

Hilbert-Huang 変換を用いた  
突発天体からの重力波の汎用的な解析手法の研究

(Study of a versatile analysis method  
using the Hilbert-Huang transform  
for gravitational-wave transients)

武田 芽依  
(Mei Takeda)



Hilbert-Huang 変換を用いた  
突発天体からの重力波の汎用的な解析手法の研究

(Study of a versatile analysis method  
using the Hilbert-Huang transform  
for gravitational-wave transients)

理学研究科  
数物系専攻

令和4年度  
武田 芽依  
(Mei Takeda)



# Hilbert-Huang 変換を用いた 突発天体からの重力波の汎用的な解析手法の研究

(Study of a versatile analysis method  
using the Hilbert-Huang transform  
for gravitational-wave transients)

武田 芽依  
(Mei Takeda)

本研究は、重力崩壊型超新星爆発やブラックホール連星合体のような突発的に発生する重力波源からの重力波に対して、高い時間-周波数分解能を持つ解析手法である Hilbert-Huang transform (HHT) を用いたデータ解析手法の研究を行ない、その汎用性と最新の重力波天体物理学に対する展望を示した。

重力波とは、物体の加速度運動による時空の歪みが伝播する波動現象であり、その波形は放射源の物理量を反映する。2015 年の直接観測以来、重力波から天体現象の解明が可能となった。天体起源の重力波のモデルは大別して、解析的な理論波形モデルと、解析的な波形を用いずに数値計算などから得たモデルがある。例えば、代表的な突発天体である超新星爆発に起因する重力波は後者であり、乱流などにより波形は確率的に変化する。しかし周波数領域では爆発機構に起因した特徴的なモードを持つことが知られているため、信号を時間-周波数空間上に展開して解析する。従来の手法では、分解能に制限がある時間-周波数図から間接的に周波数の時間変動を抽出している。しかし HHT は瞬時振幅と瞬時周波数を定義できるため、時間的に遷移する信号を直接的に解析できる有利さがある。

本研究は HHT が様々な重力波源の波形に対して有用なことを示した。まず、数値シミュレーションから得られた重力崩壊型超新星爆発からの重力波について、爆発機構の解明に重要なモードを HHT を用いて初めて抽出した。重力崩壊型超新星爆発からの重力波は周波数帯域が大きく異なる複数のモードが同時刻に到来する。HHT を用いることで本研究は先行研究よりも高い時間-周波数分解能を得ることができ、瞬時周波数を解析して時間変動の有無を推定した。次に、観測されたブラックホール連星合体からの重力波に HHT を適用し、特徴的な周波数の時間発展を抽出した。さらに、連星合体後に放射される、短時間で急激に減衰する重力波についても HHT を用いて、ブラックホール準固有振動の複数のモードを分離できる可能性を示した。これらの解析により、HHT が最先端の重力波天体物理学の解析に有用であることを示した。

# Hilbert-Huang 変換を用いた 突発天体からの重力波の汎用的な解析手法の研究

(Study of a versatile analysis method  
using the Hilbert-Huang transform  
for gravitational-wave transients)

武田 芽依  
(Mei Takeda)

We propose an application of the Hilbert-Huang transform (HHT) to analyze the gravitational-wave transients from core-collapse supernovae and black hole binaries. The HHT is a high-resolution time-frequency analysis method. We show the versatility of the HHT and its prospects for the gravitational-wave astrophysics.

The gravitational-waves are phenomena of propagation of space-time distortions from the accelerated motion of an object. Their waveforms have information on the gravitational-wave sources. Since the first direct observation of the gravitational-wave in 2015, we can now use the gravitational-waves to understand astronomical phenomena.

Models of the gravitational-waves of astronomical origin can be divided into two main categories: analytic waveforms predicted from theories and quasi-stochastic waveforms obtained from numerical simulations. For example, the gravitational-waves from core-collapse supernovae are the latter, and their waveforms change stochastically due to turbulence and other factors. Since one can use time evolutions of modes of gravitational-waves to investigate the explosion mechanism, it is essential to use time-frequency analysis methods. In the conventional methods, one may indirectly estimate the time evolutions of modes of gravitational-wave signals from the time-frequency diagram, which has limited time-frequency resolution. On the other hand, one has the advantage of directly analyzing time-transition signals because one can define the instantaneous amplitudes and frequencies of signals in the HHT.

In this Ph.D thesis, we show that the HHT is useful to analyze various gravitational-wave sources. First, we analyze a gravitational-wave signal from a core-collapse supernova numerical simulation, which has multiple modes with different time evolution at the same time, using the HHT technique. We extract an important mode related to explosion for the first time using the HHT. Next, we apply the HHT to the gravitational-waves from black hole binaries observed by LIGO and Virgo and extract the time evolution of the characteristic frequency chirps of the gravitational-waves. Finally, we apply the HHT to a simulated gravitational-wave signal after a black hole binary merger. Its amplitude decays rapidly over a short time. We show the possibility of separating black hole quasinormal modes using the HHT. These analyses demonstrated the usefulness of the HHT for the state of the art gravitational-wave astrophysics.

# 目次

<b>第 1 章</b>	<b>序論</b>	<b>1</b>
1.1	はじめに	1
1.2	重力波物理学	3
1.2.1	波動方程式の導出	4
1.2.2	TT ゲージ	6
1.2.3	測地線方程式、測地線偏差方程式	8
1.2.4	四重極放射の導出	10
	四重極放射の大雑把な評価	12
1.2.5	四重極放射の角度依存性	13
	回転している軸対称な星由来の重力波	14
	重力崩壊している球対称な星は重力波を放射しない	14
1.3	コンパクト連星合体	15
1.4	重力崩壊型超新星爆発	16
1.4.1	恒星の進化	16
1.4.2	超新星爆発の分類	17
1.4.3	対象とする超新星爆発の基本情報	18
1.4.4	鉄コアの重力崩壊	18
1.4.5	ニュートリノの閉じ込め	19
1.4.6	コアバウンス	19
1.4.7	衝撃波の失速	19
1.4.8	衝撃波復活	20
	ニュートリノ駆動メカニズムのおおまかな流れ	20
1.4.9	定常降衝撃波不安定性	21
<b>第 2 章</b>	<b>Hilbert-Huang Transform</b>	<b>23</b>
2.1	瞬時周波数	23
2.2	Hilbert Spectral Analysis	23
	Hilbert 変換	24
	解析信号	25
2.3	Ensemble Empirical Mode Decomposition	27
2.3.1	信号の固有モード関数への分解	27
	経験的モード分解	27
	アンサンブル経験的モード分解	30
2.4	固有モード関数の時間周波数空間でのクラスタリング	31
2.4.1	過剰な瞬時振幅をもつ時刻の推定手法	31

2.4.2	時間-周波数領域でのクラスタリング手法 . . . . .	32
2.4.3	手法の評価 . . . . .	33
2.5	Stacked Hilbert-Huang Transform . . . . .	38
2.5.1	Hilbert-Huang transform のパラメータ . . . . .	39
2.5.2	Hilbert-Huang transform の重力波データ解析への応用 . . . . .	41
<b>第 3 章</b>	<b>重力崩壊型超新星爆発からの重力波データ解析</b>	<b>45</b>
3.1	シミュレーションから得られた重力波への Hilbert-Huang transform の適用 . . . . .	45
3.2	SASI mode の瞬時周波数の解析 . . . . .	47
3.2.1	解析手法と試験波形への適用 . . . . .	47
	特定のモードの開始時刻の推定手法 . . . . .	49
	周波数の時間的推移の推定手法 . . . . .	51
	誤差推定 . . . . .	51
3.2.2	重力崩壊型超新星爆発のシミュレーションから得られた重力波に対する解析	53
3.3	g-mode の瞬時周波数の解析 . . . . .	55
<b>第 4 章</b>	<b>ブラックホール連星合体からの重力波データ解析</b>	<b>59</b>
4.1	チャープ波形の抽出 . . . . .	59
4.2	リングダウン重力波の分離 . . . . .	64
<b>第 5 章</b>	<b>議論と結論</b>	<b>69</b>
<b>付録 A</b>	<b>中央絶対偏差と標準偏差の比</b>	<b>73</b>
<b>付録 B</b>	<b>Gravitational-wave Transient Catalog に掲載されたイベントの時間-周波数図</b>	<b>75</b>
B.1	抽出したチャープ波形と瞬時周波数 . . . . .	75
B.2	stacked Hilbert-Huang transform を用いた画像 . . . . .	77



