相性の良い代数系.
- **多重共役カンドル (MCQ)** ... ハンドル体結び目と相性の良い代数系.
- $(X, \{*\}^g)_{g \in G}$: カンドルの G 族 $\rightsquigarrow X \times G$: MCQ.

主結果

カンドルの G 族から得られない (有限な) MCQ が無限個存在する.
さらにこれらは良い性質を持つ.

- ① MCQ とカンドルの G 族
- ② ハンドル体結び目の彩色
- ③ 主結果とその証明

定義 (Ishii '15)

G_λ : 群 ($\lambda \in \Lambda$), $X := \sqcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$, $*$: $X^2 \rightarrow X$: 2 項演算.

$(X, *)$: 多重共役カンドル (MCQ) $\Leftrightarrow *$ は以下の条件を満たす:

- ① $\forall \lambda \in \Lambda, \forall a, b \in G_\lambda, a * b = b^{-1}ab.$
- ② $\forall x \in X, \forall \lambda \in \Lambda, \forall a, b \in G_\lambda, (x * a) * b = x * (ab)$ かつ $x * e_\lambda = x.$
- ③ $\forall x, y, z \in X, (x * y) * z = (x * z) * (y * z).$
- ④ $\forall \lambda \in \Lambda, \forall x \in X, \exists! \mu \in \Lambda$ s.t.
 $\forall a, b \in G_\lambda, a * x, b * x \in G_\mu$ かつ $(ab) * x = (a * x)(b * x).$

注意

- (1) 公理 (2) から $\forall y \in X, *y : X \rightarrow X; x \mapsto x * y$ は全単射.
- (2) 公理 (4) $\Leftrightarrow \forall \lambda \in \Lambda, \forall x \in X, \exists! \mu \in \Lambda$ s.t $*x : G_\lambda \rightarrow G_\mu$: 群準同型.

例

(1) G : 群, $*$: $G^2 \rightarrow G; (g, h) \mapsto h^{-1}gh \Rightarrow (G, *)$: MCQ.

(2) $Q = (Q, *)$: カンドル, $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x, y \in Q, x *^n y := (\overbrace{\cdots (x * y) \cdots * y}^n) * y.$
 $Q \times \mathbb{Z} = \sqcup_{x \in Q} \{x\} \times \mathbb{Z}$: MCQ with $(x, n) * (y, m) := (x *^m y, n).$

(3) G : 群, M : 右 G 加群

$M \times G = \sqcup_{x \in M} \{x\} \times G$: MCQ with $(x, g) * (y, h) := (x \cdot h + y \cdot (e - h), h^{-1}gh).$

(4) G_1, \dots, G_n : 群 s.t. $i < j$ ならば $G_i \triangleleft G_j$

$\sqcup_{i=1}^n G_i$: MCQ with $g * h = h^{-1}gh.$

定義 (Ishii-Iwakiri-Jang-Oshiro '13)

$Q \neq \emptyset$: 集合, G : 群, $\forall g \in G, *^g : Q^2 \rightarrow Q$: 2 項演算.

$(Q, \{ *^g \}_{g \in G})$: **カンドルの G 族** $\Leftrightarrow \{ *^g \}_{g \in G}$ は以下の条件を満たす:

- ① $\forall g \in G, \forall x \in Q, x *^g x = x$.
- ② $\forall x, y \in Q, \forall g, h \in G, x *^{gh} y = (x *^g y) *^h y$ かつ $x *^e y = x$.
- ③ $\forall x, y, z \in Q, \forall g, h \in G, (x *^g y) *^h z = (x *^h z) *^{h^{-1}gh} (y *^h z)$.

注意 $(Q, \{ *^g \}_{g \in G})$: カンドルの G 族 $\Rightarrow \forall g \in G, (Q, *^g)$: カンドル.

事実

$(Q, \{ *^g \}_{g \in G})$: カンドルの G 族

$\Rightarrow Q \times G = \sqcup_{x \in Q} \{x\} \times G$: MCQ with $(x, g) * (y, h) := (x *^h y, h^{-1}gh)$.

例

(1) G : 群, $* : G^2 \rightarrow G; (g, h) \mapsto h^{-1}gh \Rightarrow (G, *)$: MCQ.

\rightsquigarrow カンドルの G 族から得られる. ($(\{1pt\}, \{ *^g \}_{g \in G})$ はカンドルの G 族)

(2) $Q = (Q, *)$: カンドル.

$Q \times \mathbb{Z} = \sqcup_{x \in Q} \{x\} \times \mathbb{Z}$: MCQ with $(x, n) * (y, m) := (x *^m y, n)$.

\rightsquigarrow カンドルの G 族から得られる. ($(Q, \{ *^n \}_{n \in \mathbb{Z}})$ はカンドルの \mathbb{Z} 族)

(3) G : 群, M : 右 G 加群

$M \times G = \sqcup_{x \in M} \{x\} \times G$: MCQ with $(x, g) * (y, h) := (x \cdot h + y \cdot (e - h), h^{-1}gh)$.

\rightsquigarrow カンドルの G 族から得られる.

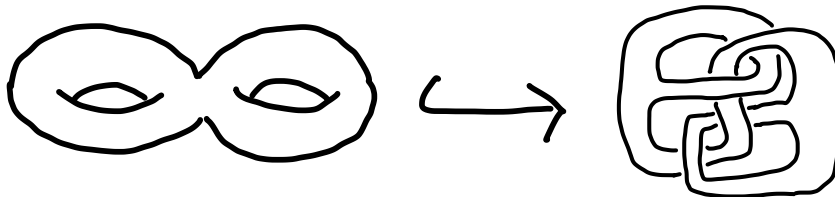
$(x *^g y := x \cdot g + y \cdot (e - g))$ と定めれば $(M, \{ *^g \}_{g \in G})$ はカンドルの G 族

(4) G_1, \dots, G_n : 群 s.t. $G_i \triangleleft G_j (i < j) \Rightarrow \sqcup_{i=1}^n G_i$: MCQ with $g * h = h^{-1}gh$.

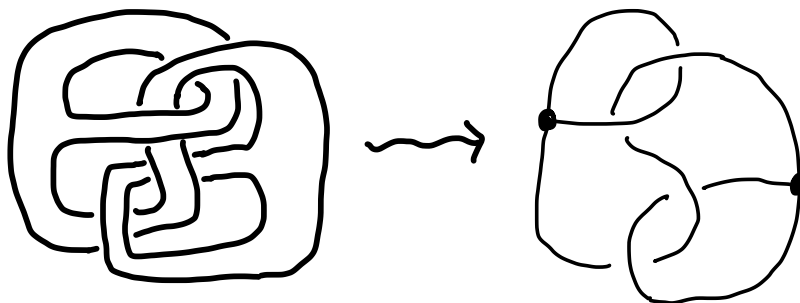
\rightsquigarrow (一般には) カンドルの G 族から得られない.

(\because カンドルの G 族から得られた MCQ は各群が同型だから)

ハンドル体結び目 $\Leftrightarrow S^3$ 内に埋め込まれたハンドル体



ハンドル体結び目は空間 3 価グラフの図式を用いて表すことができる.

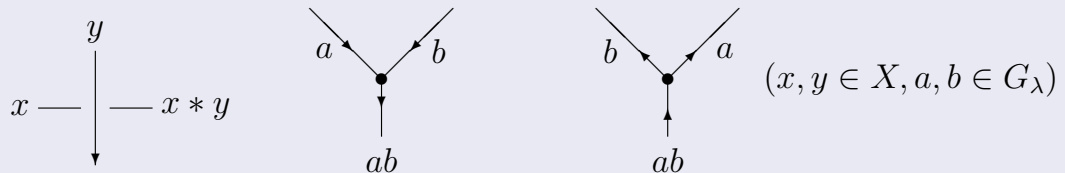


D : **Y-向き付けられた**ハンドル体結び目の図式, $\text{Arc}(D)$: D の弧全体の集合.

定義 (Ishii '15)

$X = \sqcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$: MCQ.

$c : \text{Arc}(D) \rightarrow X$: D の X -彩色 $\Leftrightarrow D$ の各交点と頂点で以下の条件を満たす:

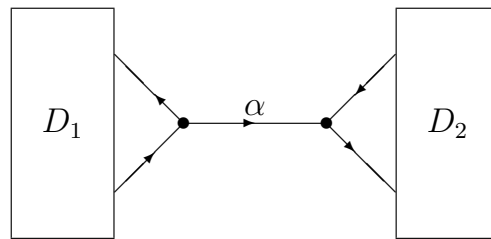


$\text{Col}_X(D) := \{c : \text{Arc}(D) \rightarrow X \mid c : X\text{-彩色}\}$.

命題 (Ishii '15)

$|X| < \infty \Rightarrow |\text{Col}_X(D)|$ はハンドル体結び目の不変量である.

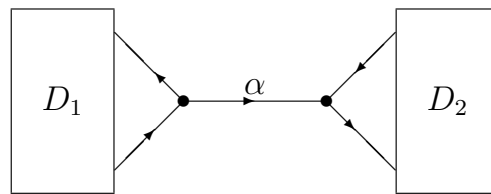
以下のようなハンドル体結び目の図式 D を考える:



Question

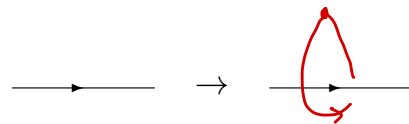
次を満たすような MCQ $X = \sqcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ は存在するか?

- $\exists c : \text{Arc}(D) \rightarrow X : X\text{-彩色 s.t. } \forall \lambda \in \Lambda, c(\alpha) \neq e_\lambda.$



- $X = G$ の場合

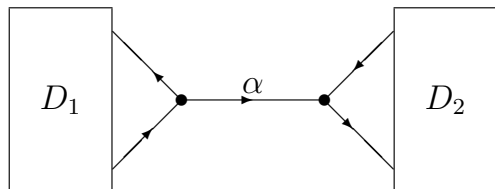
... 次のように $\text{Arc}(D)$ の各元に $\pi_1(S^3 \setminus H)$ の元を対応させる:



この対応から次の全単射が誘導される: $\text{Col}_X(D) \xrightarrow{1:1} \text{Hom}(\pi_1(S^3 \setminus H), G).$

上の対応において α は $\pi_1(S^3 \setminus H)$ で単位元に対応する.

$\therefore \forall c : \text{Arc}(D) \rightarrow X : X\text{-彩色}, c(\alpha) = e.$



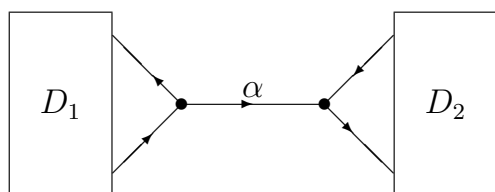
- カンドルの G 族 $(Q, \{*\}^g)_{g \in G}$ から得られた MCQ $X = Q \times G$ の場合 ...
 $c : \text{Arc}(D) \rightarrow X: X\text{-彩色} \Rightarrow \text{pr}_2 \circ c : \text{Arc}(D) \rightarrow G: G\text{-彩色},$
 ただし $\text{pr}_2 : X = Q \times G \rightarrow G; (x, g) \mapsto g.$
 $\therefore \forall c : \text{Arc}(D) \rightarrow X = Q \times G: X\text{-彩色}, \exists x \in Q \text{ s.t. } c(\alpha) = (x, e).$

Question

以下の条件を満たす MCQ $X = \sqcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ は存在するか?

- $\exists c : \text{Arc}(D) \rightarrow X: X\text{-彩色 s.t. } \forall \lambda \in \Lambda, c(\alpha) \neq e_\lambda.$

↑ このような MCQ はカンドルの G 族からは得られない!



Question

以下の条件を満たす MCQ $X = \sqcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ は存在するか?

- $\exists c : \text{Arc}(D) \rightarrow X: X\text{-彩色 s.t. } \forall \lambda \in \Lambda, c(\alpha) \neq e_\lambda.$

定理

以下の条件を満たす (有限な) MCQ $X = \sqcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ が無限個存在する:

- $\exists c : \text{Arc}(D) \rightarrow X: X\text{-彩色 s.t. } \forall \lambda \in \Lambda, c(\alpha) \neq e_\lambda.$

(アイデア) MCQ 2-コサイクルによる拡大を使う。

定義 (Carter-Ishii-Saito-Tanaka '17)

$X = \sqcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$: MCQ, A : アーベル群, $\phi_1 : X^2 \rightarrow A, \phi_2 : \sqcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda^2 \rightarrow A$.
 $\phi = (\phi_1, \phi_2)$: MCQ 2-コサイクル $:\Leftrightarrow \forall x, y, z \in X, \forall \lambda \in \Lambda, \forall a, b, c \in G_\lambda$,

- $\phi_1(a, b) + \phi_2(b, b^{-1}ab) = \phi_2(a, b)$.
- $\phi_1(x, y) + \phi_1(x * y, z) = \phi_1(x, z) + \phi_1(x * z, y * z)$.
- $\phi_1(x, ab) = \phi_1(x, a) + \phi_1(x * a, b)$.
- $\phi_2(a, b) + \phi_1(ab, x) = \phi_1(a, x) + \phi_1(b, x) + \phi_2(a * x, b * x)$.
- $\phi_2(a, b) + \phi_2(ab, c) = \phi_2(a, bc) + \phi_2(b, c)$.

命題 (Carter-Ishii-Saito-Tanaka '17)

$X = \sqcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$: MCQ, A : アーベル群, $\phi_1 : X^2 \rightarrow A, \phi_2 : \sqcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda^2 \rightarrow A$.
 $\phi = (\phi_1, \phi_2)$: MCQ 2-コサイクル $\Leftrightarrow X \times A = \sqcup_{\lambda \in \Lambda} (G_\lambda \times A)$: MCQ with

$$\begin{cases} (x, a) * (y, b) = (x * y, a + \phi_1(x, y)) \\ (g, a)(h, b) = (gh, a + b + \phi_2(g, h)) \end{cases}$$

- $((x, a) * (g, b)) * (h, c) = (x * g, a + \phi_1(x, g)) * (h, c)$
 $= ((x * g) * h, a + \phi_1(x, g) + \phi_1(x * g, h))$.
- $(x, a) * ((g, b)(h, c)) = (x, a) * (gh, b + c + \phi_2(g, h))$
 $= (x * (gh), a + \phi_1(x, gh))$.

注意 $X \times A = \sqcup_{\lambda \in \Lambda} (G_\lambda \times A)$ の各 $\lambda \in \Lambda$ における単位元は $(e_\lambda, -\phi_2(e_\lambda, e_\lambda))$.

$\rightsquigarrow X \times A$ による彩色を考察してみる.

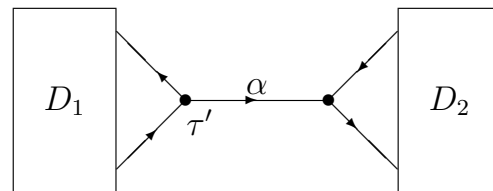
$X = \sqcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$: MCQ, $\phi = (\phi_1, \phi_2)$: MCQ 2-コサイクル
 D : Y -向き付けられたハンドル体結び目の図式, $c : \text{Arc}(D) \rightarrow X$: X -彩色

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} y \\ \downarrow \\ x \text{ --- } x * y \\ \chi \end{array} & \begin{array}{c} a \quad b \\ \searrow \quad / \\ \bullet \\ \downarrow \tau \\ ab \end{array} & \begin{array}{c} b \quad a \\ \searrow \quad / \\ \bullet \\ \downarrow \tau \\ ab \end{array} \\
 \Phi_\phi(\chi; c) := \varepsilon_\chi \phi_1(x, y) & \Phi_\phi(\tau; c) := \phi_2(a, b) & \Phi_\phi(\tau; c) := -\phi_2(a, b) \\
 & & (x, y \in X, a, b \in G_\lambda)
 \end{array}$$

$$\Phi_\phi(D; c) := \sum_\chi \Phi_\phi(\chi; c) + \sum_\tau \Phi_\phi(\tau; c).$$

命題 (folklore?)

$\Phi_\phi(D; c) = 0 \Leftrightarrow \exists \tilde{c} : \text{Arc}(D) \rightarrow X \times A$: $X \times A$ -彩色 s.t. $\text{pr}_1 \circ \tilde{c} = c$.



$X = \sqcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$: MCQ, $\phi = (\phi_1, \phi_2)$: MCQ 2-コサイクル
 $c : \text{Arc}(D) \rightarrow X$: X -彩色, $\tilde{c} : \text{Arc}(D) \rightarrow X \times A$: c のリフト
 $\Rightarrow \tilde{c}(\alpha) = \left(c(\alpha), \sum_{\chi \in \mathcal{C}_1} \Phi_\phi(\chi; c) + \sum_{\tau \in \mathcal{T}_1} \Phi_\phi(\tau; c) - \Phi_\phi(\tau'; c) \right)$,
 ここで $\mathcal{C}_1 := \{D_1 \text{ に含まれる交点}\}$, $\mathcal{T}_1 := \{D_1 \text{ に含まれる頂点}\}$.
 $\rightsquigarrow \begin{cases} \Phi_\phi(D; c) = 0 \\ \sum_{\chi \in \mathcal{C}_1} \Phi_\phi(\chi; c) + \sum_{\tau \in \mathcal{T}_1} \Phi_\phi(\tau; c) - \Phi_\phi(\tau'; c) \neq -\phi_2(e_\lambda, e_\lambda) \end{cases}$
 をみたま $c : \text{Arc}(D) \rightarrow X$: X -彩色を見つけてくれば, そのリフト \tilde{c} が求めている彩色である!

Q そんな MCQ 2-コサイクルは見つけてこれるのか?

A カンドル 2-コサイクルから見つけてこれる!

Q: 連結なカンドル, $\theta : Q^2 \rightarrow A$: カンドル 2-コサイクル.

$k := \min\{n \in \mathbb{Z}_{>0} \mid \forall x, y \in Q, x *^n y = x\}$, ただし $\min \emptyset = \infty$.

$\Rightarrow X := \begin{cases} Q \times \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} = \sqcup_{x \in Q} \{x\} \times \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} & (k < \infty) \\ Q \times \mathbb{Z} = \sqcup_{x \in Q} \{x\} \times \mathbb{Z} & (k = \infty) \end{cases} : \text{MCQ}$

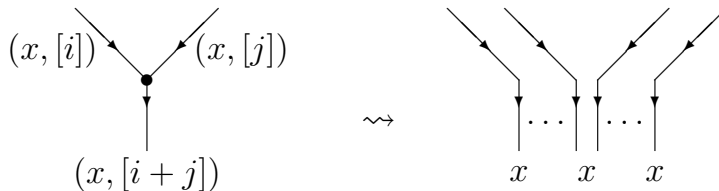
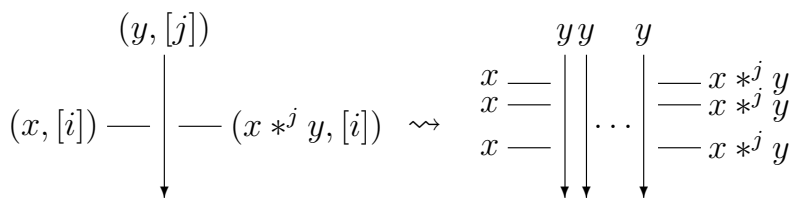
ここで $k < \infty$ ならば $\forall x, y \in Q, k \cdot \theta(x, y) = 0 \dots (\star)$ を仮定しておく.

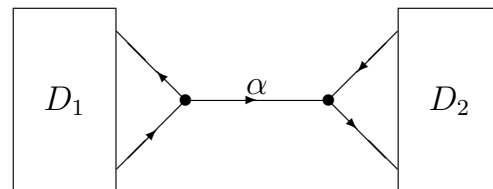
命題 (cf. Matsuzaki-Murao)

$\tilde{\theta} : X^2 \rightarrow A$ を $\tilde{\theta}((x, [i]), (y, [j])) = i \cdot \sum_{l=1}^j \theta(x *^{l-1} y, y)$ で定める.

このとき $(\tilde{\theta}, 0)$ は MCQ 2-コサイクル.

- $(\tilde{\theta}, 0)$ の解釈 $(\tilde{\theta}((x, [i]), (y, [j]))) = i \cdot \sum_{l=1}^j \theta(x *^{l-1} y, y)$





X : カンドル Q から得られる MCQ, $\tilde{\theta} = (\tilde{\theta}, 0)$: MCQ 2-コサイクル
 欲しいもの

$$c : \text{Arc}(D) \rightarrow X: X\text{-彩色 s.t. } \begin{cases} (1) \Phi_{\tilde{\theta}}(D; c) = 0, \\ (2) \sum_{\chi \in \mathcal{C}_1} \Phi_{\tilde{\theta}}(\chi; c) \neq 0. \end{cases}$$

\rightsquigarrow (1) と (2) を満たすような D, Q, θ を見つけてくれば良い.

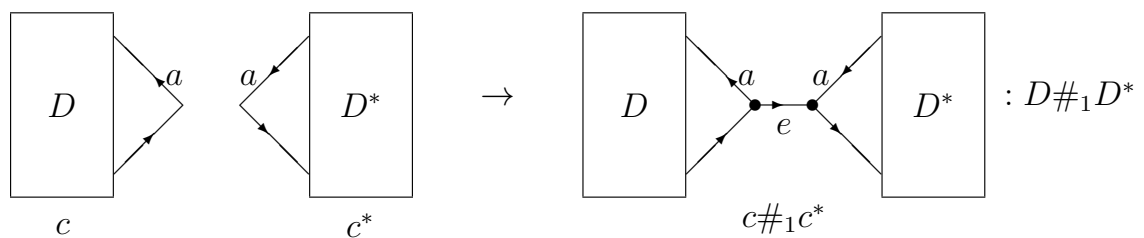
(1) について

D : Y-向き付けられたハンドル体結び目の図式.

D^* : D の鏡像をとることで得られる図式.

事実

$$\forall c \in \text{Col}_X(D), \exists c^* \in \text{Col}_X(D^*) \text{ s.t. } \Phi_{\tilde{\theta}}(D^*, c^*) = -\Phi_{\tilde{\theta}}(D, c).$$



$$\Rightarrow \Phi_{\tilde{\theta}}(D \#_1 D^*, c \#_1 c^*) = \Phi_{\tilde{\theta}}(D \sqcup D^*, c \sqcup c^*) = \Phi_{\tilde{\theta}}(D, c) + \Phi_{\tilde{\theta}}(D^*, c^*) = 0.$$

(2) について

定理 (Eisermann '03, cf. Tanaka-T.)

以下の条件を満たす連結な (かつ有限な) カンドル Q が無限個存在する:

- (★) を満たすカンドル 2-コサイクル $\theta: Q^2 \rightarrow A$ を持つ.
- $\Phi_\theta(D, c) \neq 0$ を満たす有向結び目図式 D とその彩色 $c: \text{Arc}(D) \rightarrow Q$ が存在する.

↪ 定理に出てくる D, Q, θ が求めるものである!

ご清聴ありがとうございました.

On associated groups of quandles

Toshiyuki Akita

We will introduce some of our results concerning associated groups of quandles. See [1, 2, 3] for details. A non-empty set Q equipped with a binary operation $Q \times Q \rightarrow Q$, $(x, y) \mapsto x * y$ is called a *quandle* if it satisfies the following three axioms:

1. $x * x = x$ ($x \in Q$),
2. $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$ ($x, y, z \in Q$),
3. For all $x \in Q$, the map $S_x: Q \rightarrow Q$ defined by $y \mapsto y * x$ is bijective.

The *associated group* $\text{As}(Q)$ of a quandle Q is the group defined by the presentation

$$\text{As}(Q) := \langle e_x (x \in Q) \mid e_y^{-1} e_x e_y = e_{x*y} (x, y \in Q) \rangle.$$

There is a right $\text{As}(Q)$ -action on Q defined by $x \cdot e_y := x * y$ ($x, y \in Q$). If the action is transitive, then Q is called *connected*.

1 A quotient group of $\text{As}(Q)$

The *type* of a quandle Q is defined by $\text{type}(Q) = \min\{n \geq 1 \mid S_x^n = \text{id}_Q \text{ for all } x \in Q\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. For a quandle Q of type $n < \infty$, let F_Q be the quotient group of $\text{As}(Q)$ defined by

$$F_Q := \langle e_x (x \in Q) \mid e_y^{-1} e_x e_y = e_{x*y}, e_x^n = 1 (x, y \in Q) \rangle,$$

The group F_Q was first introduced in [4], provided Q is finite and connected. If Q is finite, then F_Q is a finite group [5]. Let $\pi: \text{As}(Q) \rightarrow F_Q$ be the canonical projection. We obtained the following results:

Theorem 1 (Akita-Hasegawa-Tanno [3]). *Let Q be a connected quandle of type $n < \infty$.*

1. $e_x^n = e_y^n \in \ker \pi$ for all $x, y \in Q$, and $\text{As}(Q)$ fits into the central extension

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} = \langle e_x^n \rangle \rightarrow \text{As}(Q) \xrightarrow{\pi} F_Q \rightarrow 1.$$

2. $\pi: \text{As}(Q) \rightarrow F_Q$ induces an isomorphism $[\text{As}(Q), \text{As}(Q)] \xrightarrow{\cong} [F_Q, F_Q]$ of commutator subgroups.