# 第 1 章

## 序論

### 1.1 はじめに

重力波とは、物体の加速度運動による時空の歪みが伝播する波動現象である。重力波波形は放射源の質量運動の動的な様子によって特徴づけられることが知られている。重力波は、Albert Einstein の予言からほぼ 100 年が経った 2015 年 9 月 14 日 09:50:45 UTC に、アメリカの重力波検出器 LIGO (the Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory) によって初めて直接観測された (Abbott et al. [2016])。初観測イベントは日付から GW150914 と名付けられており、重力波源はブラックホール連星合体と推定された。それにより、重力波から天体現象の解明が可能となった。現在まで、3 度の国際共同重力波観測が行われており、観測結果は、Gravitational-Wave Transient Catalog (GWTC) としてまとめられている。GWTC-1 (Abbott et al. [2019a]) では 2015 年 9 月 12 日 0:00 UTC から 2016 年 1 月 19 日 16:00 UTC に行われた 1 回目の観測運転 (the first observing runs : O1) と 2016 年 11 月 30 日 16:00 UTC から 2017 年 8 月 25 日 22:00 UTC に行われた O2 で観測された重力波イベントが記載されている。重力波検出器である Advanced LIGO (Aasi et al. [2015]) はアメリカの Hanford と Livingston の 2 箇所にある大型マイケルソン干渉計のことを指し、O1 から観測期間中に稼働している。2017 年 8 月 1 日からイタリアの Pisa にある重力波検出器 Advanced Virgo (Acernese et al. [2015]) が LIGO との共同観測を開始しており、その後の 2017 年 8 月 17 日に初めて中性子星連星合体からの重力波イベント GW170817 が検出された。GWTC-1 では、10 個のブラックホール連星合体からのイベントと、1 個の中性子星連星合体からのイベントが報告された。GWTC-2 (Abbott et al. [2021b]) と GWTC-2.1 (Abbott et al. [2021d]) では、Advanced LIGO と Advanced Virgo によって 2019 年 4 月 1 日 15:00 UTC から 2019 年 10 月 1 日 15:00 UTC に行われた O3a (O3 の前半期) から 44 個の重力波イベントが報告された。GWTC-3 (Abbott et al. [2021e]) では Advanced LIGO と Advanced Virgo による 2019 年 11 月 1 日 15:00 UTC から 2020 年 3 月 27 日 17:00 UTC に行われた O3b で観測された 35 個の重力波イベントが報告された。重力波イベントとしての基準は天体起源である確率  $p_{\text{astro}} > 0.5$  とされており、現在までにこの基準を満たす重力波イベントが 90 個報告されている。2021 年にはドイツの Hanover にある重力波検出器 GEO600 (Dooley et al. [2016]) と日本の岐阜県にある重力波検出器 KAGRA (Akutsu et al. [2021a,b]) による共同観測 Abbott et al. [2022] も行われた。LIGO-Virgo-KAGRA [2023a] より LIGO-Virgo-KAGRA による共同観測や、インドに建設される LIGO の 3 台目の重力波検出器 (IndIGO [2011]) の観測参加など、さらに規模を拡大した重力波観測の準備が進んでいる。

天体起源の重力波観測は、いつ、どの方向から、どのような重力波が到来するのか分からない状態で行われる。そのため重力波検出器は長く観測可能な状態を保つことで重力波到来を受動的に待ち続ける。重力波検出器の長時間信号の中から、重力波を発見する信号解析手法は大きく分けて 2 つある。事前に用意した波形モデルを用いる手法と、用いない手法である。波形モデルを用いる手法とし

て、matched-filter 法 Wainstein and Zubakov [1962], Abbott et al. [2020] が挙げられる。解析的な理論波形モデルを多数用意し、検出器信号との相関が大きい波形モデルを探すことで、どのような重力波が到来しているか探することができる。例えばブラックホールや中性子星といったコンパクト天体の連星合体といった一般相対性理論から重力波波形が予言されており、一般相対性理論と無矛盾な観測結果が知られている。この手法はガウス雑音において最良の手法であることがわかっており、事前に用意する波形モデルは高い精度をもつ必要がある。

波形モデルを用いない手法を用いる重力波源は、例えば観測が期待されている重力波源の1つである重力崩壊型超新星爆発が挙げられる。重力崩壊型超新星爆発とは太陽よりも8倍以上重い恒星が最期に起こす爆発現象であり、中性子星やブラックホールといったコンパクト天体の起源である。重力崩壊型超新星爆発研究における重力波の重要性は、数値シミュレーションの結果によって示唆されている。重力波は爆発前の星の内部状態に関する情報を持ち、星のコア内で発生した複数の放射メカニズムからの重力波の重ね合わせで構成されていると考えられている。重力崩壊型超新星爆発のメカニズムはスーパーコンピュータを用いた多次元の一般相対論的流体力学シミュレーションによって研究されているが、まだ完全には理解されていない。重力崩壊型超新星爆発からの重力波波形は放射メカニズムに依存するため、重力波は星の内部で発生した現象に対する“smoking gun”となり得る可能性がある。(重力崩壊型超新星爆発からの重力波のレビュー：Kotake [2013], Abdikamalov et al. [2020]) 一方で、重力崩壊型超新星爆発からの重力波の検出は容易ではない。まず、理論的に予測される重力波の振幅は非常に小さく、通常は検出器雑音に埋もれてしまう。重力波波形は爆発前の星の内部で発生した乱流などにより確率的に変化する。さらに重力崩壊型超新星爆発のメカニズムが十分に理解されていないため、高い精度で予測された重力波波形を用いて検出することは容易ではなく、重力波の波形やモードの物理的な解釈も不完全である。重力崩壊型超新星爆発の重力波は、時間-周波数領域に特徴的なモードをもつため、時系列解析ではなくスペクトログラム解析によって重力崩壊型超新星爆発からの重力波の検出やモデルの分類を行うことが主流となっている。(Klimenko et al. [2008, 2016], Gossan et al. [2016], Logue et al. [2012], Powell et al. [2016, 2017], Roma et al. [2019], Suvorova et al. [2019], Astone et al. [2018], Iess et al. [2020], Chan et al. [2020]) 現在主流の検出方法は、Klimenko et al. [2008, 2016], Gossan et al. [2016] によるウェーブレット領域内の coherent multidetector networks の時間-周波数解析である。Logue et al. [2012], Powell et al. [2016, 2017], Roma et al. [2019], Suvorova et al. [2019] は、主成分分析が重力波の検出や爆発メカニズムモデルの分類が有用であることを示唆し、重力崩壊型超新星爆発モデル分類のためのソフトウェアを開発した。近年は機械学習が注目されており、Astone et al. [2018], Iess et al. [2020], Chan et al. [2020], López et al. [2021] などによって重力波検出器の非ガウスおよび非定常雑音に埋め込まれた重力波信号を適切に検出、または爆発メカニズムの分類が可能であることが示唆されている。

本研究は重力波波形の構造をより詳細に分析することを目標として、時間-周波数解析の新しいツールを提案するものである。そこで、Huang et al. [1996] によって提唱された比較的新しい時間-周波数解析手法である Hilbert-Huang transform に着目した。Hilbert-Huang transform は瞬時振幅と瞬時周波数を定義できるため、時間的に遷移する信号を直接的に解析できる有利さがある。Hilbert-Huang transform は Camp et al. [2007] によって初めて重力波データ解析に用いられ、LIGO-Virgo によって観測された重力波信号に対しても有効なことが示されている (Sakai et al. [2017b], Akhshi et al. [2021] など)。本研究では、Takeda et al. [2021] で報告した内容を含め、Hilbert-Huang transform がさまざまな天体現象からの重力波波形に対して有用な、汎用的な解析手法であることを研究した。

章の構成は次のようにした。1章では、重力波物理学について説明する。2章では、Hilbert-Huang transform の原理について説明する。次に、Son et al. [2021] と Hu et al. [2022] をもとに実装した、IMF の時間-周波数領域でのクラスタリング手法と、Stacked Hilbert-Huang transform について説

明する。本論文で解析した3つの重力波波形については、3章では重力崩壊型超新星爆発シミュレーション (Kuroda et al. [2016]) からの重力波、4章ではブラックホール連星合体前と合体後からの重力波に対して Hilbert-Huang transform を用いた結果について述べる。5章では、これまでのまとめとして、波源と波形の特徴が異なる重力波に対する Hilbert-Huang transform の有用性を示し、これらの重力波天文学への展望を述べる。

## 1.2 重力波物理学

Schutz [1988] に基づいて本章の説明で出てくる記号の説明をする。

時空上の世界点は

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \quad (1.2.1)$$

$$= (ct, x, y, z) \quad (1.2.2)$$

と表す。ここで、 $c$  は光速を表し、0成分は時間、1, 2, 3成分は空間を表す。また、 $x$  の添字がギリシャ文字 ( $\mu, \nu, \rho, \sigma, \dots$ ) の場合  $\mu = 0, 1, 2, 3$  と時空4成分を指し、アルファベット ( $i, j, k, l, \dots$ ) の場合  $i = 1, 2, 3$  と空間3成分を指す。

メトリックの成分は  $g_{\mu\nu}$  と表し、 $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$  と対称性を持つ。ベクトル  $V$  の添字の上げ下げは、メトリックを用いて表す。

$$V_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu, \quad V^\mu = g^{\mu\nu} V_\nu \quad (1.2.3)$$

曲がった時空における2点間の距離は、メトリックを用いて

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.2.4)$$

$$\equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.2.5)$$

と記述する。これを世界間隔  $ds$  と呼ぶ。上記の一段目から二段目にかけてはアインシュタインの縮退規約であり、同じ記号で表された上つき下つき添字は  $\sum$  記号がなくとも足し上げを意味する。

一様な時間、一様な空間のメトリックは次のように表す。

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.2.6)$$

クリストッフェル記号を

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (g_{\rho\nu, \mu} + g_{\rho\mu, \nu} - g_{\mu\nu, \rho}) \quad (1.2.7)$$

と表す。時空の局所的な曲がり具合を  $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$  とし、対称性  $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \Gamma_{\nu\mu}^\sigma$  を持つとし、偏微分を  $g_{\mu\nu, \gamma}$  とした。慣性系をとるときは局所的に平坦な時空であり、クリストッフェル記号は全ての点において0である。

$V$  をベクトルとして、共変微分は次のように定義する。

$$V^\alpha_{; \beta} = V^\alpha_{, \beta} + V^\mu \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \quad (1.2.8)$$

時空の曲率を表すリーマンテンソルは次のように記述する。

$$R^\mu_{\nu\rho\sigma} = \gamma^\mu_{\nu\sigma, \rho} - \gamma^\mu_{\nu\rho, \sigma} + \gamma^\mu_{\alpha\rho} \gamma^\alpha_{\nu\sigma} - \gamma^\mu_{\alpha\sigma} \gamma^\alpha_{\nu\rho} \quad (1.2.9)$$

曲率がない平坦な時空は、リーマンテンソルが恒常的に0となったとき初めて保証される。リーマンテンソルの添字を1つ縮退したものをリッチテンソルという。

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu} \quad (1.2.10)$$

さらに1つ縮退したものをスカラー曲率という。

$$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^{\mu}{}_{\mu} \quad (1.2.11)$$

アインシュタイン方程式を次のように記述する。

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1.2.12)$$

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (1.2.13)$$

$T_{\mu\nu}$  はエネルギー運動量テンソル,  $G_{\mu\nu}$  はアインシュタインテンソル,  $R_{\mu\nu}$  はリッチテンソル,  $R$  はリッチスカラー,  $G$  は重力定数,  $c$  は光速を表す。

### 1.2.1 波動方程式の導出

この章では Maggiore [2008], 中村卓史 et al. [1998] に基づき、重力波が“時空のさざ波”と呼ばれる所以を数式を用いて議論する。ここではメトリックは次のものを考える。

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (1.2.14)$$

背景時空は平坦な時空  $\eta_{\mu\nu}$  であり、そこから1次までの摂動  $h_{\mu\nu}$  が生じている。すなわち重力源は  $h_{\mu\nu}$  のみであり、 $h_{\mu\nu}$  が重力波であることを確認していく。

式 (1.2.14) においてテンソルは  $g_{\mu\nu}$  と  $\eta_{\mu\nu}$  であり、 $h_{\mu\nu}$  はテンソルではない。しかしローレンツ変換  $x^{\mu} \rightarrow \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$  を考えると  $h_{\mu\nu}$  はテンソルかのように振る舞うことを確認できる。行列  $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$  は次を満たす

$$\Lambda^{\rho}{}_{\mu} \Lambda^{\sigma}{}_{\nu} \eta_{\rho\sigma} = \eta_{\mu\nu} \quad (1.2.15)$$

これを用いると、メトリックのローレンツ変換下での振る舞いは

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g'_{\mu\nu}(x') = \Lambda^{\rho}{}_{\mu} \Lambda^{\sigma}{}_{\nu} g_{\rho\sigma}(x) \quad (1.2.16)$$

$$= \Lambda^{\rho}{}_{\mu} \Lambda^{\sigma}{}_{\nu} [\eta_{\rho\sigma} + h_{\rho\sigma}(x)] \quad (1.2.17)$$

$$= \eta_{\mu\nu} + \Lambda^{\rho}{}_{\mu} \Lambda^{\sigma}{}_{\nu} h_{\rho\sigma}(x) \quad (1.2.18)$$

となる。よって、

$$h'_{\mu\nu}(x') = \Lambda^{\rho}{}_{\mu} \Lambda^{\sigma}{}_{\nu} h_{\rho\sigma}(x) \quad (1.2.19)$$

と、ローレンツ変換の下では  $h_{\mu\nu}$  はテンソルのように振る舞うので、線形理論ではテンソルとして扱う。

メトリック (1.2.14) を用いてアインシュタイン方程式を  $h_{\mu\nu}$  に対して線形のオーダーで展開する。このような理論は、“線形理論”と呼ばれる。<sup>\*1</sup>

<sup>\*1</sup> テンソルは座標に依らないが、その成分は座標系による。我々が関心のある物理的な状況下では、十分に広い空間領域において式 (1.2.14) を保持する座標系が存在する。座標系を選ぶということは一般相対性理論の座標変換に対する不変性を破る行為であるが、局所不変性を破くことは擬似的な自由度を取り除くことが可能であり、場の実際の物理を明らかにする最良の方法である。