3. The following commutative square

$$\begin{array}{ccc} \text{As}(Q) & \xrightarrow{\text{ab}} & \text{As}(Q)_{\text{ab}} \cong \mathbb{Z} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi_{\text{ab}} \\ F_Q & \xrightarrow{\text{ab}} & (F_Q)_{\text{ab}} \cong \mathbb{Z}/n \end{array}$$

is a pullback, where *ab* stands for the abelianization.

For connected Coxeter quandles, (1) and (2) were proved in [1], and (3) was proved in [6]. For finite connected quandles, (2) was proved in [5].

2 Injective quandles

A quandle Q is called *injective* if the canonical map $Q \rightarrow \text{As}(Q)$ defined by $x \mapsto e_x$ ($x \in Q$) is injective. It is known that a quandle Q is injective if and only if Q is isomorphic to a subquandle of a conjugation quandle $\text{Conj}(G)$ for some group G . For instance, the knot quandle Q_K of a tame knot K is injective if and only if K is prime (Ryder [7]).

Now let G a group and $\phi: G \rightarrow G$ is an automorphism. The *twisted conjugation quandle* $\text{Conj}(G, \phi)$ associated with (G, ϕ) is a quandle whose underlying set is G equipped with a quandle operation

$$g * h := \phi(h^{-1}g)h.$$

If $\phi = \text{id}_G$, then $\text{Conj}(G, \phi)$ is the conjugation quandle $\text{Conj}(G)$ of G . If G is an abelian group, then $\text{Conj}(G, \phi)$ is nothing but an Alexander quandle. We have proved the following result:

Theorem 2 (Akita [2]). *For any group G and an automorphism $\phi: G \rightarrow G$, the twisted conjugation quandle $\text{Conj}(G, \phi)$ is injective. In particular, any Alexander quandle is injective.*

References

- [1] T. Akita, The adjoint group of a Coxeter quandle, *Kyoto J. Math.* 60 (2020), 1245–1260.
- [2] ———, Embedding Alexander quandles into groups, *J. Knot Theory Ramifications* 32 (2023), Paper No. 2350011, 4 pp.
- [3] T. Akita, A. Hasegawa, and M. Tanno, Structure of the associated groups of quandles, *Kodai Math. J.* 45 (2022), 270–281.
- [4] M. Graña, I. Heckenberger, and L. Vendramin, Nichols algebras of group type with many quadratic relations, *Adv. Math.* 227 (2011), 1956–1989.
- [5] I. Heckenberger and L. Vendramin, Nichols algebras over groups with finite root system of rank two II, *J. Group Theory* 17 (2014), 1009–1034.
- [6] D. Kishimoto, Right-angled Coxeter quandles and polyhedral products, *Proc. Amer. Math. Soc.* 147 (2019), 3715–3727.
- [7] H. Ryder, An algebraic condition to determine whether a knot is prime, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 120 (1996), 385–389.

(T. Akita) Department of Mathematics, Faculty of Science, Hokkaido University, Kita 10, Nishi 8, Kita-Ku, Sapporo, Hokkaido, 060-0810, Japan
Email address: akita@math.sci.hokudai.ac.jp

カンドル

定義 (カンドル)

$(Q, *)$ がカンドル \Leftrightarrow

- ① $\forall y \in Q$ に対し $S_y : Q \rightarrow Q, x \mapsto x * y$ は全単射
- ② $(x * y) * z = (x * z) * (y * z) \quad (x, y, z \in Q)$
- ③ $x * x = x \quad (x \in Q)$

- $(2) \Leftrightarrow S_z(x * y) = S_z(x) * S_z(y)$

例 (共役カンドル)

群 G は演算 $g * h := h^{-1}gh$ によりカンドル ($Conj(G)$ と書く)

カンドルの付随群

定義

Q : カンドル, $S_y : Q \rightarrow Q, x \mapsto x * y \quad (y \in Q)$

- $As(Q) := \langle e_x \ (x \in Q) \mid e_y^{-1}e_x e_y = e_{x*y} \ (x, y \in Q) \rangle$: 付随群
- $Inn(Q) := \langle S_y : Q \rightarrow Q \mid y \in Q \rangle \subset Bij(Q)$: 内部自己同型群
- $As(Q) \twoheadrightarrow Inn(Q), e_x \mapsto S_x$

- $Q \curvearrowright Inn(Q)$ by $x \cdot S_y := S_y(x) = x * y \quad (x, y \in Q)$
- $Q \curvearrowright As(Q)$ by $x \cdot e_y := x * y \quad (x, y \in Q)$
- Q の連結成分 = 作用の軌道, Q が連結 \Leftrightarrow 作用が推移的

左随伴性

$Q \mapsto \text{As}(Q)$ は G (群) $\mapsto \text{Conj}(G)$ の左随伴

$$\text{Hom}_{\text{qdl}}(Q, \text{Conj}(G)) \overset{1:1}{\xrightarrow{\cong}} \text{Hom}_{\text{gp}}(\text{As}(Q), G)$$

分類写像の誘導準同型

$c_*: H_n^{\text{qdl}}(Q) \rightarrow H_n^{\text{gp}}(\text{As}(Q))$ s.t. 同型 ($n = 1$), 全射 ($n = 2$)

Eiserman (2014)

Q : 連結なら $H_2^{\text{qdl}}(Q) \cong ([\text{As}(Q), \text{As}(Q)] \cap \text{Stab}_{\text{As}(Q)}(x_0))_{\text{abel}}$

$\text{As}(Q)$: 調べるのは一般には容易ではない (Q の位数が無限なら生成元と関係式の数も無限).

事実

- $\text{As}(Q)_{\text{abel}} \cong \mathbb{Z}^{\oplus c(Q)}$ ($c(Q) := Q$ の連結成分の個数)
- $c(Q) = 1 \Rightarrow \text{As}(Q) \cong [\text{As}(Q), \text{As}(Q)] \rtimes \mathbb{Z}$
- $K(Q) := \ker(\text{As}(Q) \rightarrow \text{Inn}(Q)) \subset \text{As}(Q)$ の中心

$$1 \rightarrow K(Q) \hookrightarrow \text{As}(Q) \twoheadrightarrow \text{Inn}(Q) \rightarrow 1 \quad (\text{中心拡大})$$

- $\#Q < \infty \Rightarrow \text{rank}_{\mathbb{Z}} K(Q) = c(Q)$

最後の事実は以下の \mathbb{Q} 係数ホモロジーの完全系列から:

$$H_2(\text{Inn}(Q)) \rightarrow H_1(K(Q)) \rightarrow H_1(\text{As}(Q)) \rightarrow H_1(\text{Inn}(Q))$$

As(Q) の例

結び目カンドル

Q_K : 結び目 K の結び目カンドル $\Rightarrow As(Q_K) \cong K$ の結び目群

Alexander カンドル (Clauwens 2011)

M : $\mathbb{Z}[T, T^{-1}]$ 加群, $x * y := y + T(x - y)$

$\mu: M \otimes M \rightarrow M \otimes M, x \otimes y \mapsto x \otimes y - Ty \otimes x$

$\Rightarrow As(M) \cong \mathbb{Z} \times M \times \text{coker}(\mu)$ (as sets)

Wirtinger 表示を持つ群 (Dhanwani et. al. 2021)

群の表示 $G = \langle X \mid R \rangle$ が **Wirtinger 表示**

\Leftrightarrow 全ての関係式は $w^{-1}xw = y$ ($x, y \in X, w \in F(X)$) の形

$$X^G := \bigcup_{g \in G} g^{-1}Xg, \quad As(\text{Conj}(X^G)) \cong G$$

Motivating example

- \mathfrak{S}_n : n 次対称群, A_n : n 次交代群, B_n : n 本のブレイド群
- $T_n := \{(i j) \mid 1 \leq i < j \leq n\} \subset \text{Conj}(\mathfrak{S}_n)$ (互換の全体)
- $As(T_n) = \langle e_s (s \in T_n) \mid e_t^{-1}e_s e_t = e_{tst} (s, t \in T_n) \rangle$: T_n の付随群
- $As(T_n) \twoheadrightarrow \mathfrak{S}_n, e_s \mapsto s$

定理 (Andruskiewitsch-Fantino-García-Vendramin (2011))

- $B_n \twoheadrightarrow As(T_n), \sigma_i \mapsto e_{(i i+1)}$ は well-defined
- $B_n \twoheadrightarrow \mathfrak{S}_n$ は $B_n \twoheadrightarrow As(T_n) \twoheadrightarrow \mathfrak{S}_n$ に分解
- $0 \rightarrow \mathbb{Z} = \langle e_{(12)}^2 \rangle \rightarrow As(T_n) \rightarrow \mathfrak{S}_n \rightarrow 1$ (中心拡大)

(実は \mathbb{Z} の \mathfrak{S}_n による唯一つの非自明な中心拡大)

定理 (Eisermann (2014))

$As(T_n) \cong A_n \rtimes \mathbb{Z}$ ($1 \in \mathbb{Z}$ は $(1 2)$ による共役として A_n に作用)

Coxeter 群と Artin 群

定義

S : 有限集合, $m(s, t) = m(t, s) \in \mathbb{Z}_{\geq 2} \cup \{\infty\}$ ($s \neq t \in S$)

- $W := \langle S \mid s^2 = 1 (s \in S), (st)^{m(s,t)} = 1 (s \neq t, m(s, t) < \infty) \rangle$
- $A_W := \langle a_s (s \in S) \mid \underbrace{a_s a_t a_s \cdots}_{m(s,t)} = \underbrace{a_t a_s a_t \cdots}_{m(s,t)} (s \neq t, m(s, t) < \infty) \rangle$
- $P_W := \ker(A_W \rightarrow W, a_s \mapsto s)$

W : Coxeter 群, A_W : (W の) Artin 群, P_W : (W の) 純 Artin 群

- (W, S) : Coxeter 系 (Coxeter system)
- 一般には $\#W = \infty$. $\#W < \infty \Rightarrow W$ は有限鏡映群
- $W = \mathfrak{S}_n \Rightarrow A_W = B_n, P_W = P_n$ (純ブレイド群)

Coxeter カンドル

定義 (Coxeter カンドル)

(W, S) : Coxeter 系. "鏡映" の集合 Q_W を Coxeter カンドルと呼ぶ:

$$Q_W := \bigcup_{w \in W} w^{-1} S w \subset \text{Conj}(W)$$

- $W = \mathfrak{S}_n \Rightarrow Q_W = T_n$ (互換の全体)
- Q_W は一般には無限位数
- 簡単のため Q_W が連結の場合に $As(Q_W)$ に関するを述べる
- 有限 Coxeter 群 $A_n, D_n, E_6, E_7, E_8, H_3, H_4, I_2(m)$ (m は奇数), アフィン Coxeter 群 $\tilde{A}_n, \tilde{D}_n, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8$ に対し Q_W は連結

定理 (A 2020)

- $A_W \rightarrow As(Q_W) \xrightarrow{P} W, a_s \mapsto e_s \mapsto s (s \in S)$
- $0 \rightarrow \mathbb{Z} = \langle e_s^2 \rangle \rightarrow As(Q_W) \xrightarrow{P} W \rightarrow 1$ は中心拡大 (\mathbb{Z} の W による唯一の非自明な中心拡大). 対応する 2 コサイクルは

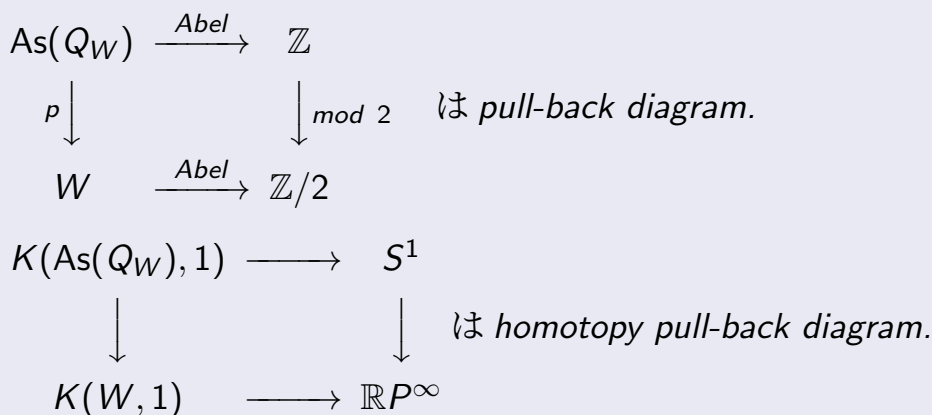
$$c: W \times W \rightarrow \mathbb{Z}, c(w_1, w_2) = \begin{cases} 1 & \ell(w_1), \ell(w_2) \text{ が奇数} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

- $P_W \supset \ker(A_W \rightarrow As(Q_W)) \supset [P_W, P_W]$
- $p: [As(Q_W), As(Q_W)] \xrightarrow{\cong} [W, W], As(W) \cong [W, W] \rtimes \mathbb{Z}$
- $H_2^{qdl}(Q_W) \cong (Z_W(s) \cap [W, W])_{abel} \quad (s \in S)$
- $H_{gp}^*(As(Q_W); \mathbb{Q}) \cong H^*(S^1; \mathbb{Q})$

一般に $W \rightarrow Inn(Q_W) \cong W/Z(W)$

定理の証明では (1) $\tilde{H}_*(W; \mathbb{Q}) = 0$ (Akita 2000) (2) P_W は A_W の正規部分群として一元生成であること (第三準同型定理の帰結) を用いた.

定理 (岸本 2019)



一般化

Q : 連結なカンドル、 $type(Q) := order(S_x : Q \rightarrow Q) = n < \infty$
 $F_Q := As(Q) / \{e_x^n = 1 \ (x \in Q)\}$
 $F_Q \twoheadrightarrow Inn(Q), e_x \mapsto S_x \ (x \in Q)$

定理 (A-Hasegawa-Tanno 2022)

- $\#Q < \infty \Rightarrow \#F_Q < \infty$ (Graña-Heckenberger-Vendramin 2011)
- $0 \rightarrow \mathbb{Z} = \langle e_x^n \rangle \rightarrow As(Q) \xrightarrow{p} F_Q \rightarrow 1$ は中心拡大
- $p: [As(Q), As(Q)] \xrightarrow{\cong} [F_Q, F_Q], As(Q) \cong [F_Q, F_Q] \rtimes \mathbb{Z}$
- pull-back, homotopy pull-back

F_Q は $\#Q < \infty$ のとき GHK 2011 で導入された。

単射的カンドル

単射的カンドル

カンドル Q が**単射的** (injective)

$\stackrel{\text{def}}{\iff} Q \rightarrow As(Q), x \mapsto e_x$ が単射

\iff ある G に対し単射カンドル準同型 $Q \rightarrow Conj(G)$ が存在
 (よって $Conj(G)$ の部分カンドルは単射的)

結び目カンドル (Ryder 1996)

結び目 K の結び目カンドルが単射的 $\iff K$ が素な結び目

単射的カンドルの例

- free quandle, free n -quandle (Joyce 1982)
- commutative $-$, latin $-$, simple quandle (Bardakov-Nasybullov 2020)
- core quandle (Bergman 2021)
- “不動点自由” な自己同型 $\phi: G \rightarrow G$ に付随する generalized Alexander quandle $Alex(G, \phi)$ (Dhanwani-Raundal-Singh 2021)
- free c -nilpotent quandle (Darné 2022)

単射的でない例

- 位数 3 の単射的でない (対合的) カンドル (Joyce 1982)
- 単射的でない generalized Alexander カンドル (Clark et al 2014)

Alexander カンドルの一般化

G : 群、 $\phi: G \rightarrow G$: 自己同型 $\Rightarrow G$ に二種類のカンドル構造

定義

- $g * h := \phi(gh^{-1})h$ ($Alex(G, \phi)$: generalized Alexander quandle)
- $g * h := \phi(h^{-1}g)h$ ($Conj(G, \phi)$: twisted conjugation quandle, twisted homogeneous crossed set (Andruskiewitsch-Graña 2003))
- G : アーベル群 $\Rightarrow Alex(G, \phi) = Conj(G, \phi)$: Alexander カンドル
- $\phi = id_G \Rightarrow \begin{cases} Alex(G, \phi) : \text{自明なカンドル} \\ Conj(G, \phi) = Conj(G) : \text{共役カンドル} \end{cases}$

定理 (A 2023)

任意の $\text{Conj}(G, \phi)$ は単射的。よって任意の Alexander カンドルは単射的。

証明の方針

- 右 \mathbb{Z} 作用 $G \curvearrowright \mathbb{Z}$ を $g \cdot n = \phi^n(g)$ ($g \in G, n \in \mathbb{Z}$) で定める。
- $G \rtimes_{\phi} \mathbb{Z} : \mathbb{Z}$ 作用で定まる半直積

$$\Rightarrow \text{Conj}(G, \phi) \rightarrow \text{Conj}(G \rtimes_{\phi} \mathbb{Z}), \quad g \mapsto (g, 1)$$

は単射カンドル準同型。

Wirtinger 表示を持つ群

Wirtinger 表示 (復習)

- 群の表示 $G = \langle X \mid R \rangle$ が **Wirtinger 表示**
 \Leftrightarrow 全ての関係式は $w^{-1}xw = y$ ($x, y \in X, w \in F(X)$) の形
- Wirtinger 表示が**既約** \Leftrightarrow 生成元が互いに共役

- 既約な例: 結び目群、ブレイド群、連結なカンドルの付随群
- 例: 絡み目群、Artin 群、Thompson の群 F 、カンドルの付随群

$G = \langle X \mid R \rangle$: 既約な Wirtinger 表示, $x_0 \in X$

- $Z_G(x_0) \rightarrow H_2^{gp}(G), g \mapsto [x_0|g] - [g|x_0]$ は全射 (Kuz'min 1996)
- $\exists Z_G(x_0) \cap [G, G] \rightarrow H_2^{gp}(G)$
 - $H_2^{qdl}(\text{Conj}(X^G)) \cong Z_G(x_0) \cap [G, G]$ (Eisermann)
 - $c_*: H_2^{qdl}(\text{Conj}(X^G)) \rightarrow H_2^{gp}(G)$: 分類写像の誘導写像

定理 (A-Takase 2024)

$Z_G(x_0) \cap [G, G] \rightarrow H_2(G), g \mapsto [x_0|g] - [g|x_0]$ は全射準同型

On generalized Alexander quandles arising from finite groups

Jin Kosaka

1 Introduction

Quandle [2, 3] is an algebraic structure that corresponds to the Reidemeister moves in knot theory. In this paper, we provide a theorem classifying the isomorphism classes of quandles in a class called generalized Alexander quandles. This is our original result, which improves upon a theorem given in prior work [1].

First, we provide definitions of quandle and generalized Alexander quandle.

Definition 1.1 ([2, 3]) A pair $(Q, *)$ on a non-empty set Q is called a **quandle** if the binary operation $*$ satisfies the following three conditions:

1. For any $x \in Q$, $x * x = x$ holds.
2. For any $x \in Q$, the mapping $S_x : Q \rightarrow Q$, $y \mapsto y * x$ is bijective.
3. For any $x, y, z \in Q$, $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$ holds.

Definition 1.2 Let G be a group, and $\psi \in \text{Aut}(G)$ be an automorphism of G . Then, defining a binary operation $*$ on G by $x * y = y \psi(y^{-1} x)$ yields a quandle $Q(G, \psi) = (G, *)$ on G . This quandle is called a **generalized Alexander quandle**.

2 Main Result

The main result is a theorem that determines the isomorphism between two given finite generalized Alexander quandles. Here, for $Q = Q(G, \psi)$, where $e \in G$ is the identity element of the group and $P = P(Q)$ is a special subgroup of G determined by Q .

Theorem 2.1 (Main Theorem)

Let G, G' be finite groups, and $\psi \in \text{Aut}(G)$, $\psi' \in \text{Aut}(G')$ be their automorphisms. Let $Q = Q(G, \psi)$, $Q' = Q(G', \psi')$, $P = P(Q)$, $P' = P(Q')$.

Then, the following (1) and (2) are equivalent.

- (1) $Q \cong Q'$.
- (2) There exists a group isomorphism $h : P \rightarrow P'$ satisfying the following (A) and (B).
 - (A) $h \circ \psi|_P = \psi'|_{P'} \circ h$.
 - (B) There exist complete sets of representatives A and A' for G/P and G'/P' respectively, and moreover, there exists a bijection $k : A \rightarrow A'$ such that for any $a \in A$, $h(e * a) = e' * k(a)$ holds.

3 Prior Research

We discuss the prior research by Higashitani and Kurihara, which forms the basis of this paper.

Theorem 3.1 ([1])

Let G, G' be finite groups, and $\psi \in \text{Aut}(G), \psi' \in \text{Aut}(G')$ be their automorphisms. Let $Q = Q(G, \psi), Q' = Q(G', \psi'), P = P(Q), P' = P(Q')$. Assume that Q and Q' satisfy conditions (P1) and (P2). Then, the following (1) and (2) are equivalent.

- (1) $Q \cong Q'$.
- (2) Conditions (i), (ii), and (iii) hold:
 - (i) $|G| = |G'|$.
 - (ii) $|\text{Fix}(\psi, G)| = |\text{Fix}(\psi', G')|$.
 - (iii) There exists a group isomorphism $h : P \rightarrow P'$ satisfying the following (A) and (B).
 - (A) $h \circ \psi|_P = \psi'|_{P'} \circ h$.
 - (B) For any $a \in G$, there exists $a' \in G'$ such that $h(e * a) = e' * a'$ holds.

This theorem provides a criterion for determining whether generalized Alexander quandles are isomorphic, subject to certain conditions (P1), (P2) imposed on $P = P(Q)$. Our main theorem can be used to determine the isomorphism of generalized Alexander quandles without imposing these conditions.

In the prior research [1], generalized Alexander quandles up to order 15 were classified. For order 16, there are two pairs for which isomorphism cannot be determined. Using our theorem, we were able to determine whether these two pairs are isomorphic.

In studies involving orders greater than 16, many pairs of generalized Alexander quandles appear for which isomorphism cannot be determined due to not satisfying conditions (P1) or (P2). By using the main result, we can also provide a criterion for isomorphism for these exceptional pairs of generalized Alexander quandles.

References

- [1] A. Higashitani and H. Kurihara, *Generalized Alexander quandles of finite groups and their characterizations*, arXiv:2210.16763 (2022).
- [2] D. Joyce, *A classifying invariant of knots, the knot quandle*, J. Pure Appl. Algebra 23 (1982), no. 1, 37–65.
- [3] S. V. Matveev, *Distributive groupoids in knot theory*, Mat. Sb. 161 (1982), no. 1, 78–88.

(J. Kosaka) Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka University, 1-1, Machikaneyama, Toyonaka, Osaka, 560-0043, Japan
 Email address: u206409c@ecs.osaka-u.ac.jp

有限群由来の generalized Alexander quandle について

小坂 迅

大阪大学理学研究科

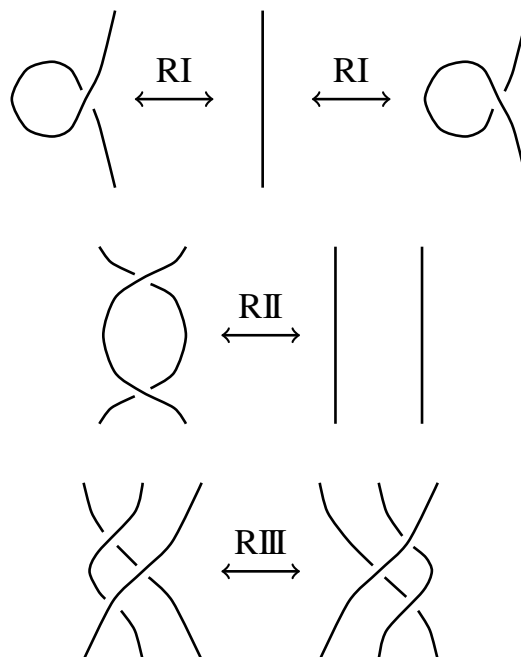
目次

- 1 主結果の概要
- 2 Generalized Alexander quandle
- 3 先行研究
- 4 主結果
- 5 応用

目次

- ① 主結果の概要
- ② Generalized Alexander quandle
- ③ 先行研究
- ④ 主結果
- ⑤ 応用

Reidemeister moves



定義 (Joyce 1982, Matveev 1982)

空でない集合 Q . 二項演算 $*$: $Q \times Q \rightarrow Q$.