まず、線形理論でのクリストッフエル記号は、

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(g_{\sigma\nu, \mu} + g_{\sigma\mu, \nu} - g_{\mu\nu, \sigma}) \quad (1.2.20)$$

$$= \frac{1}{2}(h^{\rho}_{\nu, \mu} + h^{\rho}_{\mu, \nu} - h_{\mu\nu, \rho}) + \mathcal{O}(|h_{\mu\nu}|^2) \quad (1.2.21)$$

である。リーマンテンソルは、

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}(h_{\mu\sigma, \nu\rho} + h_{\nu\rho, \mu\sigma} - h_{\nu\sigma, \mu\rho} - h_{\mu\rho, \nu\sigma}) + \mathcal{O}(|h_{\mu\nu}|^2) \quad (1.2.22)$$

となる。簡便のため、次の表記

$$h = \eta_{\mu\nu}h_{\mu\nu}, \quad \bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \quad (1.2.23)$$

$$\bar{h} \equiv \eta^{\mu\nu}\bar{h}_{\mu\nu} = h - 2h = -h, \quad h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h} \quad (1.2.24)$$

を用いると、アインシュタイン方程式は

$$\square\bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\bar{h}_{\rho\sigma, \rho\sigma} - \bar{h}_{\mu\rho, \rho\sigma} + \bar{h}_{\nu\rho, \rho, \mu} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1.2.25)$$

となる。ここでダランベルシアン  $\square = \eta_{\mu\nu}\partial^{\mu}\partial^{\nu} = \partial_{\mu}\partial^{\mu}$  を用いた。よって、線形理論のメトリックから線形アインシュタイン方程式が導かれた。

さらに議論を進める為、 $h_{\mu\nu}$  の自由度について言及する。次のように、背景時空からベクトル  $\xi^{\mu}(x)$  だけずらした座標変換を考える。

$$x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x) \quad (1.2.26)$$

次の議論から  $\xi^{\mu}(x)$  の微分値のオーダーが制限される。

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial x^{\nu}} = \delta^{\mu}_{\nu} + \xi^{\mu}_{, \nu} \quad (1.2.27)$$

を用いて、 $g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g'_{\mu\nu}(x')$  を考えると

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} g_{\rho\sigma}(x) \quad (1.2.28)$$

$$= (\delta^{\rho}_{\mu} + \xi^{\rho}_{, \mu})(\delta^{\sigma}_{\nu} + \xi^{\sigma}_{, \nu})(\eta_{\rho\sigma} + h_{\rho\sigma}) \quad (1.2.29)$$

$$= \eta_{\mu\nu} + \eta_{\mu\sigma}\xi^{\sigma}_{, \nu} + \xi^{\rho}_{, \mu}\eta_{\rho\nu} + h_{\mu\nu} + \mathcal{O}(|\xi^{\mu}_{, \nu}|^2) + \mathcal{O}(|h_{\mu\nu}\xi^{\mu}_{, \nu}|) \quad (1.2.30)$$

$$\eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu} \simeq \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} + \xi_{\mu, \nu} + \xi_{\nu, \mu} \quad (1.2.31)$$

すなわち、

$$h_{\mu\nu}(x) \rightarrow h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}(x) - (\xi_{\mu, \nu} + \xi_{\nu, \mu}) \quad (1.2.32)$$

となる。式 (1.2.31) で用いたように、 $\mathcal{O}(|\xi^{\mu}_{, \nu}|) \sim \mathcal{O}(|h_{\mu\nu}|)$  であれば、座標変換後も背景時空は不変であり  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$  である。<sup>\*2</sup> 今後、背景時空は不変の座標変換をゲージ変換と呼ぶ。また、 $h_{\mu\nu}$  を重力波と考える場合、座標によって本物以外の成分が現れることが示唆されている。このゲージ変換の自由度を消すことで、真の重力波の自由度が得られる。

$h_{\mu\nu}$  のゲージ変換の自由度を用いて以下のローレンツ条件をとる。

$$\bar{h}_{\mu\nu, \nu} = 0 \quad (1.2.33)$$

<sup>\*2</sup>  $\mathcal{O}(|\xi^{\mu}_{, \nu}|)$  の制限は、 $x^{\mu} = x'^{\mu} - \xi^{\mu}(x) = x'^{\mu} - \xi^{\mu}(x' - \xi) \simeq x'^{\mu} - \xi^{\mu}(x') + \mathcal{O}(h\partial\xi)$  と対称性を保つ上でも必要である。 $|\xi^{\mu}|$  への制限は背景時空が  $\eta$  のときには設けられず、そうでないときに発生する。

このとき、自由度は  $10 \rightarrow 6$  である。すると、式 (1.2.25) の左辺の第 2,3,4 項は 0 となるため線形アインシュタイン方程式は次の波動方程式の形となる。

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1.2.34)$$

これより、時空の微小な歪み  $h_{\mu\nu}$  は波動方程式に従って伝播する重力波であることが導かれた。また、式 (1.2.34) は式 (1.2.33) と共に

$$T_{\mu\nu, \nu} = 0 \quad (1.2.35)$$

と、線形理論ではエネルギー運動量テンソルが保存されることも示す。

この章では、線形理論での  $h_{\mu\nu}$  の性質と、アインシュタイン方程式はメトリック (1.2.14) とローレンツ条件を適用することで波動方程式として表されることの 2 つを導いた。 $h_{\mu\nu}$  の自由度は 6 であり、式 (1.2.32) で確認したようにゲージ変換の自由度はまだ残っている。次章では、重力波が座標変換に依らない物理的な量であることを確かめる。

## 1.2.2 TT ゲージ

この章では真の重力波の自由度を探る。簡単のため真空  $T_{\mu\nu} = 0$  を考え、以下の波動方程式の下で議論する。

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (1.2.36)$$

$\square = -(1/c^2)\partial_0^2 + \nabla^2$  より、上の式は重力波は光速で伝播することを表す。

$\bar{h}_{\mu\nu}$  に対して式 (1.2.32) で  $h_{\mu\nu}$  施したゲージ変換を行う。

$$\bar{h}_{\mu\nu} \rightarrow \bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - (\xi_{\nu, \mu} + \xi_{\mu, \nu} - \eta_{\mu\nu}\xi^{\rho, \rho}) \quad (1.2.37)$$

さらに微分すると、

$$\bar{h}_{\mu\nu, \nu} \rightarrow (\bar{h}'_{\mu\nu, \nu})' = \bar{h}_{\mu\nu, \nu} - \square\xi_{\mu} - \xi_{\nu, \mu, \nu}(x) + \xi^{\nu, \mu\nu}(x) \quad (1.2.38)$$

$$= \bar{h}_{\mu\nu, \nu} - \square\xi_{\mu} \quad (1.2.39)$$

となる。ゲージ変換後にローレンツ条件  $(\bar{h}'_{\mu\nu, \nu})' = 0$  を課すとする。関数  $f_{\mu}(x)$  を用いて、 $\bar{h}_{\mu\nu, \nu} = f_{\mu}(x) \neq 0$  だとすると、 $(\bar{h}'_{\mu\nu, \nu})' = 0$  とするには  $\square\xi_{\mu} = f_{\mu}(x)$  となるように  $\xi_{\mu}(x)$  を選ぶ必要がある。選び方は任意であり、

$$\square\xi_{\mu} = 0 \quad (1.2.40)$$

とすることで、 $\bar{h}_{\mu\nu, \nu} = 0$  が保たれる。さらに式 (1.2.37) の右辺の括弧内を  $\xi_{\mu\nu} \equiv \xi_{\nu, \mu} + \xi_{\mu, \nu} - \eta_{\mu\nu}\xi^{\rho, \rho}$  とし両辺に  $\square$  を作用させると、

$$\square\xi_{\mu\nu} = 0 \quad (1.2.41)$$

となる。式 (1.2.37) 曰く、 $\bar{h}_{\mu\nu, \nu} = 0$  を満たす  $h_{\mu\nu}$  のもつ 6 つの自由度から、関数  $\xi_{\mu\nu}$  を減らすことができる。ここで、 $\xi_{\mu\nu}$  は 4 つの独立した任意関数  $\xi_{\mu}$  に依存し、式 (1.2.41) を満たす。

重力波の自由度を導くため、 $\square\xi_{\mu} = 0$  に反しないように  $\xi$  の 4 つ自由度を用いて、 $h_{\mu\nu}$  の成分をいくつか消していく。そこで次の 2 つの条件を課す。

- トレースレス (traceless)
- トランスバース (transverse)

まず、トレースレス条件  $\bar{h} = \bar{h}^\mu{}_\mu = 0$  を課す。この条件下では、式 (1.2.23) より

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} \quad (1.2.42)$$

である。以後、表記に区別はつけない。 $h = 0$  が  $\xi_\mu$  に意味するところは式 (1.2.37) をトレースレスすると、

$$\bar{h}' = \bar{h} + 2\xi^\mu{}_{,\mu} \quad (1.2.43)$$

よって、 $\bar{h}' = 0$  とするには、 $\xi_\mu$  が  $\xi^\mu{}_{,\mu} = -1/2\bar{h}$  を満たす必要がある。取り方は任意であり、ここでは  $\xi^0 = 0$  とする。そこで式 (1.2.32) の  $(\mu, \nu) = (0, i)$  成分を書き下すと、

$$h'_{0,i} = h_{0,i} - (\xi_{i,0} + \xi_{0,i}) \quad (1.2.44)$$

より、 $h'_{0,i} = h_{0,i} = 0$  となるように  $\xi_i$  を選ぶ。これを踏まえて、式 (1.2.33) の  $\mu = 0$  成分を書き下すと、

$$h_{00}'{}^0 + h_{0i}'{}^i = 0 \quad (1.2.45)$$

$$h_{00}'{}^0 = 0 \quad (1.2.46)$$

となる。議論したい重力波は重力場の波動性をもった時間変化であり、 $h_{00}$  は源のニュートンポテンシャルに対応する。そこで、 $h_{00} = 0$  とすると、 $h_{00} = h_{0i} = 0$  より、

$$h_{0\mu} = 0 \quad (1.2.47)$$

となる。するとローレンツ条件は

$$h_{ji}'{}^i = 0 \quad (1.2.48)$$

となる。これらをまとめて、

$$h_{0\mu} = 0, \quad h^i{}_i = 0, \quad h_{ij}'{}^j = 0 \quad (1.2.49)$$

であり、トランスバース・トレースレス (transverse-traceless) ゲージ、または TT ゲージと呼ぶ。この座標で記述する  $h_{\mu\nu}$  は今後、 $h_{\mu\nu}^{\text{TT}}$  と表記する。<sup>\*3</sup>トランスバースの所以は、次の議論で明らかになる。

□ $h_{\mu\nu} = 0$  より平面波解を考えると、

$$h_{ij}^{\text{TT}}(x) = e_{ij}(\mathbf{k})e^{ik^\mu x_\mu}, \quad k^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k}\right), \quad \frac{\omega}{c} = |\mathbf{k}| \quad (1.2.50)$$

ここで、 $e_{ij}(\mathbf{k})$  は偏光テンソル、 $\mathbf{k}$  は波数ベクトル、 $\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$  は波の進行方向を表す。式 (1.2.49) の 3 つ目に平面波解を代入すると、

$$h_{ij}'{}^j = 0 \quad (\text{左辺}) = (e_{ij}e^{i(\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})})_{,j} \quad (1.2.51)$$

$$= e_{ij}(i\mathbf{k})e^{i(\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \quad (1.2.52)$$

$$= i\mathbf{k}h_{ij} \quad (1.2.53)$$

両辺を  $i|\mathbf{k}|$  で割ると、

$$n^i h_{ij} = 0 \quad (1.2.54)$$

よって、 $h_{ij}'{}^j = 0$  はトランスバース条件であり、 $h_{ij}$  が平面波解であるとする。

<sup>\*3</sup> いま、 $T_{\mu\nu} = 0$  と源より外の領域を考えているが、内の領域 ( $T_{\mu\nu} \neq 0$ ) では □ $h_{\mu\nu} \neq 0$  のため TT ゲージをとることができない。代わりに □ $\xi_{\mu\nu} = 0$  を満たす  $\xi_{\mu\nu}$  の自由度を消す。

簡単のために、 $\hat{n}$  を  $z$  軸方向とすると、 $t$  成分と  $z$  成分は 0 であるから、

$$h_{ab}^{TT} = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times \\ h_\times & -h_+ \end{pmatrix}_{ab} \cos[\omega(t - z/c)] \quad (1.2.55)$$

ここで、 $a, b = 1, 2$  は横波の  $(x, y)$  平面、 $h_+$ ,  $h_\times$  は波の “plus” と “cross” 偏光の振幅を表す。よって、重力波の自由度は 2 であることが求められた。このとき、世界間隔は、

$$d^2s = -c^2 dt^2 + dz^2 + \{1 + h_+ \cos[\omega(t - z/c)]\} dx^2 + \{1 - h_+ \cos[\omega(t - z/c)]\} dy^2 + 2h_\times \cos[\omega(t - z/c)] dx dy \quad (1.2.56)$$

となる。

また、以上の操作を一気に行い TT ゲージをとる便利な射影演算子を導入する。 $h_{\mu\nu}(x)$  は源の外で方向  $\hat{n}$  へ伝播する平面波解であり、ローレンツ条件は適用済みとする。これに TT ゲージをとるには、次の射影演算子

$$\Lambda_{ij, kl}(\hat{n}) \equiv P_{ik}P_{jl} - \frac{1}{2}P_{ij}P_{kl}, \quad P_{ij}(\hat{n}) \equiv \delta_{ij} - n_i n_j \quad (1.2.57)$$

を  $h_{\mu\nu}$  の空間成分に作用させ、

$$h_{ij}^{TT} = \Lambda_{ij, kl} h_{kl} \quad (1.2.58)$$

とする。

### 1.2.3 測地線方程式、測地線偏差方程式

時空上の試験粒子が従う運動方程式と、2つの試験粒子の偏差の方程式を導入する。それぞれ、測地線方程式、測地線偏差方程式である。後述の通り、重力波が試験粒子単体に及ぼす影響を観測することは不可能であり、2つの測地線の偏差に現れた変化が本質的な重力波の効果であると言える。

ここでは Maggiore [2008], 佐々木節 [1996], Schutz [1988], 須藤靖 [2005] に従って測地線方程式と測地線偏差方程式を導く。

ユークリッド幾何の公理の1つに、“平行な2直線はどこまで延長しても平行”というものがある。これは、

- × 2つの直線の距離が一定であるように延長する → 2直線は曲がることもあり得る
- 各直線はそれまでと同じ方向をとり続ける → ある点での直線の接線は直前の点での接線と平行

すなわち、ユークリッド空間での直線とは、接線ベクトルが平行移動される唯一の曲線である。一方測地線とは、平坦な時空での任意の2点間の最短距離、すなわち直線、を曲がった時空に一般化した概念である。最短距離は最小作用の原理から、あらゆる可能な経路からその長さが最小となるものとして定義される。試験粒子の時空上の世界点の経路を曲線  $x^\mu = x^\mu(\lambda)$  として、パラメータ  $\lambda$  でパラメータづける。 $d\lambda$  で特徴づけられた2点間の世界間隔は、

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} d\lambda^2 \quad (1.2.59)$$