$(Q, *)$: **quandle** $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 以下の3公理を満たす:

- (Q1) $x * x = x.$ ($\forall x \in Q$)
 (Q2) $S_x : Q \rightarrow Q, S_x(y) = y * x$ は全単射. ($\forall x \in Q$)
 (Q3) $(x * y) * z = (x * z) * (y * z).$ ($\forall x, \forall y, \forall z \in Q$)

定義 (generalized Alexander quandle)

G : 群. $\psi \in \text{Aut}(G)$.

$$x * y = y \psi(y^{-1} x).$$

$Q(G, \psi) = (G, *)$: **generalized Alexander quandle**.

(G が可換群の場合 $Q(G, \psi)$ は Alexander quandle である.)

主結果の概要

Generalized Alexander quandle の同型類の分類.

Nelson 氏	有限 Alexander quandle (2003)
東谷 氏, 栗原 氏	特定の条件を満たす 有限 Generalized Alexander quandle (2022)
今回	有限 Generalized Alexander quandle

主結果の概要

$Q = Q(G, \psi)$, $Q' = Q(G', \psi')$: 有限 generalized Alexander quandles.

定理 (Main Theorem)

$Q \cong Q' \iff$ 以下の条件を満たす :

$\exists h : P \rightarrow P' : \text{group isomorphism s.t.}$

(A) $h \circ \psi|_P = \psi'|_{P'} \circ h.$

(B) $\exists A$ (resp. $\exists A'$) : G/P (resp. G'/P') の完全代表系.

$\exists k : A \rightarrow A' : \text{全単射 s.t. } h(e * a) = e' * k(a). \quad (\forall a \in A)$

応用

63 以下の自然数 n に対して, $|Q_{\text{GAQ}}(n)|$ の表は次で与えられる.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$ Q_{\text{GAQ}}(n) $	1	1	2	3	4	3	6	9	11	5	10	11	12	7	8
n	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$ Q_{\text{GAQ}}(n) $	29	16	17	18	15	13	11	22	32	39	13	51	20	28	15
n	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
$ Q_{\text{GAQ}}(n) $	30	87	20	17	24	64	36	19	25	45	40	23	42	32	44
n	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
$ Q_{\text{GAQ}}(n) $	23	46	114	83	49	32	39	52	87	41	66	37	29	58	60
n	61	62	63												
$ Q_{\text{GAQ}}(n) $	60	31	69												

目次

- 1 主結果の概要
- 2 Generalized Alexander quandle
- 3 先行研究
- 4 主結果
- 5 応用

Quandle

定義 (Joyce 1982, Matveev 1982)

空でない集合 Q . 二項演算 $*$: $Q \times Q \rightarrow Q$.

$(Q, *)$: **quandle** $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 以下の 3 公理を満たす :

- (Q1) $x * x = x.$ $(\forall x \in Q)$
- (Q2) $S_x : Q \rightarrow Q, S_x(y) = y * x$ は全単射. $(\forall x \in Q)$
- (Q3) $(x * y) * z = (x * z) * (y * z).$ $(\forall x, \forall y, \forall z \in Q)$

注意

- S_x を x における **point symmetry** とよぶ.
- $S_x \in \text{Aut}(Q)$

Generalized Alexander quandle

定義 (generalized Alexander quandle)

G : 群. $\psi \in \text{Aut}(G)$.

$$x * y = y \psi(y^{-1} x).$$

$Q(G, \psi) = (G, *)$: **generalized Alexander quandle**.

(G が可換群の場合 $Q(G, \psi)$ は Alexander quandle である.)

等質カンドルと generalized Alexander quandle

定義 (等質 quandle)

Q が等質 quandle $\stackrel{\text{def}}{\iff} \text{Aut}(Q) \curvearrowright Q$ transitively.

定義 (Quandle の三つ組)

G : 群, $\psi \in \text{Aut}(G)$, $H \subset \text{Fix}(\psi, G)$.

(G, H, ψ) : quandle の三つ組. $xH * yH = y \psi(y^{-1} x)H$.

$Q(G, H, \psi) = (G/H, *)$.

事実

$\{\text{等質 quandle}\} / \cong \stackrel{1:1}{\longleftrightarrow} \{Q(G, H, \psi)\} / \cong$

$H = 1 \implies Q(G, 1, \psi)$ は generalized Alexander quandle.

$Q, Q' : \text{quandle.}$

定義 (quandle isomorphism)

$f : Q \rightarrow Q'$ が **quandle isomorphism**.

$\stackrel{\text{def}}{\iff} f$ は全単射 quandle homomorphism.

定義 (inner automorphism group, 連結成分)

$\text{Inn}(Q) = \langle S_x \mid x \in Q \rangle \subset \text{Aut}(Q).$

$\text{Inn}(Q) \curvearrowright Q.$

$P_x = \text{Inn}(Q) \cdot x : x \text{ の連結成分. } (x \in Q)$

事実

P_x は Q の subquandle である. $(\forall x \in Q)$

$Q = Q(G, \psi) : \text{generalized Alexander quandle. } e \in G.$

定義 (P, P^2)

$P = P(Q) : Q(G, \psi)$ に関する e の連結成分.

$P^2 = P^2(Q) : Q(P, \psi|_P)$ に関する e の連結成分.

事実

- P は G の正規部分群である.
- $\psi|_P (: P \rightarrow P) \in \text{Aut}(P).$

目次

- ① 主結果の概要
- ② Generalized Alexander quandle
- ③ 先行研究
- ④ 主結果
- ⑤ 応用

$Q = Q(G, \psi)$, $Q' = Q(G', \psi')$: 有限 generalized Alexander quandle.
 $P = P(Q)$, $P' = P(Q')$.

定理 (H-K, Theorem 1.4 [arXiv:2210.16763](https://arxiv.org/abs/2210.16763))

Q, Q' が条件 (P1), (P2). を満たすと仮定する.

$Q \cong Q' \iff$ 以下の条件を満たす :

- (i) $|G| = |G'|$.
- (ii) $|\text{Fix}(\psi, G)| = |\text{Fix}(\psi', G')|$.
- (iii) $\exists h : P \rightarrow P' : \text{group isomorphism s.t.}$
 - (A) $h \circ \psi|_P = \psi'|_{P'} \circ h$.
 - (B) $\forall a \in G, \exists a' \in G' \text{ s.t. } h(e * a) = e' * a'$.

(P1) $P^2(Q)$ は G の正規部分群である.

(P2) $P^2(Q) = \{ S_x(e) \mid x \in P(Q) \}$.

目次

- ① 主結果の概要
- ② Generalized Alexander quandle
- ③ 先行研究
- ④ 主結果
- ⑤ 応用

主結果

$Q = Q(G, \psi)$, $Q' = Q(G', \psi')$: 有限 generalized Alexander quandle.
 $P = P(Q)$, $P' = P(Q')$.

定理 (Main Theorem)

$Q \cong Q' \iff$ 以下の条件を満たす :

$\exists h : P \rightarrow P' : \text{group isomorphism s.t.}$

(A) $h \circ \psi|_P = \psi'|_{P'} \circ h.$

(B) $\exists A$ (resp. $\exists A'$) : G/P (resp. G'/P') の完全代表系.

$\exists k : A \rightarrow A' : \text{全単射 s.t. } h(e * a) = e' * k(a). (\forall a \in A)$

定理 (H-K, Theorem 1.4 [arXiv:2210.16763](https://arxiv.org/abs/2210.16763))

$Q(G, \psi)$, $Q(G', \psi')$ が条件 (P1), (P2) をみたすと仮定する.

$Q(G, \psi) \cong Q(G', \psi') \iff$ 以下の条件を満たす :

- (i) $|G| = |G'|$
- (ii) $|\text{Fix}(\psi, G)| = |\text{Fix}(\psi', G')|$
- (iii) $\exists h : P \rightarrow P' : \text{group isomorphism s.t.}$
 - (A) $h \circ \psi|_P = \psi'|_{P'} \circ h$
 - (B) $\forall a \in G, \exists a' \in G' \text{ s.t. } h(e * a) = e' * a'$

定理 (Main Theorem)

$Q(G, \psi) \cong Q(G', \psi') \iff$ 以下の条件を満たす :

$\exists h : P \rightarrow P' : \text{group isomorphism s.t.}$

- (A) $h \circ \psi|_P = \psi'|_{P'} \circ h.$
- (B) $\exists A \text{ (resp. } \exists A') : G/P \text{ (resp. } G'/P') \text{ の完全代表系.}$
 $\exists k : A \rightarrow A' : \text{全単射 s.t. } h(e * a) = e' * k(a). \text{ (} \forall a \in A \text{)}$

$Q = Q(G, \psi)$, $Q' = Q(G', \psi') : \text{有限 generalized Alexander quandle.}$
 $P = P(Q)$, $P' = P(Q')$.

定理 (Main Theorem)

$Q \cong Q' \iff$ 以下の条件を満たす :

$\exists h : P \rightarrow P' : \text{group isomorphism s.t.}$

- (A) $h \circ \psi|_P = \psi'|_{P'} \circ h.$
- (B) $\exists A \text{ (resp. } \exists A') : G/P \text{ (resp. } G'/P') \text{ の完全代表系.}$
 $\exists k : A \rightarrow A' : \text{全単射 s.t. } h(e * a) = e' * k(a). \text{ (} \forall a \in A \text{)}$

証明の概略

$$Q \cong Q' \implies \exists h : P \rightarrow P' \text{ s.t. } (A), (B)$$

generalized Alexander quandle についての性質,
([H-K], Theorem 3.10) より従う.

$$\exists h : P \rightarrow P' \text{ s.t. } (A), (B) \implies Q \cong Q'$$

$$h : P \rightarrow P'. \quad k : A \rightarrow A'.$$

$$\forall x \in G, x = a_x p_x. \quad (\exists! a_x \in A, \exists! p_x \in P)$$

$f : G \rightarrow G'$ を $f(a_x p_x) = h(a_x p_x a_x^{-1}) k(a_x)$ で定める.

このとき f は quandle isomorphism を構成する.

目次

- ① 主結果の概要
- ② Generalized Alexander quandle
- ③ 先行研究
- ④ 主結果
- ⑤ 応用

応用 (1)

位数 16 の generalized Alexander quandle において、条件 (P1), (P2) を満たさず, [H-K]Theorem 1.4 により同型を判別できない組が 2 組存在する.

今回の Main Theorem を用いることで、各組の quandle は同型であることが分かった.

応用 (2)

63 以下の自然数 n に対して, $|Q_{\text{GAQ}}(n)|$ の表は次で与えられる.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$ Q_{\text{GAQ}}(n) $	1	1	2	3	4	3	6	9	11	5	10	11	12	7	8
n	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$ Q_{\text{GAQ}}(n) $	29	16	17	18	15	13	11	22	32	39	13	51	20	28	15
n	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
$ Q_{\text{GAQ}}(n) $	30	87	20	17	24	64	36	19	25	45	40	23	42	32	44
n	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
$ Q_{\text{GAQ}}(n) $	23	46	114	83	49	32	39	52	87	41	66	37	29	58	60
n	61	62	63												
$ Q_{\text{GAQ}}(n) $	60	31	69												

ご清聴ありがとうございました。

An embedding of a smooth quandle into a Lie group

Kentaro Yonemura

1 Abstract

A *smooth quandle* is a class of quandles defined by Ishikawa [3]. A smooth quandle is a differentiable manifold with smooth operation which satisfies the quandle condition. Quandle classes are often compared to group classes and smooth quandles are analogous to Lie groups. We suggest the following conjecture:

Conjecture 1.1 *For any topologically connected and algebraically connected smooth quandle X , there is a Lie group G and a smooth embedding $\iota : X \rightarrow G$ that is a quandle homomorphism if we consider G to be a conjugacy quandle.*

Conjecture 1.1 means that there is an embedding with respect to both of the quandle structures and manifold structures into Lie groups for any smooth quandles. We prove the conjecture in the case of spherical quandles. See Theorem 2.1.

2 Main theorem

We introduce the spherical quandle defined by Azcan and Fenn [1]. Let $\langle -, - \rangle : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ be the Euclidean inner product, and let S^n be the n sphere.

$$\{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}.$$

We define the binary operation $\triangleright : S^n \times S^n \rightarrow S^n$ as $\mathbf{x} \triangleright \mathbf{y} = 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \mathbf{y} - \mathbf{x}$ for all $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S^n$. Then (S^n, \triangleright) is a smooth quandle and called the spherical quandle $S_{\mathbb{R}}^n$.

We prove that Conjecture 1.1 is right in the case of spherical quandles.

Theorem 2.1 (Y., [2]) *For any positive integer n , there is a Lie group G_n and a smooth embedding $\iota_n : S^n \rightarrow G_n$ which is a quandle homomorphism if we regard S^n as a spherical quandle and G_n is a conjugacy quandle. Especially,*

$$G_n = \begin{cases} O(2) & (n = 1) \\ Spin(n + 1) & (n \text{ is even}) \\ Pin(n + 1) & (n \text{ is odd and } n \geq 3) \end{cases}.$$

Theorem 2.1 is already mentioned by M. Eisermann without proof. See [2, Remark 3.12].

Professor Tamaru proposes to investigate whether Theorem 2.1 can be extended to the case of oriented real Grassmann manifolds.

3 Future works

We have many issues with smooth quandles to consider. We suggest some examples.

- Can we describe the relationship between the equivariant cohomology and the quandle cohomology of smooth quandles?
- Can we describe the relationship between a discrete group action and a smooth quandle operation? (c.f. Clifford-Klein form)

We hope that you will begin to research smooth quandles.

References

- [1] H. Azcan and R. Fenn. Spherical representations of the link quandles. *Turkish J. of Mathematics*, 18:102–110, 1994.
- [2] M. Eisermann. Quandle coverings and their Galois correspondence. *Fund. Math.*, 225(1):103–168, 2014.
- [3] K. Ishikawa. On the classification of smooth quandles. preprint.

(K. Yonemura) Frontier Technologies Laboratory, Osaka Works, Sumitomo Electric Industries, Ltd., 1-1-3, Shimaya, Konohana-ku, Osaka, 554-0024, Japan
Email address: yonemura-kentaro@sei.co.jp

多様体構造を持つカンドルの Lie 群への埋め込み カンドルと対称空間

米村拳太郎

住友電気工業株式会社

2024 年 1 月 27 日

目次

- ① はじめに
- ② カンドルに関する準備
- ③ 定理の証明に用いるアイデア：Lie 群の作用の持ち上げ
- ④ 定理の証明
- ⑤ おわりに

目次

- ① はじめに
- ② カンドルに関する準備
- ③ 定理の証明に用いるアイデア：Lie 群の作用の持ち上げ
- ④ 定理の証明
- ⑤ おわりに

この講演を通して考える予想

カンドル (quandle)

結び目の射影図への操作を抽出して得られる代数系。

Smooth quandle

K.Ishikawa によって定義された多様体構造と滑らかな演算を備えたカンドル。

群論と比較すると、Lie 群に相当するカンドルのクラス。

予想 [講演者]

代数的連結かつ位相的連結な smooth quandle X に対し、適当な Lie 群 G と、滑らかな埋め込み $\iota: X \looparrowright G$ で、 G を共役カンドルとみたときにカンドル準同型であるものが存在する。

はじめに

関連研究紹介

問題

カンドル Q が与えられたとき、適当な群 G が存在して、単射カンドル準同型 $\iota: Q \rightarrow \text{Conj } G$ が存在するか？

ただし、結び目理論への応用を考えると、成り立つクラスを探すことには重要な意義がある。

関連研究

- Joyce 1982
- Bardakov-Dey-Singh 2017
- Akita to appear JKR ←NEW

[Clark-Saito 2016]

共役カンドルかどうかは、Vendramin による判定条件により分かる。

米村拳太郎 (住友電工)

多様体構造を持つカンドルの Lie 群への埋め込み

2024 年 1 月 27 日

5 / 44

はじめに

何故この問題を考えるか 1/3

結び目の不変量への応用 1/2

Chern-Simons 不変量への応用

結び目の Chern-Simons 不変量の計算に応用することが出来るかもしれない。

井上-蒲谷による先行研究

結び目の主 $PSL(2, \mathbb{C})$ 束に関する Chern-Simons 不変量 (複素体積) の計算が (以下を準備できれば、) 簡易になることを示した：

- 双曲カンドルのカンドル 2-コサイクル
- 双曲カンドルによる彩色

この研究では、「双曲カンドル」という $PSL(2, \mathbb{C})$ に埋め込まれるカンドルが用いられている。

上記の一般論への応用理論は既に研究されている。

米村拳太郎 (住友電工)

多様体構造を持つカンドルの Lie 群への埋め込み

2024 年 1 月 27 日

6 / 44

はじめに

何故この問題を考えるか 2/3

結び目の不変量への応用 2/2

longitudinal mapping への応用

[Clark-Saito2018] による結び目の不変量 longitudinal mapping

$$\mathcal{L}_G^x : \{f \in \text{Hom}(\pi_1(S^3 \setminus K), G) : f(m) = x\} \rightarrow G \quad f \mapsto f(l)$$

を計算する際に役立つ。

注：m：結び目のメリディアン、l：結び目のロンジチュード

定義にカンドルが出てこないけれど.....

[Nosaka 2017] を用いると、定義域をカンドルによる彩色で書き換えることができる。

はじめに

何故この問題を考えるか 3/3

何故クラスを狭くしているのか？

理由

連結 Lie 群の普遍被覆 $p : \tilde{G} \rightarrow G$ およびそこから得られる短完全列

$$1 \rightarrow \pi_1(G) \rightarrow \tilde{G} \xrightarrow{p} G \rightarrow 1$$

には次の 3 つの構造が同時に入っているため。

- (位相的な) 被覆
- (代数的な) カンドル被覆
- 群の中心拡大

- 中心拡大はカンドル構造を調べる上で重要
- 今まで出ていなかった面白い例が出てくるのではないかな？

はじめに

この講演でお話すること

球面カンドルの場合に、予想が正しいことを示す。

[Eisermann, 講演者]

n を 2 以上の整数とする。

球面カンドル $S_{\mathbb{R}}^n$ に対し、滑らかな埋め込み $\iota: S_{\mathbb{R}}^n \hookrightarrow Pin(n+1)$ で、 $Pin(n+1)$ を共役カンドルとみたときにカンドル準同型であるものが存在する。

事実自体は [Eisermann 2014] において証明なしで言及されている。

$n = 1$ の場合

$O(2)$ に埋め込まれる：

$$S_{\mathbb{R}}^1 \rightarrow O(2) \quad (\cos \theta, \sin \theta) \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

カンドルに関する準備

目次

- ① はじめに
- ② カンドルに関する準備
- ③ 定理の証明に用いるアイデア：Lie 群の作用の持ち上げ
- ④ 定理の証明
- ⑤ おわりに

カンドルに関する準備

準備：カンドルの定義

カンドル [Joyce, Matveev 1982]

空でない集合 X と二項演算 $\triangleright : X \times X \rightarrow X$ の組 (X, \triangleright) が次の3つの条件 Q1~Q3 を満たすとき、カンドルという。

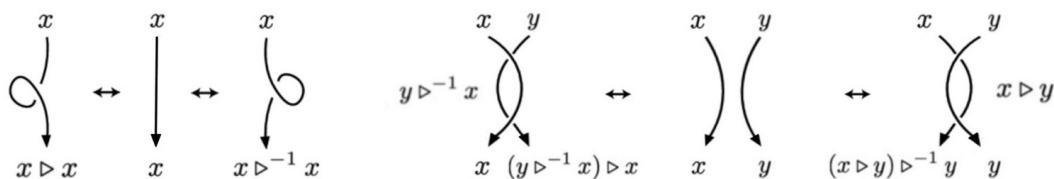
- Q1 (冪等性) 任意の $x \in X$ に対して $x \triangleright x = x$ が成り立つ。
- Q2 (逆元) 任意の $x, y \in X$ に対して $x = z \triangleright y$ を満たす $z \in X$ が一意に存在する。
- Q3 (自己分配性) 任意の $x, y, z \in X$ に対して $(x \triangleright y) \triangleright z = (x \triangleright z) \triangleright (y \triangleright z)$ が成り立つ。

演算の幾何学的解釈

カンドルの定義に現れる条件 Q1~Q3 は、結び目の射影図に対する「Reidemeister 移動」と呼ばれる操作に対応している。

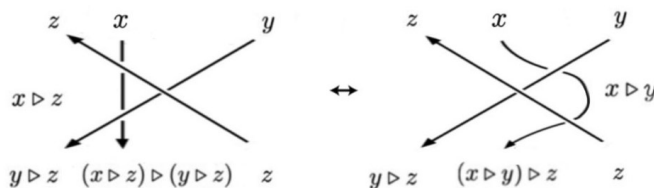
カンドルに関する準備

準備：カンドル演算の幾何学的解釈



Type I

Type II



Type III

準備：カンドル演算に用いる記号

カンドル演算のいろいろな表記

文献によって、演算を表す記号が大きく異なる。

$$\begin{aligned} x \triangleright y &= x * y \\ &= x \triangleleft y \\ &= x^y \\ &= y \star x \dots \text{etc} \end{aligned}$$

この文献の場合

[Joyce 1982] で用いられている $x \triangleright y$ という書き方を採用する。

準備：カンドルの例 1/4

自明なカンドル

集合 X に対して、二項演算を

$$\triangleright : X \times X \rightarrow X \quad (x, y) \mapsto x$$

と定めるとカンドルになる。これを自明なカンドルという。

注

空集合を除く全ての集合にカンドル構造が少なくともひとつ入る。

準備：カンドルの例 2/4

共役カンドル

G を群とする。新たな二項演算を

$$\triangleright : G \times G \rightarrow G \quad (g, h) \mapsto h^{-1}gh$$

と定めると、カンドルとなる。これを共役カンドルといい、 $\text{Conj } G$ とかく。

随伴性

共役カンドルを構成する Conj は群のなす圏とカンドルのなす圏をつなぐ右随伴関手を与える。

準備：カンドルの例 3/4

二面体カンドル [Takasaki 1943]

$X = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ とする。二項演算を

$$\triangleright : X \times X \rightarrow X \quad (x, y) \mapsto 2y - x$$

と定めるとカンドルになる。これを二面体カンドルという。

二面体カンドルの生まれた経緯

「圭」と呼ばれる代数系の例として構成された。

準備：カンドルの例 4/4

球面カンドル [Azcan-Fenn 1994]

S^n を \mathbb{R}^{n+1} に埋め込まれた単位球面、 $\langle -, - \rangle$ を \mathbb{R}^{n+1} の Euclid 内積とする。このとき、球面上の二項演算を

$$\triangleright : S^n \times S^n \rightarrow S^n \quad (x, y) \mapsto 2\langle x, y \rangle y - x$$

と定めるとカンドルとなる。これを球面カンドルといい、 $S_{\mathbb{R}}^n$ とかく。

一般化 [Azcan-Fenn 1994]

\mathbb{R}^{n+1} を（標数が 2 でない体上の） $n+1$ 次元線形空間 V 、 $\langle -, - \rangle$ を V 上の対称双線形形式としても、同様にしてカンドルを構成することが出来る。

準備：カンドル準同型

カンドル準同型・同型

X, Y をカンドル、 $f : X \rightarrow Y$ を写像とする。このとき、 f が

$$f(x \triangleright y) = f(x) \triangleright f(y)$$

を満たすとき、カンドル準同型であるという。全単射なカンドル準同型を同型という。

カンドルの定義から現れる準同型の例

X をカンドルとし、 $y \in X$ とする。写像

$$S_y : X \rightarrow X \quad x \mapsto x \triangleright y$$

はカンドルの定義 Q3 から準同型であり、Q2 より同型である。

準備：内部自己同型群

内部自己準同型

X をカンドルとする。各 $y \in X$ に対して、自己同型

$$S_y : X \rightarrow X \quad x \mapsto x \triangleright y$$

を内部自己同型という。内部自己同型で生成される自己同型群の部分群を内部自己同型群といい、 $\text{Inn } X$ とかく。

$\text{Inn } X$ は X 自身に右から自然に作用する。

代数的連結

$X \curvearrowright \text{Inn } X$ が推移的であるとき、 X は代数的連結であるという。

代数的連結性について

結び目に対して定まるカンドルが持つ条件である。

準備：内部自己同型にまつわる例 1/2

自明なカンドル

この場合、内部自己同型は全て恒等写像になり、内部自己同型群は自明な群となる。

共役カンドルの場合

G を群とすると、カンドルとしての内部自己同型は

$$S_y(x) = x \triangleright y = y^{-1}xy$$

となり、群としての内部自己同型と一致する。また、内部自己同型群も一致する。

$$\text{Inn } G \cong G/Z(G) \cong \text{Inn Conj } G$$

準備：内部自己同型にまつわる例 2/2

球面カンドルの場合

球面カンドルは代数的連結である。

球面カンドルの内部自己同型群 [Nosaka 2017]

$$\text{Inn } S_{\mathbb{R}}^n \cong \begin{cases} O(n+1) & (n \text{ is odd}) \\ SO(n+1) & (n \text{ is even}) \end{cases}$$

まとめると

内部自己同型の作用は、自然な球面 S^n への $O(n+1)$ の作用である。
 $y = (1, 0, \dots, 0)g$ に対して、 S_y に対応する行列は次のようになる：

$$g^{-1} \text{diag}(1, -1, \dots, -1)g$$

準備：smooth quandle

smooth quandle [Ishikawa]

滑らかな多様体 X と滑らかな演算 $\triangleright : X \times X \rightarrow X$ が次の条件を満たすとき、 (X, \triangleright) を smooth quandle という。

- (X, \triangleright) はカンドルである
- 全ての内部自己同型が微分同相である

smooth quandle の内部自己同型 [Ishikawa]

代数的連結かつ位相的連結な smooth quandle (X, \triangleright) に対して、次が成り立つ。

- 内部自己同型群は $\text{Inn } X$ は Lie 群である。
- $\text{Inn } X$ の単位連結成分も X に推移的に作用する

代数的連結かつ位相的連結な smooth quandle は等質空間となる。

再掲：この講演で示すこと

球面カンドルの場合に、予想が正しいことを示す。

[Eisermann, 講演者]

n を 2 以上の整数とする。

球面カンドル $S_{\mathbb{R}}^n$ に対し、滑らかな埋め込み $\iota : S_{\mathbb{R}}^n \hookrightarrow Pin(n+1)$ で、 $Pin(n+1)$ を共役カンドルとみたときにカンドル準同型であるものが存在する。

事実自体は [Eisermann 2014] において証明なしで言及されている。

目次

- ① はじめに
- ② カンドルに関する準備
- ③ 定理の証明に用いるアイデア：Lie 群の作用の持ち上げ
- ④ 定理の証明
- ⑤ おわりに

定理の証明に用いるアイデア：Lie 群の作用の持ち上げ

アイデア

アイデア

被覆と多様体構造を用いて、Lie 群の作用を持ち上げる。つまり、内部自己同型の作用

$$S^n \curvearrowright \text{Inn } S_{\mathbb{R}}^n \cong \begin{cases} O(n+1) & n \text{ is odd} \\ SO(n+1) & n \text{ is even} \end{cases}$$

から新たな群作用

$$S^n \curvearrowright Spin(n+1)$$

を被覆の構造と多様体構造から構成する。

このアイデアを使うには、smooth quandle を考える必要がある。

参考文献

J.Montaldi-J,P,Ortega 2008

定理の証明に用いるアイデア：Lie 群の作用の持ち上げ

Lie 群の多様体への作用

G : Lie 群、 M : 多様体、 $M \curvearrowright G$

群作用に対応する反群準同型 $\tau : G \rightarrow \text{Diff } M$ を考える：

$$\tau(xy) = \tau(y)\tau(x) \quad (x, y \in G)$$

Lie 代数による極小作用

\mathfrak{g} を G に関する Lie 代数とする。 $X \in \mathfrak{g}$ に対して、 $X_M \in \mathfrak{X}(M)$ を

$$(X_M(x))(\xi) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \xi(x \cdot \exp tX)$$

で定めると、Lie 代数射 $d\tau : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ が得られる。これを群作用 τ から得られる \mathfrak{g} の極小作用という。

定理の証明に用いるアイデア：Lie 群の作用の持ち上げ

Lie-Palais の定理

逆はできるのか？

問題

Lie 代数による多様体への極小作用から、Lie 群による多様体への作用を構成することは出来るか？

・・・条件を付ければ正しい。

Lie-Palais の定理

M ：多様体、 G ：連結かつ単連結な有限次元 Lie 群、
 \mathfrak{g} ： G の Lie 代数 とする。

Lie 代数射 $\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ に対して、反群準同型 $\tau : G \rightarrow \text{Diff } M$ で

$$d\tau = \psi$$

を満たすものが一意に存在する。

米村拳太郎 (住友電工)

多様体構造を持つカンドルの Lie 群への埋め込み

2024 年 1 月 27 日

27 / 44

定理の証明に用いるアイデア：Lie 群の作用の持ち上げ

群作用の持ち上げ 1/3

ここからの目的

[J.Montaldi-J,P,Ortega 2008] に従って群作用の持ち上げを構成する。ただし、彼らの手法とは異なり、同論文 Remark 2.2 で述べられている同値な構成方法のメモをもとに構成したものである。

構成したいもの

$\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ ：連結な多様体 M の被覆、

$p : \tilde{G} \rightarrow G$ ：連結 Lie 群 G の普遍被覆とする。このとき、群作用

$$M \curvearrowright G$$

から群作用

$$\tilde{M} \curvearrowright \tilde{G}$$

を構成する。

米村拳太郎 (住友電工)

多様体構造を持つカンドルの Lie 群への埋め込み

2024 年 1 月 27 日

28 / 44

群作用の持ち上げ 2/3

構成を述べる：
群作用から得られる反群準同型

$$\tau : G \rightarrow \text{Diff } M$$

とそこから得られる極小作用

$$d\tau : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

を考える。各 $d\tau(X) = X_M$ に対して、 $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ は局所同相より、

$$d\pi \tilde{X}_{\tilde{M}} = X_M \circ \pi$$

を満たす $\tilde{X}_{\tilde{M}} \in \mathfrak{X}(\tilde{M})$ が一意に存在する。これにより、Lie 代数射

$$\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{X}(\tilde{M}) \quad X \mapsto \tilde{X}_{\tilde{M}}$$

が得られる。

群作用の持ち上げ 3/3

つづき： $p : \tilde{G} \rightarrow G$ の誘導する同型により、 \tilde{G} と G の Lie 代数を同一視し、Lie-Palais の定理を用いると、

$$d\tilde{\tau} = \psi$$

を満たすような群作用

$$\tilde{\tau} : \tilde{G} \rightarrow \text{Diff}(\tilde{M})$$

が一意に得られる。

定理の証明に用いるアイデア：Lie 群の作用の持ち上げ

群作用の持ち上げ：球面への持ち上げ 1/2

記号の定義

$$S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{j=1}^{n+1} x_j = 1\}$$

$$SO(n+1) = \{A \in M(n+1, \mathbb{R}) \mid {}^tAA = E, \det A = 1\}$$

$$\mathbb{R}P^n = S^n / \{\pm 1\}$$

群作用 $S^n \curvearrowright SO(n+1)$ から誘導される群作用 $\mathbb{R}P^n \curvearrowright SO(n+1)$ を考える。

米村拳太郎 (住友電工)

多様体構造を持つカンドルの Lie 群への埋め込み

2024 年 1 月 27 日

31 / 44

定理の証明に用いるアイデア：Lie 群の作用の持ち上げ

群作用の持ち上げ：球面への持ち上げ 2/2

命題

群作用 $\mathbb{R}P^n \curvearrowright SO(n+1)$ の π による持ち上げ $S^n \curvearrowright Spin(n+1)$ は

$$\tilde{x} \cdot \tilde{g} := \tilde{x}p(\tilde{g}) \quad (\tilde{x} \in S^n, \tilde{g} \in Spin(n+1))$$

により定まる群作用と一致する。

証明：

$d\tau = \psi$ を満たすのか計算して調べる。

米村拳太郎 (住友電工)

多様体構造を持つカンドルの Lie 群への埋め込み

2024 年 1 月 27 日

32 / 44

定理の証明に用いるアイデア：Lie 群の作用の持ち上げ

群作用の持ち上げ：共役類への持ち上げ 1/2

$$h = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \in O(n+1)$$

とし、 \tilde{h} を普遍被覆 $p: Pin(n+1) \rightarrow O(n+1)$ に関する h のファイバーのひとつとする。また、

$$\text{Conj}(h) = \{g^{-1}hg \mid g \in O(n+1)\}$$

を h の $O(n+1)$ に関する共役類、

$$\text{Conj}(\tilde{h}) = \{\tilde{g}^{-1}\tilde{h}\tilde{g} \mid \tilde{g} \in Pin(n+1)\}$$

を \tilde{h} の $Pin(n+1)$ に関する共役類とする。

米村拳太郎 (住友電工)

多様体構造を持つカンドルの Lie 群への埋め込み

2024 年 1 月 27 日

33 / 44

定理の証明に用いるアイデア：Lie 群の作用の持ち上げ

群作用の持ち上げ：共役類への持ち上げ 2/2

命題

共役により定まる群作用 $\text{Conj}(h) \curvearrowright SO(n+1)$ を考える。

- 写像

$$\pi_h : \text{Conj}(\tilde{h}) \rightarrow \text{Conj}(h) \quad x \mapsto p(x)$$

は普遍被覆である。

- 群作用 $\text{Conj}(h) \curvearrowright SO(n+1)$ を π_h による持ち上げ $\text{Conj}(\tilde{h}) \curvearrowright Spin(n+1)$ は共役により定まる群作用と一致する。

証明：

(1 つ目) 教科書 [Helgason 2001] の命題を組み合わせる。

(2 つ目) 直接の計算による。

米村拳太郎 (住友電工)

多様体構造を持つカンドルの Lie 群への埋め込み

2024 年 1 月 27 日

34 / 44

目次

- ① はじめに
- ② カンドルに関する準備
- ③ 定理の証明に用いるアイデア：Lie 群の作用の持ち上げ
- ④ 定理の証明
- ⑤ おわりに

状況の整理

$$\begin{array}{ccc} (S^n, e_1) & \xrightarrow{\iota} & (\text{Conj}(\tilde{h}), \tilde{h}) \\ \pi \downarrow & & \pi_h \downarrow \\ (\mathbb{R}P^n, \pi(e_1)) & \xrightarrow{i} & (\text{Conj}(h), h) \end{array}$$

写像 $\text{inn} : S^n \rightarrow O(n+1)$

一般論

カンドル X から得られる写像

$$X \rightarrow \text{Inn } X \quad y \mapsto S_y$$

は、 $\text{Inn } X$ を共役カンドルだとみなすとカンドル準同型である。

これを球面カンドルの場合に当てはめ、内部自己同型群を直交群の部分群だと思つと、

$$S^n \rightarrow O(n+1) \quad (1, 0, \dots, 0)g \mapsto g^{-1} \text{diag}(1, -1, \dots, -1)g$$

という写像を得る。ここから、カンドル同型かつ微分同相写像

$$i : \mathbb{R}P^n \rightarrow \text{Conj}(h) \subset O(n+1)$$

が誘導される。

埋め込みの構成

これまでの議論から、埋め込みを構成する。

埋め込みの構成

次のような流れで示す

- 微分同相写像 $\iota : S^n \xrightarrow{\sim} \text{Conj}(\tilde{h})$ が誘導される。
- ι は $Spin(n+1)$ 同変であることに注意する。
- これを用いて、 ι がカンドル準同型であることを示す。

目次

- ① はじめに
- ② カンドルに関する準備
- ③ 定理の証明に用いるアイデア：Lie 群の作用の持ち上げ
- ④ 定理の証明
- ⑤ おわりに

まとめ

再々掲 [Eisermann, 講演者]

n を 2 以上の整数とする。

球面カンドル $S_{\mathbb{R}}^n$ に対し、滑らかな埋め込み $\iota: S_{\mathbb{R}}^n \hookrightarrow Pin(n+1)$ で、 $Pin(n+1)$ を共役カンドルとみたときにカンドル準同型であるものが存在する。

おわりに

宿題

講演者が持っている宿題 [田丸]

球面 S^n の場合から有向実 Grassmann 多様体 $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ の場合に定理を拡張できないか？

解決しないといけない点

- ① 有向実 Grassmann 多様体 $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ は Grassmann 多様体 $G_k(\mathbb{R}^n)$ の普遍被覆だが、 $n = 2k$ のときは、直交群に埋め込めない。
- ② 埋め込み先は Pin 群で大丈夫か？

状況の整理

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{G}_k(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{?} & Pin(n) \\
 \pi \downarrow & & \pi_h \downarrow \\
 G_k(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{?} & O(n)
 \end{array}$$

おわりに

宿題

 $n \neq 2k$ のとき

球面の時と同じようにできそう。

 $n = 2k$ のかつ k のが奇数のとき Pin に埋め込めるであろう。 $n = 2k$ のかつ k が偶数のとき Pin に埋め込めない。埋め込み先を探す必要がある？

おわりに

今後の課題

定理の拡張

コンパクト Riemann 対称空間上に定まるカンドルへと定理を拡張することは出来ないか？

反例探し

恐らく、反例があると考えられる。

新しい問題の構成

面白い問題を作れないか？例えば.....

- ① smooth quandle の同変コホモロジーとカンドルコホモロジーの関係は？
- ② 離散群の作用とカンドル構造の関係は？ (cf.Clifford-Klein 形)

面白い問題は多いと思われるので、参入をお待ちしております。

おわりに

ご清聴ありがとうございました。

Canonical connections on $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -symmetric spaces

Masamichi Deguchi

1 Introduction

The concept of symmetric spaces was introduced by E. Cartan in the 1920s. After that O. Loos defined symmetric spaces by an algebraic method([1]). R. Lutz introduced a Γ -symmetric space in 1968. It is a generalization of a symmetric space. A $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -symmetric space is a special case of a Γ -symmetric space. In this paper, we define a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -symmetric space by an algebraic method and we generalize a part of Loos' theory to $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -symmetric spaces.

Definition 1.1. Let M be a smooth manifold. Let $\mu^1, \mu^2 : M \times M \rightarrow M$ be smooth maps and $x *_i y$ denotes $\mu^i(x, y)$ ($i = 1, 2$). (M, μ^1, μ^2) is a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -symmetric space if for any $x, y, z \in M, i, j \in \{1, 2\}$

- (1) $x *_i x = x$, (2) $x *_i (x *_i y) = y$, (3) $x *_i (y *_j z) = (x *_i y) *_j (x *_i z)$,
- (4) x is an isolated fixed point in $\{y \in M \mid \mu_x^i(y) = y (i \in \{1, 2\})\}$,
- (5) $\mu_x^1 \neq \mu_x^2, \mu_x^1 \neq \text{id}_M$ and $\mu_x^2 \neq \text{id}_M$.

We fix a point $o \in M$ and we call o the base point of M , We denote by μ_x^i the left multiplication as same as a symmetric space. This definition is based on the Loos' definition.

2 Oriented flag manifolds

In this section, we show an example of a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -symmetric space. We denote by $\tilde{F}_{k_1, k_2 - k_1}(\mathbb{R}^n)$ the oriented flag manifold consisting of pairs of oriented real vector spaces of dimension k_1, k_2 respectively in \mathbb{R}^n . We can write $\tilde{F}_{k_1, k_2 - k_1}(\mathbb{R}^n)$ as $SO(n)/SO(k_1) \times SO(k_2 - k_1) \times SO(n - k_2)$. Let e_1, \dots, e_n be a canonical basis of \mathbb{R}^n , let o_i be a subspace spanned by e_1, \dots, e_{k_i} and o_i has a positive orientation which is determined by the basis e_1, \dots, e_{k_i} . We denote by s_i a diagonal matrix whose first k_i entries are 1 and the others are -1 . We define symmetries $*_1, *_2$ at $o = (o_1, o_2)$ of $\tilde{F}_{k_1, k_2 - k_1}(\mathbb{R}^n)$ by

$$\begin{aligned} (o_1, o_2) *_1 (\tilde{V}_1, \tilde{V}_2) &= (s_1 \tilde{V}_1, (-1)^{k_2 - k_1} s_1 \tilde{V}_2), \\ (o_1, o_2) *_2 (\tilde{V}_1, \tilde{V}_2) &= (s_2 \tilde{V}_1, s_2 \tilde{V}_2), \end{aligned}$$

here, -1 is the operator which reverses the orientation. And we define symmetries at the other points by transitive actions. Then $\tilde{F}_{k_1, k_2 - k_1}(\mathbb{R}^n)$ is a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -symmetric space.

3 Lie triple system and connections

Definition 3.1. Let M be a symmetric space and X be a vector field on M . A vector field X on M is a *derivation* if for any $x, y \in M, X(x * y) = X(x) * y + x * X(y)$. We denote by \mathfrak{D} the set of all derivations of M .

We define *i-derivation* for a vector field on a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -symmetric space as same as a symmetric space and we denote by \mathfrak{D}^i the set of all *i-derivations*.

Definition 3.2. Let \mathfrak{M} be a finite dimensional vector space over \mathbb{R} and triple product $[\cdot, \cdot, \cdot] : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ is a trilinear map. \mathfrak{M} be a *Lie triple system* if for any $U, V, W, X, Y, Z \in \mathfrak{M}$

- (1) $[X, X, Y] = 0, \quad (2)[X, Y, Z] + [Y, Z, X] + [Z, X, Y] = 0,$
- (3) $[X, Y, [U, V, W]] = [[X, Y, U], V, W] + [U, [X, Y, V], W] + [U, V, [X, Y, W]].$

For a symmetric space M , the set \mathfrak{D} of all derivations is a Lie algebra. We can obtain ± 1 -eigenspace decomposition $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_+ \oplus \mathfrak{D}_-$ by a involutive automorphism of \mathfrak{D} . For $X, Y, Z \in \mathfrak{D}_-$ we define the triple product $[X, Y, Z]$ by $[[X, Y], Z]$. Then \mathfrak{D}_- is a Lie triple system. For $v \in T_oM$, let \tilde{v} be the vector field given by $\tilde{v}(x) = \frac{1}{2}v * (o * x)$. Then \tilde{v} is a derivation and the map $\psi : T_oM \rightarrow \mathfrak{D}_-; v \mapsto \tilde{v}$ is a linear isomorphism. For $u, v, w \in T_oM$ we define the triple product on T_oM by $[u, v, w] = [\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}](o)$. Then T_oM is also a Lie triple system.

We consider the same argument as above with $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -symmetric spaces M . Then

$$T_oM_-^i := \{v \in T_oM \mid d\mu_o(v) = -v\} \quad (i \in \{1, 2, 3\})$$

is a Lie triple system and isomorphic to \mathfrak{D}_-^i .

Definition 3.3. For vector fields X, Y on a symmetric space M , we define a connection ∇ on M by $\nabla_X Y = XY + \frac{1}{2}X * Y$. We denote by R, T the curvature tensor and torsion tensor of ∇ respectively. We define a connections ∇^i on $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -symmetric spaces M as same as symmetric spaces and we denote by R^i, T^i the curvature tensor and torsion tensor of ∇^i .

Theorem 3.4. ([1]) *Let M be a symmetric space. For $u, v, w \in T_oM$*

- (1) $[u, v, w] = \frac{1}{4}(u * (v * w) - v * (u * w)),$
- (2) $T(u, v) = 0.$

Theorem 3.5. *Let M be a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -symmetric space. For $u, v, w \in T_oM_-^i$ and for $1, 2, 3 \in \{1, 2, 3\}$*

- (1) $[u, v, w]^i = \frac{1}{4}(u *_i (v *_i w) - v *_i (u *_i w) + w *_i (v *_i u - u *_i v)),$
- (2) $T^i(u, v) = \frac{1}{2}(u *_i v - v *_i u).$

References

- [1] O. Loos, "SYMMETRIC SPACES I General Theory", W. A. Benjamin, (1969).
- [2] Y. Bahturin and M. Goze, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -SYMMETRIC SPACES, Pac. J. Math., (2008) 1–21.

Department of Mathematical Sciences, Graduate School of Science, Tokyo Metropolitan University, 1-1, Minamiosawa, Hachioji-shi, Tokyo, 192-0397, Japan

Email address: deguchi-masamichi@ed.tmu.ac.jp

代数的手法による $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 対称空間の標準接続

出口 仁理 (でぐち まさみち)

東京都立大学
理学研究科 数理科学専攻 博士後期課程 2年

1 / 17

先行研究と本研究

研究の背景

- リーマン対称空間は 1920 年代から盛んに研究が行われている。
- リーマン対称空間の一般化も行われている。
(k 対称空間, s -manifold, Γ 対称空間, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 対称空間など)
- O. Loos は代数的に対称空間の定義を与え, リーマン対称空間と同様の性質を示した。

本研究

- (1) O. Loos の方法で $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 対称空間を定義した。
- (2) 対称空間と (1) で構成した $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 対称空間の比較を行い, Lie triple system と振率に関する違いを明らかにした。

2 / 17

- ① リーマン対称空間, 対称空間の定義
- ② $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 対称空間の定義
- ③ 準備, 概要
- ④ 先行研究の結果, 主結果

リーマン対称空間, 対称空間の定義

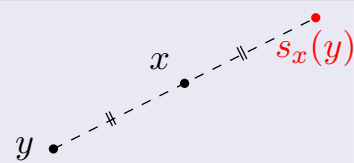
定義 (リーマン対称空間)

M : 連結リーマン多様体.

M がリーマン対称空間 $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

$\forall x \in M \exists s_x : M \rightarrow M$: 等長変換 s.t.

- (1) $s_x(x) = x$, (2) $(s_x)^2 = \text{id}_M$, (3) x は s_x の孤立固定点.



定義 (対称空間 O. Loos, 1969)

M : C^∞ 級多様体, $\mu : M \times M \rightarrow M$: smooth map. ($x * y := \mu(x, y)$)

$x \in M$ に対して $\mu_x : y \mapsto x * y$ ($y \in M$) と定める.

(M, μ) が対称空間である. $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall x, y \in M$

- (1) $x * x = x$, (2) $x * (x * y) = y$, (3) $x \in M$ は μ_x の孤立固定点である,

- (4) $x * (y * z) = (x * y) * (x * z)$.

今後 $o \in M$ を固定して基点と呼ぶ.

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 対称空間の定義

定義 ($\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 対称空間)

$M : C^\infty$ 級多様体, $\mu^1, \mu^2 : M \times M \rightarrow M : \text{smooth map}$.
 $x *_i y := \mu^i(x, y)$, $\mu_x^i := \mu^i(x, \cdot)$ ($i = 1, 2$) と定める.

(M, μ^1, μ^2) が $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 対称空間である.

$\stackrel{\text{def}}{\iff}$

$\forall i, j \in \{1, 2\}, \forall x, y, z \in M$

- (1) $x *_i x = x$,
- (2) $x *_i (x *_i y) = y$,
- (3) $x *_i (y *_j z) = (x *_i y) *_j (x *_i z)$,
- (4) x は $\text{Fix}_x := \{y \in M \mid \mu_x^i(y) = y (i = 1, 2)\}$ の孤立点である,
- (5) $\mu_x^1 \neq \mu_x^2, \mu_x^1 \neq \text{id}_M, \mu_x^2 \neq \text{id}_M$ が成り立つ.

5 / 17

定義の補足

- このとき $\mu_x^1 \circ \mu_x^2 = \mu_x^2 \circ \mu_x^1$ が成り立つ.
 $\mu_x^3 := \mu_x^1 \circ \mu_x^2, \mu_x^0 := \text{id}_M$ と定めると, 各 $x \in M$ に対して

$$\mu_x := \{\mu_x^0, \mu_x^1, \mu_x^2, \mu_x^3\} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

これが $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 対称空間の名前の由来である.

- M の連結性を仮定すると Γ 対称空間の $\Gamma = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ の場合と一致している.

対称空間の場合と同様に $o \in M$ を固定して基点と呼ぶ.

6 / 17

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 対称空間の具体例

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{k_1, k_2 - k_1}(\mathbb{R}^n) &= \{(\tilde{V}_1, \tilde{V}_2) \mid V_1 \subset V_2, \dim V_1 = k_1, \dim V_2 = k_2\} \\ &\cong SO(n)/SO(k_1) \times SO(k_2 - k_1) \times SO(n - k_2) \end{aligned}$$

$e_1, \dots, e_n : \mathbb{R}^n$ の標準基底,
 $o_i = \text{span}\{e_1, \dots, e_{k_i}\}$ が張る空間, 正の向き,
 $s_i := \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$.

$(\tilde{V}_1, \tilde{V}_2) \in \tilde{F}_{k_1, k_2 - k_1}(\mathbb{R}^n)$ に対して,
 $(o_1, o_2) *_1 (\tilde{V}_1, \tilde{V}_2) = (s_1 \tilde{V}_1, (-1)^{k_2 - k_1} s_1 \tilde{V}_2),$
 $(o_1, o_2) *_2 (\tilde{V}_1, \tilde{V}_2) = (s_2 \tilde{V}_1, s_2 \tilde{V}_2)$

と定める.