であり、経路に沿った固有距離と固有時間（経路に沿って運ばれる時計で測った時間）はそれぞれ

$$\begin{aligned} \text{space-like } ds^2 > 0 &\rightarrow ds = (g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)^{1/2} \\ \text{time-like } ds^2 < 0 &\rightarrow c^2 d\tau^2 = -ds^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (\tau: \text{固有時間}) \\ \text{null } ds^2 &= 0 \end{aligned}$$

と定義される。以降、 $\lambda = \tau$  として測地線方程式を導く。このとき

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = -c^2 \quad (1.2.60)$$

であり、固定された境界条件  $x^\mu(\tau_A) = x_A^\mu$ ,  $x^\mu(\tau_B) = x_B^\mu$  を満たす全ての time-like な曲線のうち、質量  $m$  の質点の古典的な経路は作用

$$S = -mc \int_{\tau_A}^{\tau_B} L d\tau \quad (1.2.61)$$

$$L = -mc \left( -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right)^{1/2} \quad (1.2.62)$$

の極小値  $\delta S = 0$  より導かれ、測地線方程式

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho}(x) \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0 \quad (1.2.63)$$

が得られる。4元速度  $u^\mu \equiv dx^\mu/d\tau$  を定義すると、

$$\frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} u^\nu u^\rho = 0 \quad (1.2.64)$$

となる。メトリック  $g_{\mu\nu}$  はクリストッフエル記号  $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$  に現れており、1つの測地線の変化は重力によって決定される。これは慣性系で  $\Gamma^\mu_{\nu\rho} = 0$  とでき、重力波の効果が確認できない。これは等価原理の数学的表現である。

そこで、2つの近接した測地線、 $x^\mu(\tau)$ ,  $x^\mu(\tau) + \xi^\mu(\tau)$  を考える。前者が測地線方程式に従うとすると、後者の測地線方程式は

$$\frac{d^2(x^\mu + \xi^\mu(\tau))}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho}(x + \xi) \frac{dx^\nu(\tau) + \xi^\nu(\tau)}{d\tau} \frac{dx^\rho(\tau) + \xi^\rho(\tau)}{d\tau} = 0 \quad (1.2.65)$$

である。ここで、 $|\xi^\mu|$  が重力場の変化の典型的なスケールに対して十分小さいとすると、式 (1.2.63) と式 (1.2.65) の差をとることで  $\xi^\mu(\tau)$  が従う運動方程式

$$\frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} + 2\Gamma^\mu_{\nu\rho}(x) \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{d\xi^\rho}{d\tau} + \xi^\sigma \Gamma^\mu_{\nu\rho, \sigma}(x) \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} + \mathcal{O}(|\xi|^2) = 0 \quad (1.2.66)$$

が得られ、これを測地線偏差方程式と呼ぶ。式 (1.2.66) は次の経路  $x^\mu(\tau)$  に沿ったベクトル場  $V^\mu(x)$  に対する共変微分を導入することで、シンプルに記述できる。

$$\frac{DV^\mu}{D\tau} \equiv \frac{dV^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} V^\nu \frac{dx^\rho}{d\tau} \quad (1.2.67)$$

よって、

$$\frac{D^2 \xi^\mu}{D\tau^2} = -R^\mu_{\nu\rho\sigma} \xi^\rho \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \quad (1.2.68)$$

$$= -R^\mu_{\nu\rho\sigma} \xi^\rho u^\nu u^\sigma \quad (1.2.69)$$

となる。メトリック  $g_{\mu\nu}$  の効果はリーマンテンソル  $R^\mu_{\nu\rho\sigma}$  に現れており、2つの近接した time-like な測地線偏差の変化は潮汐力によって決定される。これは時空の曲率が重力場の潮汐力で表現できることを数学的に示したものである。よって、重力波の効果はこの測地線偏差方程式の下で確認できる。

### 1.2.4 四重極放射の導出

ここでは J. フォスター [1991], Kotake and Suzuki [2014], 中村卓史 et al. [1998] に倣う。  
さきほど求めた線形アインシュタイン方程式から得た波動方程式を改めて記す。

$$\square \bar{h}_{\mu\nu}(x^0, \mathbf{x}) = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}(x^0, \mathbf{x}) \quad (1.2.70)$$

ここで  $\square = -(1/c^2)\partial_0^2 + \nabla^2$  である。これは、 $\bar{h}_{\mu\nu}$  で表される重力波と  $T_{\mu\nu}$  で表される重力波源との間の関係式である。この方程式の解として次のグリーン関数を用いる。

$$\square G = -\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta(x^0 - y^0) \quad (1.2.71)$$

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{y}, x^0 - y^0) = \frac{\delta(x^0 - y^0 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \quad (1.2.72)$$

これより、

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x^0, \mathbf{x}) = \frac{4G}{c^4} \int \frac{T_{\mu\nu}(x^0 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y \quad (1.2.73)$$

となる。 $\mathbf{x}$  は  $\bar{h}_{\mu\nu}$  が求められる領域の空間座標、 $\mathbf{y}$  は源の領域の空間座標を表し、 $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  は両者の空間的な距離を表す。この積分は  $\mathbf{y}$  の点でのイベントが  $\mathbf{x}$  の点に伝わるまでに  $(x^0 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)/c$  秒の遅れがあることを考慮しており、空間積分を行う源の領域は、 $x^0 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  での大きさである。この波動解の右辺を解くことで重力波の発生についての式が得られる。しかし一般に解くことは容易ではない為、条件を課す必要がある。まず、想定する領域を制限する。観測者と議論する領域間の距離を  $r$  とし、 $T_{\mu\nu}$  の広がりスケール（重力波源の典型的なサイズ）を  $L$  とすると、

$$r = |\mathbf{x}| \gg |\mathbf{y}| \sim L \quad (1.2.74)$$

を考える。例えば銀河系で起こった重力崩壊型超新星爆発の場合、鉄コア内の非球対称運動が重力波を生成するため、 $r \sim 10\text{kpc} \sim 3 \times 10^{17}\text{km}$ 、 $L \sim 1000\text{km}$  である。 $\mathbf{n} = \mathbf{x}/r$  として、 $\mathcal{O}((L/r)^2)$  以上のオーダーを無視すると

$$(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2 = r^2 \left( 1 - 2\mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{y}}{r} + \frac{L^2}{r^2} \right) \quad (1.2.75)$$

$$\simeq r^2 \left( 1 - 2\mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{y}}{r} \right) \quad (1.2.76)$$

従って、

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \simeq r - \mathbf{n} \cdot \mathbf{y} \quad (1.2.77)$$

$$T_{\mu\nu}(x^0 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \simeq T_{\mu\nu}(x^0 - r + \mathbf{n} \cdot \mathbf{y}, \mathbf{y}) \quad (1.2.78)$$

重力波の真の自由度のみを抽出するには、TT 部分をとる必要がある。

$$\bar{h}_{ij}^{\text{TT}} = h_{ij}^{\text{TT}} = \frac{4G}{c^4 r} \int T_{\mu\nu}^{\text{TT}}(x^0 - r + \mathbf{n} \cdot \mathbf{y}, \mathbf{y}) \quad (1.2.79)$$

ここでさらに条件を課す。重力波源の典型的な速度を  $v = |\mathbf{v}|$  として、系の運動が光速よりも十分遅い ( $v \ll c$ ) とする。この場合スローモーション近似が有効であり、式 (1.2.79) の被積分関数は次のテイラー展開が可能である。

$$T_{ij}^{\text{TT}}(x^0 - r + \mathbf{n} \cdot \mathbf{y}, \mathbf{y}) = \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{\partial}{\partial x^0} \right)^m T_{ij}^{\text{TT}}(x^0 - r + \mathbf{n} \cdot \mathbf{y}, \mathbf{y}) \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{y})^m}{m!} \quad (1.2.80)$$

$$= T_{ij}^{\text{TT}}(x^0 - r, \mathbf{y}) + \mathbf{n} \cdot \mathbf{y} \frac{\partial}{\partial x^0} T_{ij}^{\text{TT}}(x^0 - r, \mathbf{y}) + \dots \quad (1.2.81)$$

スローモーションの意味は第 2 項から読み取れる。

$$\left| \mathbf{n} \cdot \mathbf{y} \frac{\partial}{\partial x^0} T_{ij}^{\text{TT}}(x^0 - r, \mathbf{y}) \right| \leq \frac{L}{c} \left| \frac{\partial}{\partial t} T_{ij}^{\text{TT}}(x^0 - r, \mathbf{y}) \right| \simeq \frac{v}{c} |T_{ij}^{\text{TT}}(x^0 - r, \mathbf{y})| \quad (1.2.82)$$

ここで、 $v = L/T$  を用いた。 $T$  は  $T_{\mu\nu}$  の時間変化の典型的な時間である。

式 (1.2.79) は次のように書き換えられる。

$$h_{ij}^{\text{TT}}(x^0, \mathbf{x}) = \frac{2G}{c^4 r} \sum_{m=0}^{\infty} n_{k_1} n_{k_2} \cdots n_{k_m} \mathcal{I}_{ij}^{\text{TT } k_1 k_2 \cdots k_m}(x^0 - r) \quad (1.2.83)$$

$$\mathcal{I}_{ij}^{\text{TT } k_1 k_2 \cdots k_m} = \frac{2}{m!} \left( \frac{\partial}{\partial x^0} \right)^m \int T_{ij} x^{k_1} x^{k_2} \cdots x^{k_m} d^3x \quad (1.2.84)$$

ここでは最低次の  $m = 0$  を考える。

$$\mathcal{I}_{ij} = 2 \int T_{ij} d^3x \quad (1.2.85)$$

左辺の計算において、線形理論ではエネルギー保存則  $T_{\mu\nu, \nu} = 0$  が成り立つことを用いる。

$$T_{00, 0} + T_{0k, k} = 0, \quad (1.2.86)$$

$$T_{i0, 0} + T_{ik, k} = 0 \quad (1.2.87)$$

次の恒等式を考える。

$$\int (T_{ik} x^j)_{,k} d^3x = \int T_{ik, k} x^j d^3x + \int T_{ij} d^3x \quad (1.2.88)$$

左辺はガウスの定理より表面積分に変換され積分は 0 となる。式 (1.2.86) を用いると、

$$\int T_{ij} d^3x = - \int T_{ik, k} x^j d^3x = \int T_{i0, 0} x^j d^3x \quad (1.2.89)$$

$$= \frac{\partial}{\partial ct} \int T_{i0} x^j d^3x \quad (1.2.90)$$

が成り立つ。 $i$  と  $j$  を交換して和をとると、

$$\int T_{ij} d^3x = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial ct} \int (T_{i0} x^j + T_{j0} x^i) d^3x \quad (1.2.91)$$

次に、

$$\int (T_{0k} x^i x^j)_{,k} d^3x = \int T_{0k, k} x^i x^j d^3x + \int (T_{0i} x^j + T_{0j} x^i) d^3x \quad (1.2.92)$$

を考える。この左辺の積分も再びガウスの定理により 0 となる。式 (1.2.87) を用いると、

$$\int (T_{0i} x^j + T_{0j} x^i) d^3x = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int T_{00} x^i x^j d^3x \quad (1.2.93)$$

を得る。式 (1.2.91) と式 (1.2.93) を用いると、

$$\int T_{ij} d^3x = \frac{1}{2} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int T_{00} x^i x^j d^3x \quad (1.2.94)$$

であり、式 (1.2.85) の左辺を変形できた。ゆっくり運動している源の粒子に対しては  $\rho$  を物質のエネルギー密度として  $T_{00} \simeq \rho c^2$  であるから、

$$\mathcal{I}_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \rho x^i x^j d^3x \quad (1.2.95)$$

$$\equiv \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} I_{ij} = \frac{1}{2} \ddot{I}_{ij} \quad (1.2.96)$$

ここで、物質分布の四重極モーメントを  $I_{ij}$  とした。この TT をとって、元の式 (1.2.83) に戻すと、

$$h_{ij}^{TT}(x^0, \mathbf{x}) \simeq \frac{2G}{c^4 r} \left[ \ddot{I}_{ij}^{TT}(x^0 - r) \right]_{\text{ret}} \quad (1.2.97)$$

となる。記号 (ret) は積分が遅延時間 (retarded time)  $t - r/c$  での時に評価されたことを示す。こうして、線形理論から導かれた波動方程式に対して “ $r \gg L$ ” と “スローモーション近似の最低次 ( $m = 0$ )” を考えることで、重力波は物質の四重極放射であることが導かれた。

$m \neq 0$  での  $h_{ij}^{TT}$  の大きさをオーダー評価する。系の典型的な質量を  $M$  とすると、

$$h_{ij}^{TT}(m = 0) = \frac{2G}{c^4 r} \ddot{I}_{ij}^{TT}(x^0 - r) \quad (1.2.98)$$

$$\sim \frac{2G}{c^4 r} \frac{1}{T^2} ML^2 \sim \frac{2GM}{c^4 r} \frac{v^2}{L^2} ML^2 \quad (1.2.99)$$

$$\sim \frac{2GM}{c^4 r} v^2 \quad (1.2.100)$$

と見積もれる。式 (1.2.83) より、 $m$  が1つ増えると  $x$  と時間微分がそれぞれ1つ増えるので、オーダーとしては

$$h_{ij}^{TT}(m) \sim \frac{2GM}{c^4 r} \frac{v^{2+m}}{L^{2+m}} ML^{2+m} \sim \frac{2GM}{c^4 r} v^{2+m} \quad (1.2.101)$$

となるので、四重極放射より  $v^m$  だけ小さくなる。

#### 四重極放射の大雑把な評価

重力波が四重極放射であることは、次のような状況の場合、電磁気波との比較から近似的に推測できる。ここでは超新星爆発のような、重力波によって系からエネルギー・(角)運動量が引き抜かれる散逸の効果が系のダイミクスに及ぼす影響の弱い場合を考える。

電磁波は電荷が加速することにより発生し、主に電磁双極子放射である。その光度は以下で与えられる。

$$L_{\text{dipole}} = \frac{2}{3} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{d}^2 \quad (1.2.102)$$

ここで、 $\mathbf{d}$  は双極子モーメントである。一方、重力場中で運動する物質の双極子モーメント (matter dipole moment) は、

$$\mathbf{d} = \sum_{\text{particles } i} m_i \mathbf{x}_i \quad (1.2.103)$$

である。ここで  $\mathbf{x}_i$  は質量  $m_i$  の粒子の位置ベクトルである。よって  $\dot{\mathbf{d}}$  は系の全運動量であり、運動量保存則

$$\dot{\mathbf{d}} = 0 \quad (1.2.104)$$

なため、重力波では双極子の放射は存在しない。

電磁波において、電気双極子の次のオーダーは、磁気双極子 (magnetic-dipole) と電気四重極子 (electric-quadrupole) 放射である。重力波で前者に対応する物質流 (matter-current) の双極子モーメントは、系の角運動量であり、その時間微分は角運動量の保存則から0となる。

$$\boldsymbol{\mu} = \sum_{\text{particles } i} \mathbf{x}_i \times m_i \mathbf{v}_i \quad (1.2.105)$$