準備 (接ベクトルと点の積 *)

- $y \in M, g \in C^\infty(M \times M)$ に対して

$$g_{(\cdot, y)} : M \rightarrow \mathbb{R}; \quad x \mapsto g(x, y)$$

によって M 上の関数を表す. $g_{(y, \cdot)}$ も同様に定める.

- $x, y \in M, u \in T_x M, v \in T_y M$ に対して $u * y, x * v \in T_{x*y} M$ を

$$(u * y)f := u((f \circ \mu)_{(\cdot, y)}), \quad (x * v)f := v((f \circ \mu)_{(x, \cdot)}) \quad (f \in C^\infty(M))$$

によって定める.

- $u \in T_x M, v \in T_y M$ に対して,

$$u * v : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

は 2 階の微分作用素.

準備 (derivation, Lie triple system)

定義 (derivation)

M : 対称空間, $\mathcal{J}(M)$: M のベクトル場の全体とする.

$X \in \mathcal{J}(M)$ が *derivation* である. $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

$$\forall x, y \in M \quad X(x * y) = X(x) * y + x * X(y)$$

derivation の全体がなす集合を \mathfrak{D} とかく.

定義 (Lie triple system)

\mathfrak{M} : \mathbb{R} 上のベクトル空間, $[\cdot, \cdot, \cdot] : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$: 三重線型写像.

$(\mathfrak{M}, [\cdot, \cdot, \cdot])$ が *Lie triple system* である.

$\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall X, Y, Z, U, V, W \in \mathfrak{M}$ に対して

- (1) $[X, X, Y] = 0,$
- (2) $[X, Y, Z] + [Y, Z, X] + [Z, X, Y] = 0,$
- (3) $[X, Y, [U, V, W]] =$
 $[[X, Y, U], V, W] + [U, [X, Y, V], W] + [U, V, [X, Y, W]].$

9 / 17

概要 (対称空間)

- ① \mathfrak{D} はリー環の構造をもつ. \mathfrak{D} の対合的自己同型写像

$$\phi : \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}; \quad D \mapsto d\mu_o \circ D \circ \mu_o$$

によって, ± 1 固有値分解 $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_+ \oplus \mathfrak{D}_-$ が得られる.

- ② \mathfrak{D}_- での三重積を

$$[X, Y, Z] := [[X, Y], Z] \quad (\forall X, Y, Z \in \mathfrak{D}_-)$$

と定めることで Lie triple system の構造が定まる.

- ③ 写像 $\psi : T_oM \rightarrow \mathfrak{D}_-; v \mapsto \tilde{v}$ ($\tilde{v}(x) := \frac{1}{2}v * (o * x)$ ($x \in M$))

によって T_oM と \mathfrak{D}_- は線形同型である.

- ④ T_oM の三重積を

$$[u, v, w] := [\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}](o) = [[\tilde{u}, \tilde{v}], \tilde{w}](o) \quad (u, v, w \in T_oM)$$

によって定める. T_oM にも Lts の構造が定まる.

10 / 17

曲率 R と Lie triple system の三重積

μ に対して M の接続 ∇ が定まる.

$$\nabla_X Y := XY + \frac{1}{2}X * Y \quad (\forall X, Y \in \mathcal{J}(M))$$

∇ の曲率, 捩率をそれぞれ R, T と表す.

定理 (cf O. Loos, 1969)

任意の $u, v, w \in T_oM$ に対して

- (1) $[u, v, w] = \frac{1}{4}(u * (v * w) - v * (u * w)),$
- (2) $R(u, v, w) = \frac{1}{4}(u * (v * w) - v * (u * w)),$
- (3) $T(u, v) = 0$

が成り立つ.

概要 ($\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 対称空間)

対称空間の場合と同様の議論を $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 対称空間でも考える.

- ① 各 $\mu^i (i = 1, 2, 3)$ に対する derivation の全体 \mathfrak{D}^i にはリー環の構造が定まる.
- ② 対合的自己同型写像による ± 1 固有値分解を $\mathfrak{D}^i = \mathfrak{D}_+^i \oplus \mathfrak{D}_-^i$. \mathfrak{D}_-^i には Lie triple system の構造が定まる.

③

$$T_oM_-^i := \{v \in T_oM \mid d\mu_o^i(v) = -v\} \quad (i \in \{1, 2, 3\})$$

と定める.

- ④ $T_oM_-^i$ と \mathfrak{D}_-^i は線型同型であり, $T_oM_-^i$ にも Lie triple system の構造が定まる.

このとき

$$T_oM = T_oM_-^1 + T_oM_-^2 + T_oM_-^3$$

が成り立つ

主結果

各 μ^i に対して, TM 上の接続 ∇^i が定まる. 接続 ∇^i に対する振率を T^i とする.

定理 (D)

任意の $u, v, w \in T_oM_-^i$ ($i \in \{1, 2, 3\}$) に対して

$$(1) [u, v, w]^i = \frac{1}{4} \left(u *_i (v *_i w) - v *_i (u *_i w) + w *_i (v *_i u - u *_i v) \right),$$

$$(2) R^i(u, v, w) = \frac{1}{4} (u *_i (v *_i w) - v *_i (u *_i w))$$

$$(3) T^i(u, v) = \frac{1}{2} (u *_i v - v *_i u)$$

と表すことができる.

今後の課題

- ① 具体例で振率を計算する.
- ② 振率が 0 のものと, そうでないものを分類する.
- ③ 標準接続の構成.
→ $\nabla^1, \nabla^2, \nabla^3$ から一つの接続を構成する.

参考文献

- [1] O. Loos, SYMMETRIC SPACES I:General Theory, W. A.benjamin, 1969
- [2] R. Lutz, sur la geomtrie des espaces Γ -symetriques, C. R. Acad. Sci. Paris ser I Math, Vol. 293, pp55-58, 1981
- [3] Y. Bahturin and M. Goze, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -SYMMETRIC SPACES, Pacific Journal of Mathematics, Vol236, No.1, 2008
- [4] 寺内泰紀, Γ 対称空間の対蹠集合, 首都大学東京修士論文, 2018
- [5] 田崎博之, 対称空間入門-大阪市立大学数学研究所連続講義-(数学院生談話会連続講義), 2010

ご静聴ありがとうございました.

Distinguishing surface-links described by 4-charts with 2 crossings and 8 black vertices

Teruo Nagase and Akiko Shima
(Presenter: Akiko Shima)

1 Introduction

Charts are oriented labeled graphs in a disk. Any simple surface braid (2-dimensional braid) can be described by using a chart. Also, a chart represents an oriented closed surface (called a surface-link) embedded in 4-space. A C-move is a local modification between two charts in a disk. A C-move between two charts induces an ambient isotopy between oriented closed surfaces corresponding to the two charts. In this talk, we investigate surface-links by using charts.

Two charts are said to be *C-move equivalent* if there exists a finite sequence of C-moves which modifies one of the two charts to the other. A chart is called a *ribbon chart* if it is C-move equivalent to a chart without white vertices (this chart represents a ribbon surface-link). We showed that if an n -chart has at most one crossing, then the chart is a ribbon chart ([1]). In [2], we gave an enumeration of the charts with two crossings. In this talk, we investigate 4-charts with two crossings and 8 black vertices.

2 Main Theorem

Example 2.1. Let N be an integer with $N \geq 3$. Let $Q_N = \{1, 2, \dots, N\}$. The binary operation $*$ is defined by

$$\begin{cases} x * y = x, & (\text{if } y \neq N), \\ x * N = x + 1, & (\text{if } x \neq N - 1, x \neq N), \\ (N - 1) * N = 1, \\ N * N = N. \end{cases}$$

Then $(Q_N, *)$ is a quandle.

Let Q be a quandle, F an oriented surface-link. Let $\text{Col}_Q(F)$ be the set of colorings of the surface-link diagram of F . Then it is well known that the cardinality $|\text{Col}_Q(F)|$ of colorings is a surface-link invariant.

Let Γ be a chart. Then we can construct a surface-link embedded in 4-space from Γ , and we denote it by $F(\Gamma)$. The following is the main result in this talk.

Theorem 2.2. ([3, Theorem 3.2]) *Let N, k be integers with $N \geq 3$ and $k \geq 1$. Let T_0, T_k, T_k^* be 4-charts as shown in Page 12 of our slides. For the quandles Q_N, Q_{k+2} in Example 2.1, we have the following:*

The second author was supported by JSPS KAKENHI Grant Number 21K03255.

- (a) $|\text{Col}_{Q_N}(F(T_0))| = (N - 1)^2 + 1.$
- (b) $|\text{Col}_{Q_N}(F(T_{2k}))| = N, |\text{Col}_{Q_N}(F(T_{2k}^*))| = N.$
- (c) $|\text{Col}_{Q_{k+2}}(F(T_{2k-1}))| = (k + 2)^2, |\text{Col}_{Q_{k+2}}(F(T_{2k-1}^*))| = (k + 2)^2.$
- (d) $|\text{Col}_{Q_{k+2}}(F(T_{2\ell-1}))| = (k + 1)^2 + 1, |\text{Col}_{Q_{k+2}}(F(T_{2\ell-1}^*))| = (k + 1)^2 + 1$ for any integer ℓ with $1 \leq \ell < k.$

Hence we have the following corollary from the above theorem.

Corollary 2.3. (a) *The surface-links $F(T_0), F(T_1), F(T_3), F(T_5), \dots, F(T_{2k-1}), \dots$ (resp. $F(T_0), F(T_1^*), F(T_3^*), F(T_5^*), \dots, F(T_{2k-1}^*), \dots$) are not ambient isotopic each other.*

- (b) *The 4-charts $T_0, T_1, T_3, T_5, \dots, T_{2k-1}, \dots$ (resp. $T_0, T_1^*, T_3^*, T_5^*, \dots, T_{2k-1}^*, \dots$) are not C-move equivalent each other.*

Remark 2.4. (1) Each of the surface-links $F(T_0), F(T_{2k-1}), F(T_{2k-1}^*)$ is exactly two connected components each of which is a torus.

- (2) Each of the surface-links $F(T_{2k}), F(T_{2k}^*)$ is a tours.
- (3) If an n -chart has at most one crossing, then the chart is a ribbon chart ([1]).
- (4) If a 4-chart with exactly two crossing has at most 6 black vertices, then the chart is a ribbon chart.
- (5) We can show that the 4-chart T_0 is a c-minimal chart by using the double linking number.

Problem 2.5. (1) Are these 4-charts $T_{2k-1}, T_{2k-1}^*, T_{2k}, T_{2k}^*$ c-minimal charts ? (If the surface-links $F(T_k), F(T_k^*)$ are not ribbon surface-links, then the 4-charts T_k, T_k^* are not c-minimal.)

- (2) Are these 4-charts $T_2, T_4, T_6, \dots, T_{2k}, \dots$ C-move equivalent each other ?
- (3) Are these 4-charts $T_2^*, T_4^*, T_6^*, \dots, T_{2k}^*, \dots$ C-move equivalent each other ?
- (4) Please classify n -charts with two crossings.

References

- [1] T. Nagase and A. Shima, *Any chart with at most one crossing is a ribbon chart*, Topology Appl. **157** (2010), 1703–1720.
- [2] T. Nagase and A. Shima, *The structure of a minimal n -chart with two crossings II: Neighbourhoods of $\Gamma_1 \cup \Gamma_{n-1}$* , Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fiskcas y Naturales. Serie A. Matemáticas **113** (2019) 1693–1738, arXiv:1709.08827v2.
- [3] T. Nagase and A. Shima, *Distinguishing surface-links described by 4-charts with two crossings and eight black vertices*, to appear in J. Knot Theory Ramif., arXiv:2304.05532.

(T. Nagase) Tokai University, 4-1-1 Kitakaname, Hiratuka, Kanagawa, 259-1292 Japan
 Email address: nagase@keyaki.cc.u-tokai.ac.jp

(A. Shima) Department of Mathematics, Tokai University, 4-1-1 Kitakaname, Hiratuka, Kanagawa, 259-1292 Japan
 Email address: shima@keyaki.cc.u-tokai.ac.jp

Distinguishing surface-links described by 4-charts with 2 crossings and 8 black vertices

Teruo Nagase and Akiko Shima (Tokai Univ.)

27 Jan. 2024

1 / 23

Contents

1. Quandle colorings for classical links
2. Charts and previous results
3. Main Result
4. n -charts with two crossings
5. Construction of a surface-link from a chart

(arxiv:2304.05532)

To appear in Journal of Knot Theory and Its
Ramifications

2 / 23

1. Quandle

A *quandle* is defined to be a set Q with a binary operation $*$: $Q \times Q \rightarrow Q$ such that

- (i) $a * a = a$ ($\forall a \in Q$)
- (ii) $\forall a, b \in Q, \exists! x \in Q$ such that $x * a = b$, and
- (iii) $(a * b) * c = (a * c) * (b * c)$ ($\forall a, b, c \in Q$).

Example 1

Let N be an integer with $N \geq 3$.

Let $Q_N = \{1, 2, \dots, N\}$.

The binary operation $*$ is defined by

$$\begin{cases} x * y = x, & (\text{if } y \neq N), \\ x * N = x + 1, & (\text{if } x \neq N - 1, x \neq N), \\ (N - 1) * N = 1, & N * N = N. \end{cases}$$

Then $(Q_N, *)$ is a quandle.

3 / 23

1. Quandle $(Q_4, *)$

$x * y$

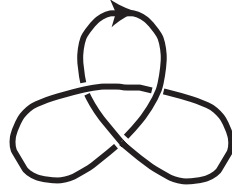
x	y	1	2	3	4
1		1	1	1	2
2		2	2	2	3
3		3	3	3	1
4		4	4	4	4

Quandle $(Q_4, *)$

4 / 22

1. Quandle colorings for classical knots

Let L be an oriented link, D a diagram of L , and \mathcal{R} the set of over-arcs.



Let Q be a quandle.

A map $\mathcal{C} : \mathcal{R} \rightarrow Q$ is called a **quandle coloring** for L if each crossing satisfies as follows:



5 / 23

Quandle colorings for torus links $T(n, 2)$

$Col_Q(L)$ = the set of quandle colorings for a link L .

Lemma 2

Let L, L' be oriented links.

If $L \cong L'$, then $|Col_Q(L)| = |Col_Q(L')|$.

Lemma 3

Let N be an integer with $N \geq 3$. Then

- (1) $|Col_{Q_N}(\text{Trivial knot})| = N$,
- (2) $|Col_{Q_N}(\text{Trivial link of } k \text{ components})| = N^k$,
- (3) $|Col_{Q_N}(T(2k-1, 2))| = N$ ($k \geq 1$),
- (4) $|Col_{Q_{k+1}}(T(2k, 2))| = (k+1)^2$ ($k \geq 2$),
- (5) $|Col_{Q_{k+1}}(T(2\ell, 2))| = k^2 + 1$ ($k \geq 2, 2 \leq \ell < k$).

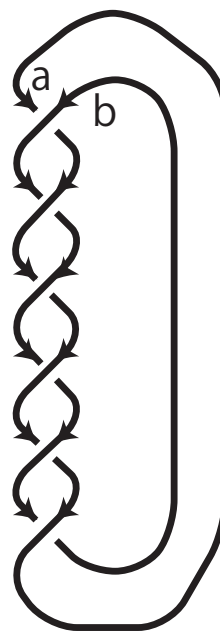
6 / 23

Proof of Lemma 3

We show only $|Col_{Q_4}(T(6, 2))| = 4^2$.
 If there exists a quandle coloring for $T(6, 2)$, then there are three cases:

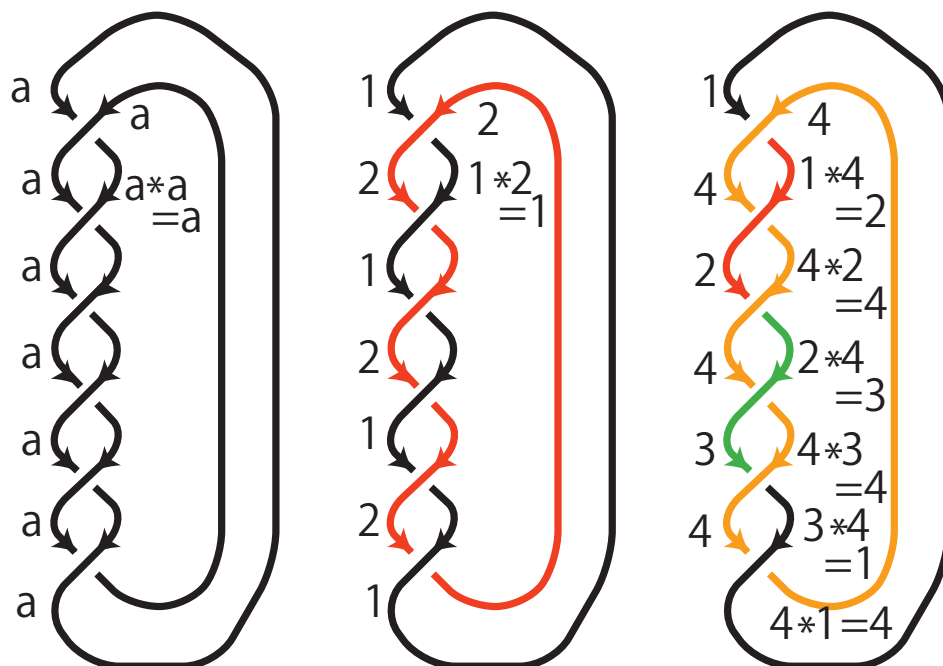
- (1) $a = b$,
- (2) $a \neq b, a \neq 4, b \neq 4$,
- (3) $(a \neq 4, b = 4)$ or $(a = 4, b \neq 4)$.

a	b	1	2	3	4
1	1	(1)	(2)	(2)	(3)
2	2	(2)	(1)	(2)	(3)
3	3	(2)	(2)	(1)	(3)
4	4	(3)	(3)	(3)	(1)



7 / 22

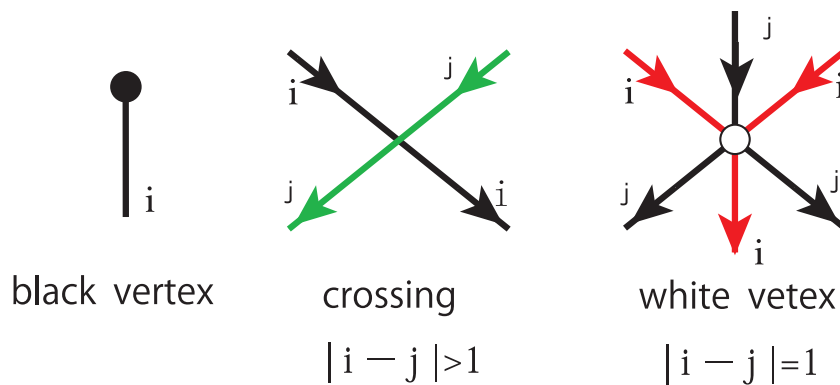
Proof of Lemma 3



9 / 23

2. Chart

An n -chart is an oriented labeled graph in S^2 s.t.
 (1) the label of each edge is $1, 2, \dots, \text{ or } n - 1$,
 (2) each vertex is one of the following:



10 / 23

2. Previous results

Γ is a ribbon chart \iff

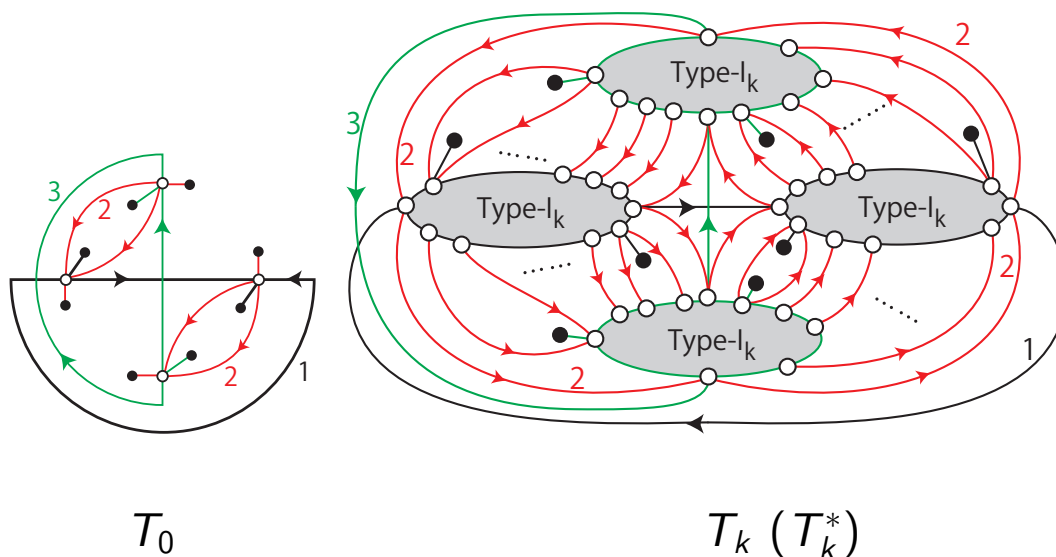
Γ is C-move equivalent to a chart without white vertices.

nbr of crossings	1,2-chart	3-chart	4-chart	n-chart
0	trivial Kamada	ribbon Kamada	ribbon N & H	ribbon N & S
1	—	—	ribbon N & H	ribbon N & S
2	—	—	Today talk	

Note that we already gave an enumeration of the charts with two crossings.

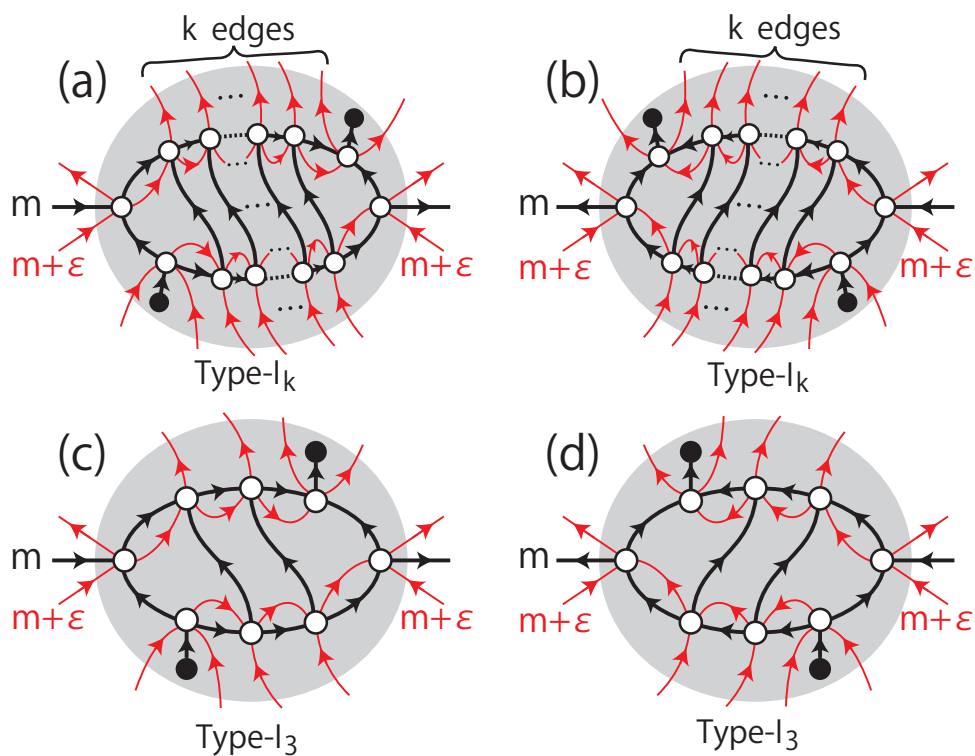
11 / 23

3. 4-charts with 2 crossings and 8 black vertices



12 / 23

3. Type-I elementary IO-tangles of label m



13 / 23

3. Main Theorem

Let Γ be a chart. Then we denote by $F(\Gamma)$ a surface-link described by Γ .

We denote by $|Col_Q(F)|$ the number of quandle colorings for a surface-link F .

Theorem 4

Let N, k be integers with $N \geq 3, k \geq 1$.

Let $T_0, T_k(T_k^*)$ be the 4-charts as above.

Then we have the following:

$$(1) |Col_{Q_N}(F(T_0))| = (N - 1)^2 + 1.$$

$$(2) |Col_{Q_N}(F(T_{2k}))| = N.$$

$$(3) |Col_{Q_{k+2}}(F(T_{2k-1}))| = (k + 2)^2.$$

$$(4) |Col_{Q_{k+2}}(F(T_{2\ell-1}))| = (k + 1)^2 + 1 \text{ for } 1 \leq \ell < k.$$

14 / 23

3. Remark and Question

(1) The surface-links $F(T_0), F(T_1), F(T_3), F(T_5), \dots, F(T_{2k-1}), \dots$ are not ambient isotopic each other.

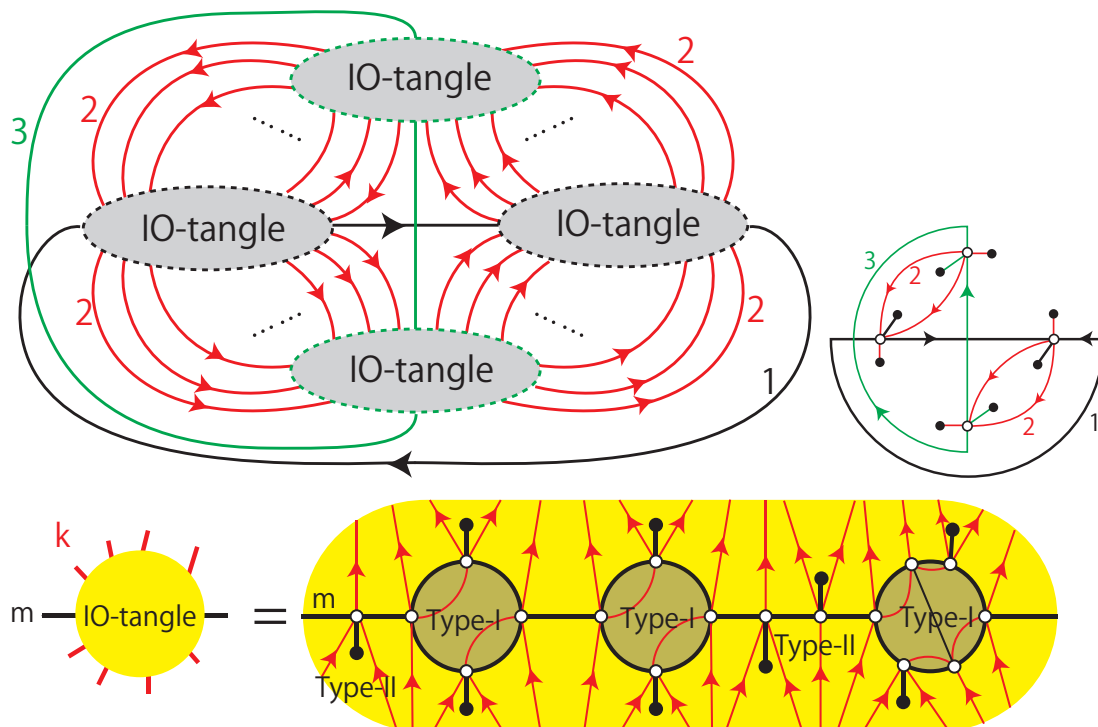
15 / 23

3. Remark and Question

- (1) The surface-links $F(T_0), F(T_1), F(T_3), F(T_5), \dots, F(T_{2k-1}), \dots$ are not ambient isotopic each other.
- (2) The 4-chart T_0 is a c-minimal chart by using the double linking number.
- (3) We do not know whether 4-charts $T_{2k-1}, T_{2k-1}^*, T_{2k}, T_{2k}^*$ are c-minimal charts or not.

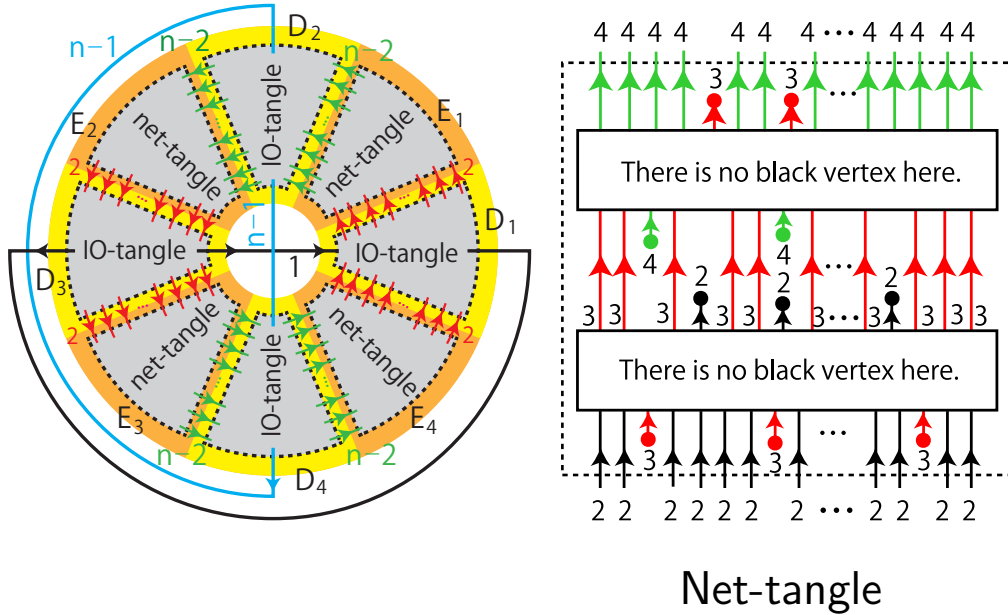
15 / 23

4. 4-charts with two crossings



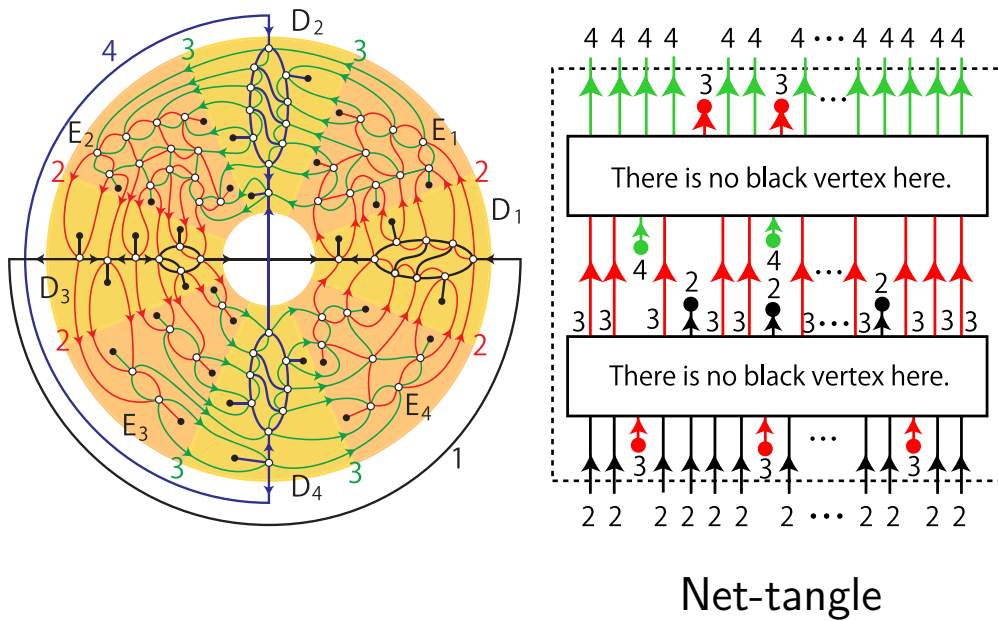
16 / 23

4. n -charts with two crossings



17 / 23

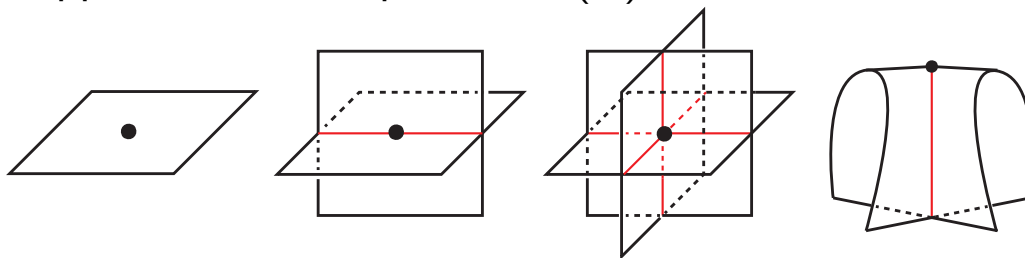
4. n -charts with two crossings



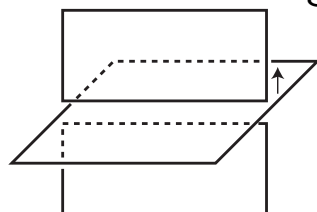
18 / 23

5. Diagrams for surface-links

Let F be an oriented surface-link in \mathbb{R}^4 , and $\pi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ the map defined by $\pi(x, y, z, w) = (x, y, z)$. Suppose that each point in $\pi(F)$ is as follows:



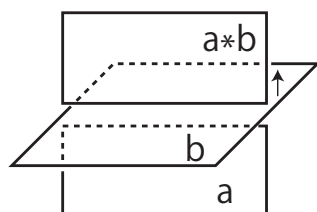
A **diagram** of a surface-link is $\pi(F)$ with additional crossing information at the singularity set.



19 / 23

5. Quandle colorings for surface-links

Let \mathcal{R} be the set of connected components (called broken sheets) of a diagram D for a surface-link F . Let Q be a quandle. A map $\mathcal{C} : \mathcal{R} \rightarrow Q$ is a **quandle coloring** if each double point is as follows:



$|Col_Q(F)|$ = the number of quandle colorings for F .

Lemma 5

If two surface-links F, F' are ambient isotopic, then $|Col_Q(F)| = |Col_Q(F')|$.

20 / 23

Construction of a surface-link $F(\Gamma)$ from a chart Γ

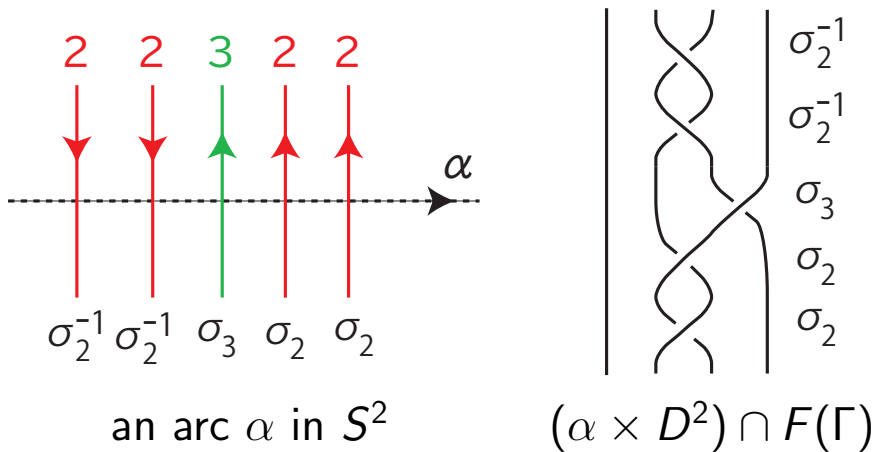
Let Γ be an n -chart.

Let $S^2 = \{(x, y, z, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

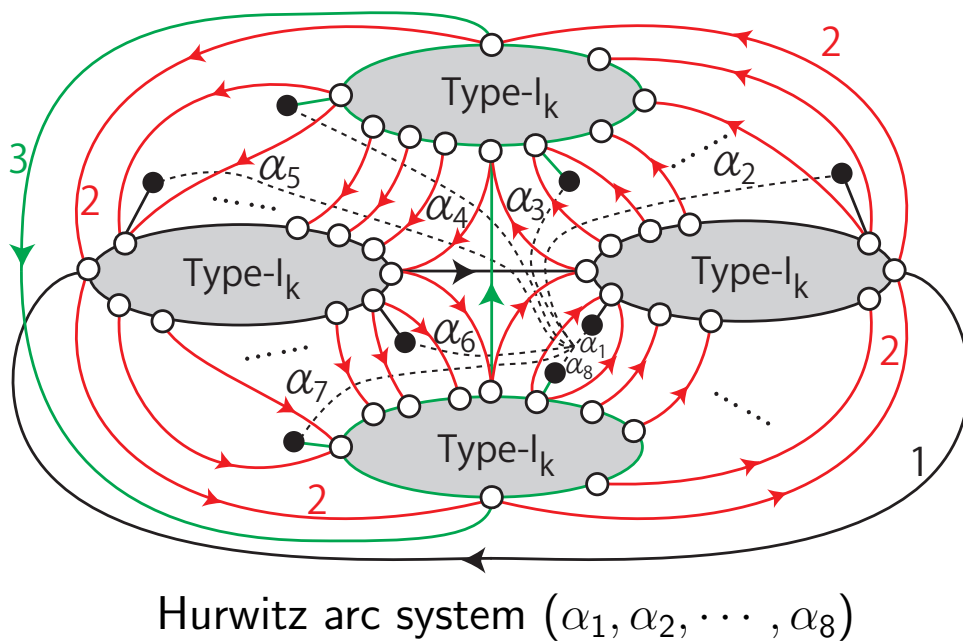
Let $N(S^2) (\cong S^2 \times D^2)$ be a regular nbd of S^2 in \mathbb{R}^4 .

We construct a surface-link $F(\Gamma)$ in $N(S^2)$ from Γ .

If $q \in S^2$, then $(q \times D^2) \cap F(\Gamma) = n$ or $n - 1$ points.



5. Construction of a surface-link $F(T_k)$



Construction of a surface-link $F(\Gamma)$ from a chart Γ

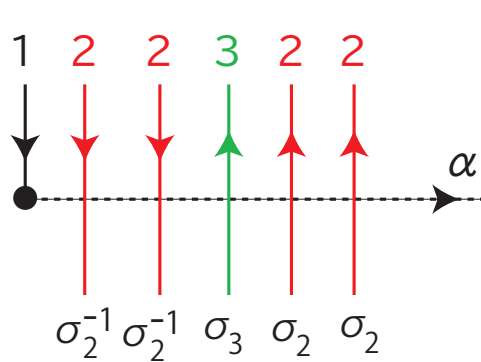
Let Γ be a n -chart.

Let $S^2 = \{(x, y, z, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

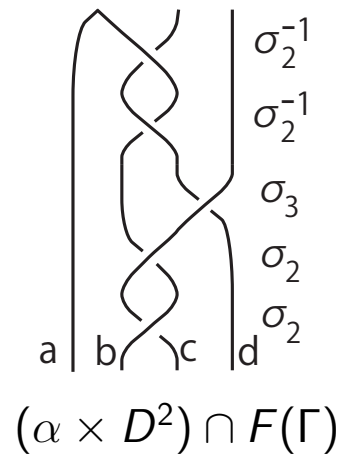
Let $N(S^2) (\cong S^2 \times D^2)$ be a regular nbd of S^2 in \mathbb{R}^4 .

We construct a surface-link $F(\Gamma)$ in $N(S^2)$ from Γ .

If $q \in S^2$, then $(q \times D^2) \cap F(\Gamma) = n$ or $n - 1$ points.



an arc α in S^2



Shade quandle presentations for oriented links

Atsushi Ishii, Kengo Kawamura, Kanako Oshiro and Yuta Taniguchi
(Presenter: Kengo Kawamura)

ABSTRACT. In this article, we introduce an enriched presentation, called a shade quandle presentation, and its equivalence transformations. We show that a triple of matrices obtained from a shade quandle presentation gives an invariant of shade quandle presentations.

1 Definitions and Notations

A *quandle* is a non-empty set Q equipped with a binary operation $\triangleleft : Q \times Q \rightarrow Q$ satisfying the following axioms:

- For any $a \in Q$, $a \triangleleft a = a$.
- For any $a \in Q$, the map $\triangleleft a : Q \rightarrow Q$ defined by $\triangleleft a(x) = x \triangleleft a$ is bijective.
- For any $a, b, c \in Q$, $(a \triangleleft b) \triangleleft c = (a \triangleleft c) \triangleleft (b \triangleleft c)$.

We denote $(\triangleleft a)^n : Q \rightarrow Q$ by $\triangleleft^n a$ for $n \in \mathbb{Z}$. Let L be an oriented link in $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$. We denote by $N(L)$ a tubular neighborhood of L . Put $E(L) := \text{cl}(S^3 \setminus N(L))$. Let P be the set of homotopy classes of paths from a point in $\partial E(L)$ to the point ∞ . We define the binary operation \triangleleft on P by $[\alpha] \triangleleft [\beta] = [\alpha\beta^{-1}m_\beta\beta]$, where m_β is a positive meridian loop whose base point is the starting point of β . Then (P, \triangleleft) is a quandle. We call this quandle the *fundamental quandle* of L and denote it by $Q(L)$.

The notions of homomorphism, isomorphism and automorphism of quandles are defined in the same manner as those of groups. For quandles Q_1 and Q_2 , we denote by $\text{Hom}(Q_1, Q_2)$ the set of homomorphisms from Q_1 to Q_2 . The map $\triangleleft a : Q \rightarrow Q$ is an automorphism of Q for each $a \in Q$, and then the *inner automorphism group* $\text{Inn}(Q)$ of Q is defined to be the subgroup of the automorphism group of Q generated by $\{\triangleleft a \mid a \in Q\}$. We denote by $\text{orb}(a)$ the orbit of $a \in Q$ under the action $Q \times \text{Inn}(Q) \rightarrow Q$ defined by $x \cdot \varphi = \varphi(x)$ for $x \in Q$ and $\varphi \in \text{Inn}(Q)$. We set $\text{Orb}(Q) := \{\text{orb}(x) \mid x \in Q\}$.

A *Q-set* of a quandle Q is a non-empty set Y equipped with a map $\triangleleft : Y \times Q \rightarrow Y$ satisfying the following axioms:

- For any $a \in Q$, the map $\triangleleft a : Y \rightarrow Y$ defined by $\triangleleft a(y) = y \triangleleft a$ is bijective.
- For any $y \in Y$ and $a, b \in Q$, $(y \triangleleft a) \triangleleft b = (y \triangleleft b) \triangleleft (a \triangleleft b)$.

We denote $(\triangleleft a)^n : Y \rightarrow Y$ by $\triangleleft^n a$ for $n \in \mathbb{Z}$. The *associated group* $\text{As}(Q)$ of Q is the group defined by the presentation $\langle x (x \in Q) \mid x \triangleleft y = y^{-1}xy (x, y \in Q) \rangle$. Then $\text{As}(Q)$ is a Q -set with $y \triangleleft a = ya$.

The first author was supported by JSPS KAKENHI Grant Number 21K03217. The second author was supported by JSPS KAKENHI Grant Number 22K13917. The third author was supported by JSPS KAKENHI Grant Number 21K03233. The fourth author was supported by JSPS KAKENHI Grant Number 21J21482.

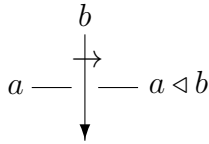


Figure 1: Coloring conditions, where $a, b \in Q$ and $y \in Y$.

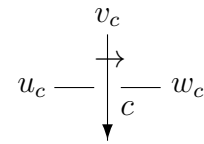
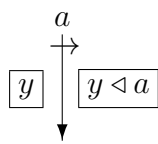


Figure 2: Arcs u_c, v_c and w_c at a crossing c .

Let L be an oriented link and D a diagram of L in \mathbb{R}^2 . We denote by $\mathcal{A}(D)$ the set of arcs of D and by $\mathcal{R}(D)$ the set of regions of D . A Q -coloring of D is a map $C : \mathcal{A}(D) \rightarrow Q$ satisfying the condition as depicted in the left of Figure 1 at each crossing of D . We denote by $\text{Col}_Q(D)$ the set of Q -colorings of D . A Q_Y -coloring of D is a map $C_Y : \mathcal{A}(D) \cup \mathcal{R}(D) \rightarrow Q \cup Y$ satisfying the following conditions:

- $C_Y(\mathcal{A}(D)) \subset Q$ and $C_Y(\mathcal{R}(D)) \subset Y$.
- $C_Y|_{\mathcal{A}(D)}$ is a Q -coloring of D .
- The condition as depicted in the right of Figure 1 is satisfied at each semi-arc of D .

Note that the colors of the regions are determined by those of the arcs and one region.

We say that a quandle Q has a *presentation* $\langle S | R \rangle$ if it is isomorphic to the quotient of the free quandle $F_{\text{Qnd}}(S)$ of a set S by the minimal quandle congruence relation including $R \subset F_{\text{Qnd}}(S) \times F_{\text{Qnd}}(S)$. We often write $a = b$ for $(a, b) \in R$. We set $-(a, b) := (b, a)$ for $(a, b) \in R$. Let $\mathcal{C}(D)$ denote the set of crossings of D . For a crossing c , we denote by v_c the over-arc of c and by u_c, w_c the under-arcs of c such that the normal orientation of v_c points from u_c to w_c , see Figure 2. We define $r_c \in F_{\text{Qnd}}(\mathcal{A}(D)) \times F_{\text{Qnd}}(\mathcal{A}(D))$ to be the relation $w_c = u_c \triangleleft v_c$ for a positive crossing c and the relation $u_c = w_c \triangleleft^{-1} v_c$ for a negative crossing c . The fundamental quandle $Q(L)$ of L has a presentation $\langle \mathcal{A}(D) | \{r_c | c \in \mathcal{C}(D)\} \rangle$. Since there is a natural bijection from $\text{Hom}(Q(L), Q)$ to $\text{Col}_Q(D)$, we often use $\rho \in \text{Hom}(Q(L), Q)$ instead of $C \in \text{Col}_Q(D)$. For a quandle homomorphism $\rho \in \text{Hom}(Q(L), Q)$, we denote by $\tilde{\rho}$ the $Q_{\text{As}(Q)}$ -coloring of D satisfying $\tilde{\rho}|_{\mathcal{A}(D)} = \rho$ and $\tilde{\rho}(r_{\text{out}}) = 1$, where r_{out} is the outermost region of the link diagram D .

2 Shade quandle presentations

We call the form

$$\langle x_1, \dots, x_n; \mu | r_1, \dots, r_m; y_1, \dots, y_m \rangle$$

a *shade quandle presentation*, where $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ is a set, $R = \{r_1, \dots, r_m\} \subset F_{\text{Qnd}}(S) \times F_{\text{Qnd}}(S)$, $y_1, \dots, y_m \in \mathbb{Z}[\text{As}(\langle S | R \rangle)]$ and $\mu : \text{Orb}(\langle S | R \rangle) \rightarrow \mathbb{Z}$ is a map. Putting $\mu_i := \mu(\text{orb}(x_i))$, we also write it as

$$\langle x_1, \dots, x_n; \mu_1, \dots, \mu_n | r_1, \dots, r_m; y_1, \dots, y_m \rangle.$$

For a map $\mu : \text{Orb}(\langle S | R \rangle) \rightarrow \mathbb{Z}$, we define the map $\mu|_{a=p} : \text{Orb}(\langle S | R \rangle) \rightarrow \mathbb{Z}$ by

$$\mu|_{a=p}(O) = \begin{cases} p & \text{if } O = \text{orb}(a), \\ \mu(O) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Definition 2.1. Two shade quandle presentations are said to be *equivalent* (\sim) if they are related by a finite sequence of the following transformations:

- (S1) $\langle x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n; \mu \mid r_1, \dots, r_k, \dots, r_l, \dots, r_m; y_1, \dots, y_k, \dots, y_l, \dots, y_m \rangle$
 $\leftrightarrow \langle x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n; \mu \mid r_1, \dots, r_l, \dots, r_k, \dots, r_m; y_1, \dots, y_l, \dots, y_k, \dots, y_m \rangle,$
- (S2) $\langle \mathbf{x}; \mu \mid r_1, \dots, r_i, \dots, r_j, \dots, r_m; y_1, \dots, y_i, \dots, y_j, \dots, y_m \rangle$
 $\leftrightarrow \langle \mathbf{x}; \mu \mid r_1, \dots, r_j, \dots, -r_i, \dots, r_m; y_1, \dots, y_j, \dots, -y_i, \dots, y_m \rangle,$
- (S3) $\langle \mathbf{x}; \mu \mid \mathbf{r}, c = a_1 \triangleleft^\varepsilon b, a_1 = a_2; \mathbf{y}, z, w \rangle$
 $\leftrightarrow \langle \mathbf{x}; \mu \mid \mathbf{r}, c = a_2 \triangleleft^\varepsilon b, a_1 = a_2; \mathbf{y}, z, w - z \triangleleft^{-\varepsilon} b \rangle \quad (\varepsilon = -1, 0, 1),$
- (S4) $\langle \mathbf{x}; \mu \mid \mathbf{r}, c = a \triangleleft b_1, b_1 = b_2; \mathbf{y}, z, w \rangle$
 $\leftrightarrow \langle \mathbf{x}; \mu \mid \mathbf{r}, c = a \triangleleft b_2, b_1 = b_2; \mathbf{y}, z, w + z \triangleleft^{-1} b_2 - (z \triangleleft c) \triangleleft^{-1} b_2 \rangle,$
- (S5) $\langle \mathbf{x}; \mu \mid \mathbf{r}, c = a \triangleleft^{-1} b_1, b_1 = b_2; \mathbf{y}, z, w \rangle$
 $\leftrightarrow \langle \mathbf{x}; \mu \mid \mathbf{r}, c = a \triangleleft^{-1} b_2, b_1 = b_2; \mathbf{y}, z, w - z + z \triangleleft c \rangle,$
- (S6) $\langle \mathbf{x}; \mu|_{a=p} \mid \mathbf{r}, a = b; \mathbf{y}, z \rangle \leftrightarrow \langle \mathbf{x}; \mu|_{a=p+1} \mid \mathbf{r}, a = b \triangleleft a; \mathbf{y}, z \triangleleft a \rangle,$
- (S7) $\langle x_1, \dots, x_n; \mu \mid \mathbf{r}; \mathbf{y} \rangle \leftrightarrow \langle x_1, \dots, x_n, x_{n+1}; \mu \mid \mathbf{r}, x_{n+1} = w; \mathbf{y}, 0 \rangle$
 $(x_{n+1} \notin F_{\text{Qnd}}(\{x_1, \dots, x_n\}), w \in F_{\text{Qnd}}(\{x_1, \dots, x_n\})),$

where a bold symbol indicates a sequence of the symbols.

Hereafter, we assume that link diagrams satisfy the condition that every component has at least one undercrossing. Let $L = K_1 \cup \dots \cup K_r$ be an oriented r -component link and D a diagram of L . Let $D(K_i)$ be the diagram of K_i that is obtained by removing the other components from D . Let c_1, \dots, c_n be the crossings of D . We denote by x_i the arc starting from a crossing c_i for $i = 1, \dots, n$. We set $u_i := u_{c_i}$, $v_i := v_{c_i}$, $w_i := w_{c_i}$ and $r_i := r_{c_i}$. See Figure 3. Let $K_{[i]}$ be the component of L such that x_i is an arc of $K_{[i]}$. We define $\mu_i \in \mathbb{Z}$ by

$$\mu_i = \frac{\text{rot}(D(K_{[i]})) + \text{wr}(D(K_{[i]})) + 1}{2},$$

where $\text{rot}(\cdot)$ stands for the rotation number and $\text{wr}(\cdot)$ stands for the writhe. For an arc $\alpha \in \mathcal{A}(D)$, we use the same symbol α to represent the semi-arc that shares an initial point with the arc α . We set $y_i := \widetilde{\text{id}_{Q(L)}(r(x_i))} \in \text{As}(Q(L))$ for the $Q(L)$ -coloring $\text{id}_{Q(L)} : Q(L) \rightarrow Q(L)$, where $r(x_i)$ is the region of D facing the semi-arc x_i on the source side of the normal orientation of x_i . See the left of Figure 3. We then define

$$\tilde{Q}(D) := \langle x_1, \dots, x_n; \mu_1, \dots, \mu_n \mid r_1, \dots, r_n; y_1, \dots, y_n \rangle$$

and obtain the following theorem.

Theorem 2.2. *Let D_1 and D_2 be diagrams of an oriented link L . Then we have $\tilde{Q}(D_1) \sim \tilde{Q}(D_2)$.*

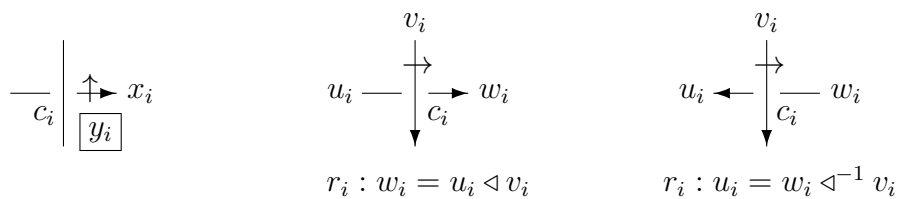


Figure 3: Relators on crossings.

3 Triples of matrices

Let (Q, \triangleleft) be a quandle, and let R be a unital ring. The pair $f = (f_1, f_2)$ of maps $f_1, f_2 : Q \times Q \rightarrow R$ is an *Alexander pair* [3] if f_1 and f_2 satisfy the following conditions:

- For any $a \in Q$, $f_1(a, a) + f_2(a, a) = 1$.
- For any $a, b \in Q$, $f_1(a, b)$ is invertible.
- For any $a, b, c \in Q$,

$$\begin{aligned} f_1(a \triangleleft b, c) f_1(a, b) &= f_1(a \triangleleft c, b \triangleleft c) f_1(a, c), \\ f_1(a \triangleleft b, c) f_2(a, b) &= f_2(a \triangleleft c, b \triangleleft c) f_1(b, c), \text{ and} \\ f_2(a \triangleleft b, c) &= f_1(a \triangleleft c, b \triangleleft c) f_2(a, c) + f_2(a \triangleleft c, b \triangleleft c) f_2(b, c). \end{aligned}$$

An *f-column relation map* [2] is a map $f_{\text{col}} : Q \rightarrow R$ satisfying the following condition:

$$f_{\text{col}}(a \triangleleft b) = f_1(a, b) f_{\text{col}}(a) + f_2(a, b) f_{\text{col}}(b)$$

for any $a, b \in Q$. Let Y be a Q -set. An *f-row relation map* [1] is a map $f_{\text{row}} : Y \times Q \rightarrow R$ satisfying the following conditions:

$$\begin{aligned} f_{\text{row}}(y, a) &= f_{\text{row}}(y \triangleleft b, a \triangleleft b) f_1(a, b), \text{ and} \\ f_{\text{row}}(y \triangleleft a, b) &= f_{\text{row}}(y, b) + f_{\text{row}}(y \triangleleft b, a \triangleleft b) f_2(a, b) \end{aligned}$$

for any $a, b \in Q$ and $y \in Y$. For a presentation $Q \cong \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{r} \rangle$, we denote by $\text{pr} : F_{\text{Qnd}}(\mathbf{x}) \rightarrow Q$ the canonical projection. The *f-derivative* [3] with respect to x_j is a map $\frac{\partial f}{\partial x_j} : F_{\text{Qnd}}(\mathbf{x}) \rightarrow R$ satisfying the following conditions:

- $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a \triangleleft b) = f_1(\text{pr}(a), \text{pr}(b)) \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + f_2(\text{pr}(a), \text{pr}(b)) \frac{\partial f}{\partial x_j}(b)$ for any $a, b \in F_{\text{Qnd}}(\mathbf{x})$.
- $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_i) = \delta_{ij}$ (the Kronecker delta).

We define $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a = b) := \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(b)$. We extend $f_{\text{row}} : Y \times Q \rightarrow R$ to $f_{\text{row}} : \mathbb{Z}[Y] \times Q \rightarrow R$ linearly and define $f_{\text{row}}(y, a = b) := f_{\text{row}}(y, a)$.

Definition 3.1. Let $\tilde{Q} = \langle \mathbf{x}; \mu \mid \mathbf{r}; \mathbf{y} \rangle = \langle x_1, \dots, x_n; \mu \mid r_1, \dots, r_m; y_1, \dots, y_m \rangle$ be a shade quandle presentation. Set $Q := \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{r} \rangle$. Let $f = (f_1, f_2)$ be an Alexander pair of maps $f_1, f_2 : Q \times Q \rightarrow R$, $f_{\text{col}} : Q \rightarrow R$ an *f-column relation map*, and $f_{\text{row}} : \text{As}(Q) \times Q \rightarrow R$ an *f-row relation map*. For the orbit decomposition $\langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle = \bigsqcup_{i=1}^l \text{orb}(z_i)$, we set $\omega_i := f_1(z_i, z_i)$, $p_i := \mu(\text{orb}(z_i))$ and $\omega(\mu) := \omega_1^{p_1} \cdots \omega_l^{p_l}$. We then define

$$\begin{aligned} \tilde{B}(\langle \mathbf{x}; \mu \mid \mathbf{r}; \mathbf{y} \rangle; \mathbf{f}_{\text{row}}) &:= \begin{pmatrix} f_{\text{row}}(y_1, r_1) & \cdots & f_{\text{row}}(y_m, r_m) & 0 \end{pmatrix}, \\ \tilde{A}(\langle \mathbf{x}; \mu \mid \mathbf{r}; \mathbf{y} \rangle; f_1, f_2) &:= \begin{pmatrix} \frac{\partial f r_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f r_1}{\partial x_n} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f r_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f r_m}{\partial x_n} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \omega(\mu)^{-1} \end{pmatrix}, \\ \tilde{C}(\langle \mathbf{x}; \mu \mid \mathbf{r}; \mathbf{y} \rangle; \mathbf{f}_{\text{col}}) &:= \begin{pmatrix} f_{\text{col}}(x_1) \\ \vdots \\ f_{\text{col}}(x_n) \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

For a unital ring R , let R^\times denote the group of units of R . We define the $n \times n$ invertible matrices P_{ij} , $E_{ij}(r)$ and $E_i(u)$ over R by

$$\begin{aligned} P_{ij} &= (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{i-1}, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_{i+1}, \dots, \mathbf{e}_{j-1}, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{j+1}, \dots, \mathbf{e}_n), \\ E_{ij}(r) &= (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{j-1}, \mathbf{e}_j + r\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{j+1}, \dots, \mathbf{e}_n) \quad (i \neq j, r \in R), \\ E_i(u) &= (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{i-1}, u\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{i+1}, \dots, \mathbf{e}_n) \quad (u \in R^\times), \end{aligned}$$

where \mathbf{e}_i is the unit column vector whose components are all 0, except the i th component that equals 1.

Definition 3.2 ([4]). We write $(B, A, C) \sim (B', A', C')$ if they are related by a finite sequence of the following transformations:

- $(B, A, C) \leftrightarrow (BE_{ij}(r)^{-1}, E_{ij}(r)A, C) \quad (r \in R),$
- $(B, A, C) \leftrightarrow (B, AE_{ij}(r), E_{ij}(r)^{-1}C) \quad (r \in R),$
- $(B, A, C) \leftrightarrow (BE_i(u), E_i(u)^{-1}AE_j(u), E_j(u)^{-1}C) \quad (u \in R^\times),$
- $(B, A, C) \leftrightarrow \left((B \ \mathbf{0}), \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \right).$

A triple of matrices obtained from a shade quandle presentation is an invariant of shade quandle presentations as follows.

Proposition 3.3. *If $\langle \mathbf{x}; \mu \mid \mathbf{r}; \mathbf{y} \rangle \sim \langle \mathbf{x}'; \mu' \mid \mathbf{r}'; \mathbf{y}' \rangle$, then we have*

$$\begin{aligned} &(\tilde{B}(\langle \mathbf{x}; \mu \mid \mathbf{r}; \mathbf{y} \rangle; \mathbf{f}_{\text{row}}), \tilde{A}(\langle \mathbf{x}; \mu \mid \mathbf{r}; \mathbf{y} \rangle; f_1, f_2), \tilde{C}(\langle \mathbf{x}; \mu \mid \mathbf{r}; \mathbf{y} \rangle; \mathbf{f}_{\text{col}})) \\ &\sim (\tilde{B}(\langle \mathbf{x}'; \mu' \mid \mathbf{r}'; \mathbf{y}' \rangle; \mathbf{f}_{\text{row}}), \tilde{A}(\langle \mathbf{x}'; \mu' \mid \mathbf{r}'; \mathbf{y}' \rangle; f_1, f_2), \tilde{C}(\langle \mathbf{x}'; \mu' \mid \mathbf{r}'; \mathbf{y}' \rangle; \mathbf{f}_{\text{col}})). \end{aligned}$$

References

- [1] A. Ishii and K. Oshiro, *Row relations of twisted Alexander matrices and shadow quandle 2-cocycles*, *Topology Appl.* **301** (2021), Paper No. 107513.
- [2] A. Ishii and K. Oshiro, *Quandle twisted Alexander invariants*, *Osaka J. Math.* **59** (2022), no. 3, 683–702.
- [3] A. Ishii and K. Oshiro, *Derivatives with Alexander pairs for quandles*, *Fund. Math.* **259** (2022), no. 1, 1–31.
- [4] A. Ishii and K. Oshiro, *Normalized quandle twisted Alexander invariants*, to appear in *Internat. J. Math.*

(A. Ishii) Department of Mathematics, University of Tsukuba, 1-1-1 Tennodai, Tsukuba, Ibaraki 305-8571, Japan

Email address: aishii@math.tsukuba.ac.jp

(K. Kawamura) Center of Advanced Education, Institute of Education, Osaka Sangyo University, 3-1-1 Nakagaito, Daito-shi, Osaka 574-8530, Japan

Email address: kawamura@edo.osaka-sandai.ac.jp

(K. Oshiro) Department of Information and Communication Sciences, Sophia University, 7-1 Kioicho, Chiyoda-ku Tokyo, 102-8554, Japan

Email address: oshirok@sophia.ac.jp

(Y. Taniguchi) Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka University, 1-1, Machikaneyama, Toyonaka, Osaka, 560-0043, Japan

Email address: u660451k@ecs.osaka-u.ac.jp

Shade quandle presentations for oriented links

河村 建吾 (大阪産業大学)*

石井 敦 (筑波大学)[†], 大城 佳奈子 (上智大学)[‡], 谷口 雄大 (大阪大学)[§] との共同研究

研究集会「カンドルと対称空間」(於：大阪公立大学 杉本キャンパス)

2024 年 1 月 27 日

本研究は JSPS 科研費 JP22K13917*, JP21K03217[†], JP21K03233[‡], JP21J21482[§] の助成を受けた
ものです。

1 / 28

Contents

- 1 Introduction
- 2 Quandles
- 3 Shade quandle presentation
- 4 Triples of matrices and their equivalence

2 / 28

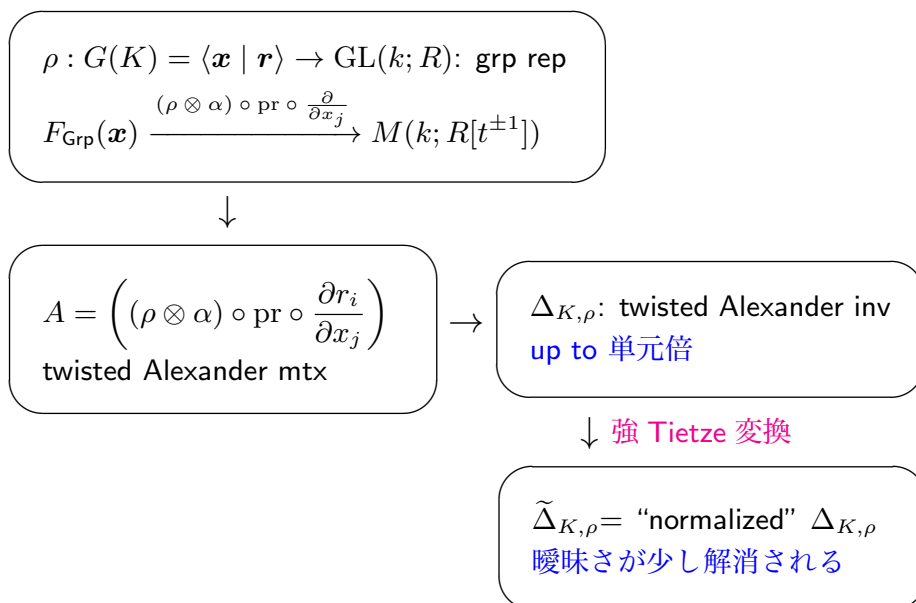
Contents

- 1 Introduction
- 2 Quandles
- 3 Shade quandle presentation
- 4 Triples of matrices and their equivalence

3 / 28

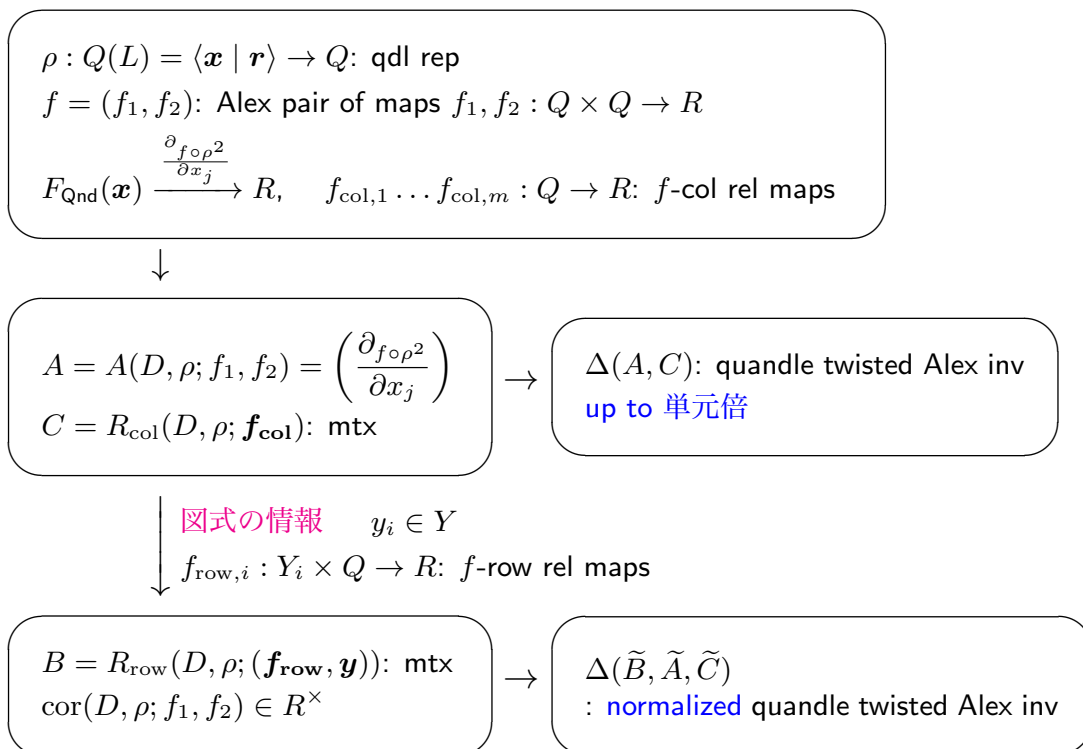
Motivation & Today's topic

(normalized) twisted Alexander invariant [Wada 1994], [Kitayama 2015]



4 / 28

(normalized) quandle twisted Alexander invariant [Ishii-Oshiro]



5 / 28

今日の話 : アレクサンダー型不変量を正規化するときを使う情報を含むような表示とその Tietze 変換を紹介する.

★ **shade quandle presentation** = $\langle x_1, \dots, x_n; \mu \mid r_1, \dots, r_m; y_1, \dots, y_m \rangle$
 $S = \{x_1, \dots, x_n\}$: a set $R = \{r_1, \dots, r_m\} \subset F_{\text{Qnd}}(S) \times F_{\text{Qnd}}(S)$
 $y_1, \dots, y_m \in \mathbb{Z}[\text{As}(\langle S \mid R \rangle)]$ $\mu : \text{Orb}(\langle S \mid R \rangle) \rightarrow \mathbb{Z}$: a map

Thm ([Ishii-K.-Oshiro-Taniguchi])
 $D_1 \cong D_2$ (R-moves) $\Rightarrow \tilde{Q}(D_1) \sim \tilde{Q}(D_2)$

Prop ([Ishii-K.-Oshiro-Taniguchi])
 $\langle \mathbf{x}; \mu \mid \mathbf{r}; \mathbf{y} \rangle \sim \langle \mathbf{x}'; \mu' \mid \mathbf{r}'; \mathbf{y}' \rangle$
 $\Rightarrow (\tilde{B}(\langle \mathbf{x}; \mu \mid \mathbf{r}; \mathbf{y} \rangle; \mathbf{f}_{\text{row}}), \tilde{A}(\langle \mathbf{x}; \mu \mid \mathbf{r}; \mathbf{y} \rangle; f_1, f_2), \tilde{C}(\langle \mathbf{x}; \mu \mid \mathbf{r}; \mathbf{y} \rangle; \mathbf{f}_{\text{col}}))$
 $\sim (\tilde{B}(\langle \mathbf{x}'; \mu' \mid \mathbf{r}'; \mathbf{y}' \rangle; \mathbf{f}_{\text{row}}), \tilde{A}(\langle \mathbf{x}'; \mu' \mid \mathbf{r}'; \mathbf{y}' \rangle; f_1, f_2), \tilde{C}(\langle \mathbf{x}'; \mu' \mid \mathbf{r}'; \mathbf{y}' \rangle; \mathbf{f}_{\text{col}}))$

6 / 28

Contents

- 1 Introduction
- 2 Quandles
- 3 Shade quandle presentation
- 4 Triples of matrices and their equivalence

7 / 28

Quandle

$Q = (Q, \triangleleft)$: a **quandle**

$\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \bullet a \triangleleft a = a \ (\forall a \in Q),$

$\bullet \triangleleft a : Q \rightarrow Q; x \mapsto x \triangleleft a$ is bijective $(\forall a \in Q)$, and

$\bullet (a \triangleleft b) \triangleleft c = (a \triangleleft c) \triangleleft (b \triangleleft c) \ (\forall a, b, c \in Q).$

Notation $a \triangleleft^n b := (\triangleleft b)^n(a) \ (n \in \mathbb{Z})$

Ex. (conjugation quandle)

G : a group, $\text{Conj}(G) := (G, \triangleleft), \quad a \triangleleft b := b^{-1}ab$

Ex. (dihedral quandle)

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{0, \dots, n-1\}, \quad R_n := (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \triangleleft), \quad a \triangleleft b := 2b - a \pmod{n}$

8 / 28

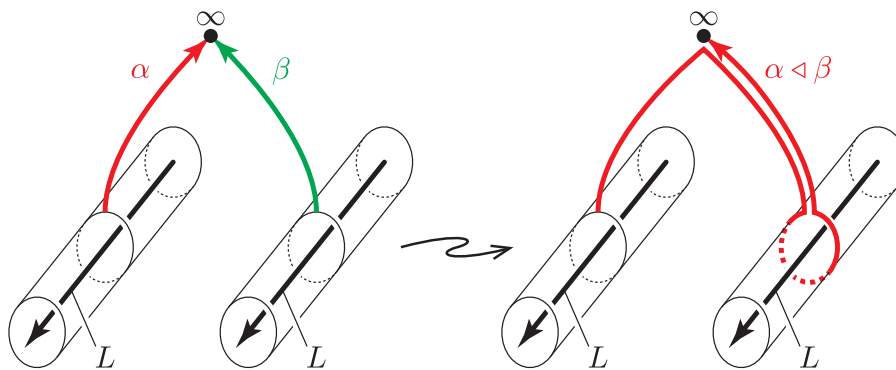
Ex. (Fundamental quandle)

L : an oriented link in $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$,

$N(L)$: a tubular neighborhood of L , $E(L) := \text{cl}(S^3 \setminus N(L))$

$P := \{\alpha : [0, 1] \rightarrow E(L) \mid \alpha(0) \in \partial E(L), \alpha(1) = \infty\} / \text{homotopy}$

$Q(L) := (P, \triangleleft)$, $[\alpha] \triangleleft [\beta] := [\alpha\beta^{-1}m_\beta]$ (m_β : a pos. meridian at $\beta(0)$)

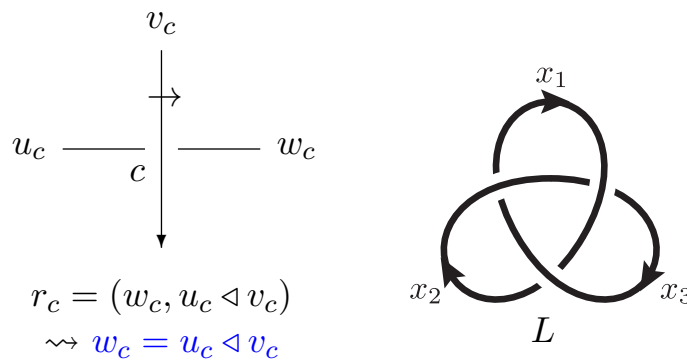


9 / 28

Presentation of $Q(L)$

D : a diagram of L , $\mathcal{A}(D) := \{\text{arcs of } D\}$, $\mathcal{C}(D) := \{\text{crossings of } D\}$

$Q(L) \cong \langle \mathcal{A}(D) \mid \{r_c \mid c \in \mathcal{C}(D)\} \rangle$: the **Wirtinger pres.** of $Q(L)$ w.r.t. D



$$Q(L) \cong \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1 = x_3 \triangleleft x_2, x_2 = x_1 \triangleleft x_3, x_3 = x_2 \triangleleft x_1 \rangle$$

10 / 28

$\text{Hom}(Q_1, Q_2), \text{Aut}(Q), \text{Inn}(Q), \text{Orb}(Q)$

$\text{Hom}(Q_1, Q_2) := \{\text{quandle homomorphisms from } Q_1 \text{ to } Q_2\}$

$\text{Aut}(Q) = \{\text{qdl automorphisms of } Q\}$: the **automorphism group** of Q

$\text{Inn}(Q) = \langle \{\triangleleft a \mid a \in Q\} \rangle < \text{Aut}(Q)$: the **inner automorphism group** of Q

$\text{orb}(a) = \{\varphi(a) \mid \varphi \in \text{Inn}(Q)\}$: the **orbit** of $a \in Q$ under $Q \curvearrowright \text{Inn}(Q)$

$\text{Orb}(Q) = \{\text{orb}(x) \mid x \in Q\}$

$(\rightsquigarrow L = K_1 \cup \dots \cup K_r$: an r -component link $\Rightarrow |\text{Orb}(Q(L))| = r)$

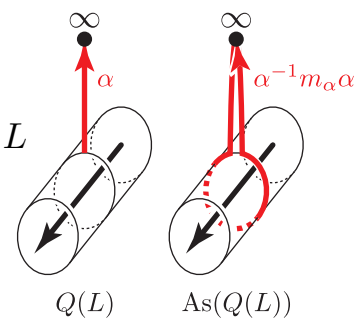
$\text{As}(Q)$ & Q -set

Q : a quandle

$\text{As}(Q) = \langle x \ (x \in Q) \mid x \triangleleft y = y^{-1}xy \ (x, y \in Q) \rangle$

: the **associated group** of Q

$\text{As}(Q(L)) \cong G(L) := \pi_1(E(L))$: the **link group** of L



Y : a set

$Y = (Y, \triangleleft : Y \times Q \rightarrow Y)$: a **Q -set**

- def. $\Leftrightarrow \bullet \triangleleft a : Y \rightarrow Y ; y \mapsto y \triangleleft a$ is bijective ($\forall a \in Q$),
- $\bullet (y \triangleleft a) \triangleleft b = (y \triangleleft b) \triangleleft (a \triangleleft b)$ ($\forall y \in Y, \forall a, b \in Q$).

Ex. Q itself is a Q -set by the quandle operation of Q .

Ex. $\text{As}(Q)$ is a Q -set with $y \triangleleft a = ya$.

Q-coloring & Q_Y-coloring

D : a diag. of an ori'd link L , $\mathcal{A}(D) := \{\text{arcs of } D\}$, Q : a quandle

$C : \mathcal{A}(D) \rightarrow Q$ is a **Q-coloring** of D

def. $\Leftrightarrow C$ satisfies the condition $a \text{ --- } \begin{array}{c} b \\ \downarrow \\ \rightarrow \\ \downarrow \end{array} \text{ --- } a \triangleleft b$ at each crossing of D .

$\mathcal{R}(D) := \{\text{regions of } D\}$, Y : a Q -set

$C_Y : \mathcal{A}(D) \cup \mathcal{R}(D) \rightarrow Q \cup Y$: a **Q_Y-coloring** of D

def. \Leftrightarrow • $C_Y(\mathcal{A}(D)) \subset Q$ and $C_Y(\mathcal{R}(D)) \subset Y$, • $C_Y|_{\mathcal{A}(D)} = C$,

• C_Y satisfies the condition $y \text{ --- } \begin{array}{c} a \\ \downarrow \\ \rightarrow \\ \downarrow \end{array} \text{ --- } y \triangleleft a$ at each semi-arc of D .

13 / 28

Prop. $\{\text{Q-colorings of } D\} \xrightarrow{1:1} \text{Hom}(Q(L), Q)$
 Ψ Ψ
 C ρ

$r_{\text{out}} \in \mathcal{R}(D)$: the outermost region of the link diagram D

Def. $\tilde{\rho}$: the $Q_{\text{As}(Q)}$ -coloring of D with $\tilde{\rho}|_{\mathcal{A}(D)} = \rho$ and $\tilde{\rho}(r_{\text{out}}) = 1$.

14 / 28

Contents

- 1 Introduction
- 2 Quandles
- 3 Shade quandle presentation
- 4 Triples of matrices and their equivalence

15 / 28

Shade quandle presentation

Def. **shade quandle presentation** = $\langle x_1, \dots, x_n; \mu \mid r_1, \dots, r_m; y_1, \dots, y_m \rangle$

$S = \{x_1, \dots, x_n\}$: a set, $R = \{r_1, \dots, r_m\} \subset F_{\text{Qnd}}(S) \times F_{\text{Qnd}}(S)$,

$y_1, \dots, y_m \in \mathbb{Z}[\text{As}(\langle S \mid R \rangle)]$, $\mu : \text{Orb}(\langle S \mid R \rangle) \rightarrow \mathbb{Z}$: a map

$\mu_i := \mu(\text{orb}(x_i)) \rightsquigarrow \langle x_1, \dots, x_n; \mu_1, \dots, \mu_n \mid r_1, \dots, r_m; y_1, \dots, y_m \rangle$

Def. $\mu|_{a=p} : \text{Orb}(\langle S \mid R \rangle) \rightarrow \mathbb{Z}$; $\mu|_{a=p}(O) = \begin{cases} p & \text{if } O = \text{orb}(a), \\ \mu(O) & \text{otherwise.} \end{cases}$

Def. $\langle \mathbf{x}; \mu \mid \mathbf{r}; \mathbf{y} \rangle \sim \langle \mathbf{x}'; \mu' \mid \mathbf{r}'; \mathbf{y}' \rangle$ (**equivalent**)

$\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \langle \mathbf{x}; \mu \mid \mathbf{r}; \mathbf{y} \rangle \leftrightarrow \dots \leftrightarrow \langle \mathbf{x}'; \mu' \mid \mathbf{r}'; \mathbf{y}' \rangle$ by the following transformations.
(next page)

Rmk. a bold symbol indicates a sequence of the symbols.

16 / 28

Transformations on shade quandle presentations

- (S1) $\langle x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n; \mu \mid r_1, \dots, r_k, \dots, r_l, \dots, r_m; y_1, \dots, y_k, \dots, y_l, \dots, y_m \rangle$
 $\leftrightarrow \langle x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n; \mu \mid r_1, \dots, r_l, \dots, r_k, \dots, r_m; y_1, \dots, y_l, \dots, y_k, \dots, y_m \rangle$
- (S2) $\langle \mathbf{x}; \mu \mid r_1, \dots, r_i, \dots, r_j, \dots, r_m; y_1, \dots, y_i, \dots, y_j, \dots, y_m \rangle$
 $\leftrightarrow \langle \mathbf{x}; \mu \mid r_1, \dots, r_j, \dots, -r_i, \dots, r_m; y_1, \dots, y_j, \dots, -y_i, \dots, y_m \rangle$
- (S3) $\langle \mathbf{x}; \mu \mid \mathbf{r}, c = a_1 \triangleleft^\varepsilon b, a_1 = a_2; \mathbf{y}, z, w \rangle$
 $\leftrightarrow \langle \mathbf{x}; \mu \mid \mathbf{r}, c = a_2 \triangleleft^\varepsilon b, a_1 = a_2; \mathbf{y}, z, w - z \triangleleft^{-\varepsilon} b \rangle \quad (\varepsilon = -1, 0, 1),$
- (S4) $\langle \mathbf{x}; \mu \mid \mathbf{r}, c = a \triangleleft b_1, b_1 = b_2; \mathbf{y}, z, w \rangle$
 $\leftrightarrow \langle \mathbf{x}; \mu \mid \mathbf{r}, c = a \triangleleft b_2, b_1 = b_2; \mathbf{y}, z, w + z \triangleleft^{-1} b_2 - (z \triangleleft c) \triangleleft^{-1} b_2 \rangle$
- (S5) $\langle \mathbf{x}; \mu \mid \mathbf{r}, c = a \triangleleft^{-1} b_1, b_1 = b_2; \mathbf{y}, z, w \rangle$
 $\leftrightarrow \langle \mathbf{x}; \mu \mid \mathbf{r}, c = a \triangleleft^{-1} b_2, b_1 = b_2; \mathbf{y}, z, w - z + z \triangleleft c \rangle$
- (S6) $\langle \mathbf{x}; \mu \mid_{a=p} \mathbf{r}, a = b; \mathbf{y}, z \rangle \leftrightarrow \langle \mathbf{x}; \mu \mid_{a=p+1} \mathbf{r}, a = b \triangleleft a; \mathbf{y}, z \triangleleft a \rangle$
- (S7) $\langle x_1, \dots, x_n; \mu \mid \mathbf{r}; \mathbf{y} \rangle \leftrightarrow \langle x_1, \dots, x_n, x_{n+1}; \mu \mid \mathbf{r}, x_{n+1} = w; \mathbf{y}, 0 \rangle$
 $(x_{n+1} \notin F_{\text{Qnd}}(\{x_1, \dots, x_n\}), w \in F_{\text{Qnd}}(\{x_1, \dots, x_n\}))$

17 / 28

Shade quandle presentation obtained from a link diagram

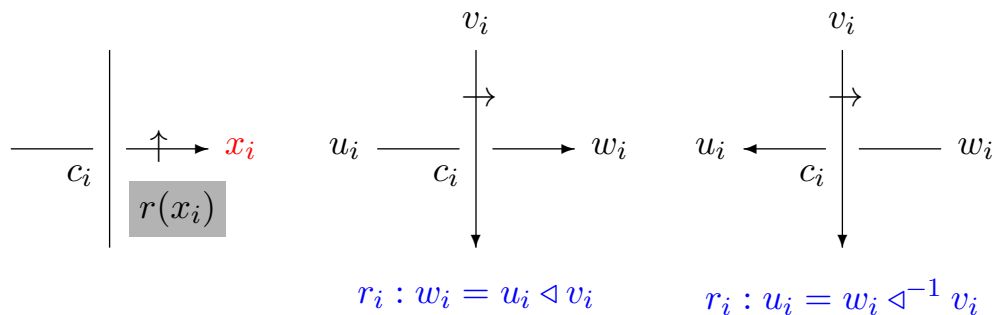
Assume Every comp. of a link diagram has at least one under-crossing.

$L = K_1 \cup \dots \cup K_r$: an ori'd r -comp. link, D : a diagram of L ,

$D(K_i)$: the diag. of K_i obtained by removing the other comp. from D

c_1, \dots, c_n : the crossings of D

Notation (the arcs, regions, the relations)



18 / 28

$\text{id}_{Q(L)} : Q(L) \rightarrow Q(L)$: the $Q(L)$ -coloring of D

$\widetilde{\text{id}}_{Q(L)}$: the $Q(L)_{\text{As}(Q(L))}$ -col. of D w/ $\widetilde{\text{id}}_{Q(L)}|_{\mathcal{A}(D)} = \text{id}_{Q(L)}$, $\tilde{\rho}(r_{\text{out}}) = 1$

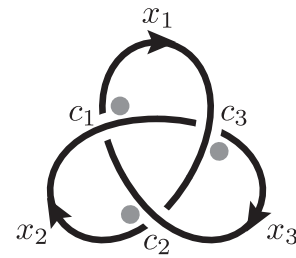
$y_i := \widetilde{\text{id}}_{Q(L)}(r(x_i)) \in \text{As}(Q(L))$

$$\mu_i := \frac{\text{rot}(D(K_{[i]})) + \text{wr}(D(K_{[i]})) + 1}{2} \in \mathbb{Z}$$

Def $\tilde{Q}(D) := \langle x_1, \dots, x_n; \mu_1, \dots, \mu_n \mid r_1, \dots, r_n; y_1, \dots, y_n \rangle$

Thm ([Ishii-K.-Oshiro-Taniguchi])

$$D_1 \cong D_2 \text{ (R-moves)} \Rightarrow \tilde{Q}(D_1) \sim \tilde{Q}(D_2)$$



Ex. $\tilde{Q}(D) = \langle x_1, x_2, x_3; 1, 1, 1 \mid x_1 = x_3 \triangleleft x_2, x_2 = x_1 \triangleleft x_3, x_3 = x_2 \triangleleft x_1; x_1^{-1}, x_2^{-1}, x_3^{-1} \rangle$

19 / 28

Strong Tietze transformations (for groups)

Def. $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{r} \rangle \sim_{\text{ST}} \langle \mathbf{x}' \mid \mathbf{r}' \rangle \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{r} \rangle \leftrightarrow \dots \leftrightarrow \langle \mathbf{x}' \mid \mathbf{r}' \rangle$ by (ST0)–(ST4).

(ST0) $\langle x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n \mid \mathbf{r} \rangle \leftrightarrow \langle x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n \mid \mathbf{r} \rangle$,
 $\langle \mathbf{x} \mid r_1, \dots, r_i, \dots, r_j, \dots, r_m \rangle \leftrightarrow \langle \mathbf{x} \mid r_1, \dots, r_j, \dots, r_i, \dots, r_m \rangle$,

(ST1) $\langle \mathbf{x} \mid r_1, \dots, r_i, \dots, r_m \rangle \leftrightarrow \langle \mathbf{x} \mid r_1, \dots, r_i^{-1}, \dots, r_m \rangle$,

(ST2) $\langle \mathbf{x} \mid r_1, \dots, r_i, \dots, r_m \rangle \leftrightarrow \langle \mathbf{x} \mid r_1, \dots, w r_i w^{-1}, \dots, r_m \rangle$
 ($w \in F_{\text{Grp}}(\mathbf{x})$),

(ST3) $\langle \mathbf{x} \mid r_1, \dots, r_i, \dots, r_m \rangle \leftrightarrow \langle \mathbf{x} \mid r_1, \dots, r_i r_k, \dots, r_m \rangle$ ($k \neq i$),

(ST4) $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{r} \rangle \leftrightarrow \langle \mathbf{x}, x_{n+1} \mid \mathbf{r}, x_{n+1} w^{-1} \rangle$
 ($x_{n+1} \notin F_{\text{Grp}}(\mathbf{x})$, $w \in F_{\text{Grp}}(\mathbf{x})$),

Wada's lemma D, D' : diagrams of a link

$\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{r} \rangle, \langle \mathbf{x}' \mid \mathbf{r}' \rangle$: Wirtinger pres. of D and D' with deficiency one.

$$\Rightarrow \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{r} \rangle \sim_{\text{ST}} \langle \mathbf{x}' \mid \mathbf{r}' \rangle$$

Notation

$$r = (a, b) \in F_{\text{Qnd}}(\mathbf{x}) \times F_{\text{Qnd}}(\mathbf{x}) \rightsquigarrow \bar{r} := ab^{-1} \in \text{As}(F_{\text{Qnd}}(\mathbf{x})) = F_{\text{Grp}}(\mathbf{x})$$

Ex.

$$\langle \mathbf{x}; \mu \mid \mathbf{r}; \mathbf{y} \rangle =$$

$$\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3; \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1} \mid \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_3 \triangleleft \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 \triangleleft \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_2 \triangleleft \mathbf{x}_1; \mathbf{x}_1^{-1}, \mathbf{x}_2^{-1}, \mathbf{x}_3^{-1} \rangle$$

$$\rightsquigarrow \langle \mathbf{x} \mid \bar{\mathbf{r}} \rangle = \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \mid \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2^{-1} \mathbf{x}_3^{-1} \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_3^{-1} \mathbf{x}_1^{-1} \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_3 \mathbf{x}_1^{-1} \mathbf{x}_2^{-1} \mathbf{x}_1 \rangle$$

Prop ([Ishii-K.-Oshiro-Taniguchi])

$\langle \mathbf{x}; \mu \mid \mathbf{r}; \mathbf{y} \rangle, \langle \mathbf{x}'; \mu' \mid \mathbf{r}'; \mathbf{y}' \rangle$: shade quandle presentations

$$\text{Then, } \langle \mathbf{x}; \mu \mid \mathbf{r}; \mathbf{y} \rangle \sim \langle \mathbf{x}'; \mu' \mid \mathbf{r}'; \mathbf{y}' \rangle \Rightarrow \langle \mathbf{x} \mid \bar{\mathbf{r}} \rangle \sim_{\text{ST}} \langle \mathbf{x}' \mid \bar{\mathbf{r}}' \rangle$$

Contents

- 1 Introduction
- 2 Quandles
- 3 Shade quandle presentation
- 4 Triples of matrices and their equivalence

Alexander pair

(Q, \triangleleft) : a quandle, R : a unital ring, $f_1, f_2 : Q \times Q \rightarrow R$

$f = (f_1, f_2)$: an **Alexander pair**

$$\begin{aligned} \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} & \bullet f_1(a, a) + f_2(a, a) = 1 \quad (\forall a \in Q), \\ & \bullet f_1(a, b) \in R^\times \quad (\forall a \in Q), \text{ and} \\ & \bullet f_1(a \triangleleft b, c) f_1(a, b) = f_1(a \triangleleft c, b \triangleleft c) f_1(a, c), \\ & \quad f_1(a \triangleleft b, c) f_2(a, b) = f_2(a \triangleleft c, b \triangleleft c) f_1(b, c), \\ & \quad f_2(a \triangleleft b, c) = f_1(a \triangleleft c, b \triangleleft c) f_2(a, c) + f_2(a \triangleleft c, b \triangleleft c) f_2(b, c) \\ & \quad \quad \quad (\forall a, b, c \in Q). \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow \forall M$: left R -module, $(Q \times M, *)$ is a quandle by

$$(a, x) * (b, y) = (a \triangleleft b, f_1(a, b)x + f_2(a, b)y)$$

23 / 28

f -column relation map & f -row relation map

$f = (f_1, f_2)$: an Alexander pair

$f_{\text{col}} : Q \rightarrow R$: an **f -column relation map**

$$\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} f_{\text{col}}(a \triangleleft b) = f_1(a, b) f_{\text{col}}(a) + f_2(a, b) f_{\text{col}}(b) \quad (\forall a, b \in Q).$$

Y : a Q -set.

$f_{\text{row}} : Y \times Q \rightarrow R$: an **f -row relation map**

$$\begin{aligned} \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} & \bullet f_{\text{row}}(y, a) = f_{\text{row}}(y \triangleleft b, a \triangleleft b) f_1(a, b), \text{ and} \\ & \bullet f_{\text{row}}(y \triangleleft a, b) = f_{\text{row}}(y, b) + f_{\text{row}}(y \triangleleft b, a \triangleleft b) f_2(a, b) \\ & \quad \quad \quad (\forall y \in Y, \forall a, b \in Q). \end{aligned}$$

24 / 28

f -derivative

$Q \cong \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{r} \rangle$, $\text{pr} : F_{\text{Qnd}}(\mathbf{x}) \rightarrow Q$: the canonical projection

$f = (f_1, f_2)$: an Alexander pair of maps $f_1, f_2 : Q \times Q \rightarrow R$

Def. ([Ishii-Oshiro]) $\frac{\partial f}{\partial x_j} : F_{\text{Qnd}}(\mathbf{x}) \rightarrow R$: the f -derivative w.r.t. x_j

$$\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \bullet \frac{\partial f}{\partial x_j}(a \triangleleft b) = f_1(\text{pr}(a), \text{pr}(b)) \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + f_2(\text{pr}(a), \text{pr}(b)) \frac{\partial f}{\partial x_j}(b) \quad (\forall a, b \in F_{\text{Qnd}}(\mathbf{x}))$$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_i) = \delta_{ij} \text{ (Kronecker delta)}$$

(Hereafter, we omit the canonical projection pr as $f_1(a, b)$.)

$$\text{Def. } \frac{\partial f}{\partial x_j}(a = b) := \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(b)$$

Def. We extend $f_{\text{row}} : Y \times Q \rightarrow R$ to $f_{\text{row}} : \mathbb{Z}[Y] \times Q \rightarrow R$ linearly and define $f_{\text{row}}(y, a = b) := f_{\text{row}}(y, a)$.

25 / 28

Triple of matrices

$$\tilde{Q} = \langle \mathbf{x}; \mu \mid \mathbf{r}; \mathbf{y} \rangle$$

$= \langle x_1, \dots, x_n; \mu \mid r_1, \dots, r_m; y_1, \dots, y_m \rangle$: a shade qdl presentation

$Q := \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{r} \rangle$ $f = (f_1, f_2)$: Alex. pair of maps $f_1, f_2 : Q \times Q \rightarrow R$

$f_{\text{col}} : Q \rightarrow R$: f -col. rel. map $f_{\text{row}} : \text{As}(Q) \times Q \rightarrow R$: f -row rel. map

For the orbit decomp. $\langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle = \bigsqcup_{i=1}^l \text{orb}(z_i)$,

$$\omega_i := f_1(z_i, z_i), \quad p_i := \mu(\text{orb}(z_i)), \quad \omega(\mu) := \omega_1^{p_1} \cdots \omega_l^{p_l}$$

$$\bullet \tilde{B}(\langle \mathbf{x}; \mu \mid \mathbf{r}; \mathbf{y} \rangle; \mathbf{f}_{\text{row}}) \stackrel{\text{def.}}{=} (f_{\text{row}}(y_1, r_1) \quad \cdots \quad f_{\text{row}}(y_m, r_m) \quad 0)$$

$$\bullet \tilde{A}(\langle \mathbf{x}; \mu \mid \mathbf{r}; \mathbf{y} \rangle; f_1, f_2) \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f r_i}{\partial x_j} \right) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \omega(\mu)^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\bullet \tilde{C}(\langle \mathbf{x}; \mu \mid \mathbf{r}; \mathbf{y} \rangle; \mathbf{f}_{\text{col}}) \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{pmatrix} f_{\text{col}}(x_1) \\ \vdots \\ f_{\text{col}}(x_n) \\ 0 \end{pmatrix}$$

26 / 28

Equivalence relation on triples of matrices

R : a unital ring R^\times : the group of units of R

$$\begin{aligned} P_{ij} &= (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{i-1}, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_{i+1}, \dots, \mathbf{e}_{j-1}, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{j+1}, \dots, \mathbf{e}_n) \\ E_{ij}(r) &= (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{j-1}, \mathbf{e}_j + r\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{j+1}, \dots, \mathbf{e}_n) \quad (i \neq j, r \in R) \\ E_i(u) &= (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{i-1}, u\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{i+1}, \dots, \mathbf{e}_n) \quad (u \in R^\times) \end{aligned}$$

Def. ([Ishii-Oshiro])

$$(B, A, C) \sim (B', A', C') \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (B, A, C) \leftrightarrow \dots \leftrightarrow (B', A', C')$$

- $(B, A, C) \leftrightarrow (BE_{ij}(r)^{-1}, E_{ij}(r)A, C)$
- $(B, A, C) \leftrightarrow (B, AE_{ij}(r), E_{ij}(r)^{-1}C)$
- $(B, A, C) \leftrightarrow (BE_i(u), E_i(u)^{-1}AE_j(u), E_j(u)^{-1}C)$
- $(B, A, C) \leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} B & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \right)$

27 / 28

Rmk ([Ishii-Oshiro])

- $(B, A, C) \sim (BP_{ij}E_j(-1), E_j(-1)P_{ij}A, C)$
- $(B, A, C) \sim (B, AP_{ij}E_j(-1), E_j(-1)P_{ij}C)$
- $(B, A, C) \sim (BP_{ij}, P_{ij}AP_{kl}, P_{kl}C)$

Prop ([Ishii-K.-Oshiro-Taniguchi])

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}; \mu \mid \mathbf{r}; \mathbf{y} \rangle &\sim \langle \mathbf{x}'; \mu' \mid \mathbf{r}'; \mathbf{y}' \rangle \\ \Rightarrow (\tilde{B}(\langle \mathbf{x}; \mu \mid \mathbf{r}; \mathbf{y} \rangle; \mathbf{f}_{\text{row}}), \tilde{A}(\langle \mathbf{x}; \mu \mid \mathbf{r}; \mathbf{y} \rangle; f_1, f_2), \tilde{C}(\langle \mathbf{x}; \mu \mid \mathbf{r}; \mathbf{y} \rangle; \mathbf{f}_{\text{col}})) \\ &\sim (\tilde{B}(\langle \mathbf{x}'; \mu' \mid \mathbf{r}'; \mathbf{y}' \rangle; \mathbf{f}_{\text{row}}), \tilde{A}(\langle \mathbf{x}'; \mu' \mid \mathbf{r}'; \mathbf{y}' \rangle; f_1, f_2), \tilde{C}(\langle \mathbf{x}'; \mu' \mid \mathbf{r}'; \mathbf{y}' \rangle; \mathbf{f}_{\text{col}})) \end{aligned}$$

28 / 28