である。ここで  $\mathbf{v}_i$  は質量  $m_i$  の粒子の速度ベクトルである。これは系の角運動量であり、角運動量の保存則から

$$\dot{\boldsymbol{\mu}} = 0 \quad (1.2.106)$$

となる。よって、重力波は四重極以上の変動から生じることが予想でき、さきほどの議論から主に四重極放射であることは確認済みである。

### 1.2.5 四重極放射の角度依存性

重力波の放射の有無、または放射角は、系の形態に依存する。ここでは  $h_{ij}^{TT}$  の成分を極座標で記してから次の具体例を挙げて四重極放射の角度依存性について確認する。

- 回転している軸対称な星由来の重力波
- 重力崩壊している球対称な星由来の重力波

上2つはそれぞれ、主に2、3次元の超新星爆発の数値シミュレーションと関連する状況である。

四重極公式を極座標に座標変換

$$x = r \sin \theta \cos \phi \quad (1.2.107)$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi \quad (1.2.108)$$

$$z = r \cos \theta \quad (1.2.109)$$

$$(1.2.110)$$

のとき、

$$h_{rr} = h_{ij}^{TT} \frac{\partial x^i}{\partial r} \frac{\partial x^j}{\partial r}, \quad h_{r\theta} = h_{ij}^{TT} \frac{\partial x^i}{\partial r} \frac{\partial x^j}{\partial \theta}, \quad h_{r\phi} = h_{ij}^{TT} \frac{\partial x^i}{\partial r} \frac{\partial x^j}{\partial \phi}, \quad (1.2.111)$$

$$h_{\theta\theta} = h_{ij}^{TT} \frac{\partial x^i}{\partial \theta} \frac{\partial x^j}{\partial \theta}, \quad h_{\theta\phi} = h_{ij}^{TT} \frac{\partial x^i}{\partial \theta} \frac{\partial x^j}{\partial \phi}, \quad h_{\phi\phi} = h_{ij}^{TT} \frac{\partial x^i}{\partial \phi} \frac{\partial x^j}{\partial \phi} \quad (1.2.112)$$

と座標変換でき、デカルト座用での成分を

$$h_{ij}^Q \equiv \frac{2}{r} \ddot{I}^{ij \text{ TT}} \quad (i, j = x, y, z) \quad (1.2.113)$$

とする。  $h_{ij}^{TT} n^j = 0$  から  $h_{rr} = 0, h_{r\theta} = 0, h_{r\phi} = 0$  を用いると

$$h_+ \equiv \frac{1}{r^2} h_{\theta\theta} \quad (1.2.114)$$

$$= (h_{xx}^Q - h_{yy}^Q) \frac{\cos^2 \theta + 1}{4} \cos 2\phi - \frac{h_{xx}^Q + h_{yy}^Q - 2h_{zz}^Q}{4} \sin^2 \phi \quad (1.2.115)$$

$$+ h_{xy}^Q \left( \frac{\cos^2 \theta + 1}{2} \right) \sin 2\phi - h_{xy}^Q \sin \theta \cos \theta \cos \phi - h_{yz}^Q \sin \theta \cos \theta \sin \phi \quad (1.2.116)$$

$$\frac{h_{\phi\phi}}{r^2 \sin^2 \theta} = -\frac{h_{\theta\theta}}{r^2} \quad (1.2.117)$$

$$h_\times \equiv \frac{1}{r^2 \sin \theta} h_{\theta\phi} \quad (1.2.118)$$

$$= -\frac{h_{xx}^Q - h_{yy}^Q}{2} \cos \theta \sin 2\phi + h_{xy}^Q \cos \theta \sin 2\phi \quad (1.2.119)$$

$$+ h_{xz}^Q \sin \theta \sin \phi - h_{yz}^Q \sin \theta \cos \phi \quad (1.2.120)$$

のように計算が可能。

### 回転している軸対称な星由来の重力波

ここでは円筒座標  $(R, \phi, z)$  を用いる。

$$x = R \cos \phi \quad (1.2.121)$$

$$y = R \sin \phi \quad (1.2.122)$$

$$z = z \quad (1.2.123)$$

$$(1.2.124)$$

軸対称性から密度  $\rho$  は  $\phi$  に依らないので、 $\rho = \rho(R, z, t)$  を考える。また、 $z = 0$  面に対して上下対称を仮定する。四重極モーメントの各成分を計算すると

$$I_{xx} = \int \rho(R, z, t) R^2 \cos^2 \phi R dR d\phi dz \quad (1.2.125)$$

$$= \pi \int \rho(R, z, t) R^3 dR dz \quad (1.2.126)$$

$$I_{yy} = \int \rho(R, z, t) R^2 \sin^2 \phi R dR d\phi dz \quad (1.2.127)$$

$$= I_{xx} \quad (1.2.128)$$

$$I_{zz} = \int \rho(R, z, t) z^2 R dR d\phi dz \quad (1.2.129)$$

$$= 2\pi \int \rho(R, z, t) z^2 R dR \quad (1.2.130)$$

$$I_{xy} = \int \rho(R, z, t) R^2 \sin \phi \cos \phi R dR d\phi dz \quad (1.2.131)$$

$$I_{xz} = I_{yz} = 0 \quad (z = 0 \text{ 面に対して上下対称なことより}) \quad (1.2.132)$$

もし密度が時間変化しない静的だと  $\ddot{I}_{ij} = 0$  より重力波は放射されない。密度が時間変化する、回転星が収縮・膨張するような場合、 $\ddot{I}_{xx} \neq 0$ ,  $\ddot{I}_{yy} \neq 0$ ,  $\ddot{I}_{zz} \neq 0$  であるから重力波は放射される。

$$h_+ = -\frac{1}{r} (\ddot{I}_{xx} - \ddot{I}_{zz}) \sin^2 \theta \quad (1.2.133)$$

$$h_\times = 0 \quad (1.2.134)$$

である。よって回転軸方向には重力波は放射されず、回転軸に垂直な方向に最も強い重力波が放射される。このように軸依存性が存在する。

### 重力崩壊している球対称な星は重力波を放射しない

星の半径を  $R$  として四重極モーメントは

$$I_{ij} = \int \rho x^i x^j d^3x \quad (1.2.135)$$

$$= \int_0^R \int \int \rho(r, t) r^2 n_i n_j r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (1.2.136)$$

$$= \frac{4\pi}{3} \delta_{ij} \int_0^R \rho(r, t) r^4 dr \quad (1.2.137)$$

となる。密度が時間変化しない静的な星だと  $I_{ij} \neq 0$  だが  $\ddot{I}_{ij} = 0$  である。密度が時間変化すると、 $\ddot{I}_{ij} \neq 0$  だが TT をとるときにトレースレスの操作で

$$\ddot{\mathbb{I}}_{ij} = \ddot{I}_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \ddot{I}_k^k = 0 \quad (1.2.138)$$

となり、動的でも重力波は放射されない。四重極放射という近似を外しても同様である。よって、重力崩壊型超新星爆発由来の重力波が放射されるには、星が非球対称に歪む必要がある。

### 1.3 コンパクト連星合体

ブラックホールや中性子星といったコンパクト天体からなる連星系をコンパクト連星と呼ぶ。図 1.1 (Abbott et al. [2016]) はブラックホール連星合体からの重力波放射の様子を表したものである。連星が公転運動することで重力波を放射し、その反作用として軌道半径が減少する段階を Inspiral 期と呼ぶ。Inspiral 期のような振動数が徐々に高くなる波形のことをチャープ波形と呼ぶ。この重力波を特徴づけるパラメータとして、次のようなチャープ質量がある。

$$\mathcal{M} = \frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{(m_1 + m_2)^{1/5}} \quad (1.3.1)$$

ここで、 $m_1$ ,  $m_2$  はそれぞれ連星の質量である。次に、連星合体を起こす段階を Merger 期と呼ぶ。最期に、合体後にブラックホールが形成され準固有振動により重力波が放射される段階を Ringdown 期と呼ぶ。

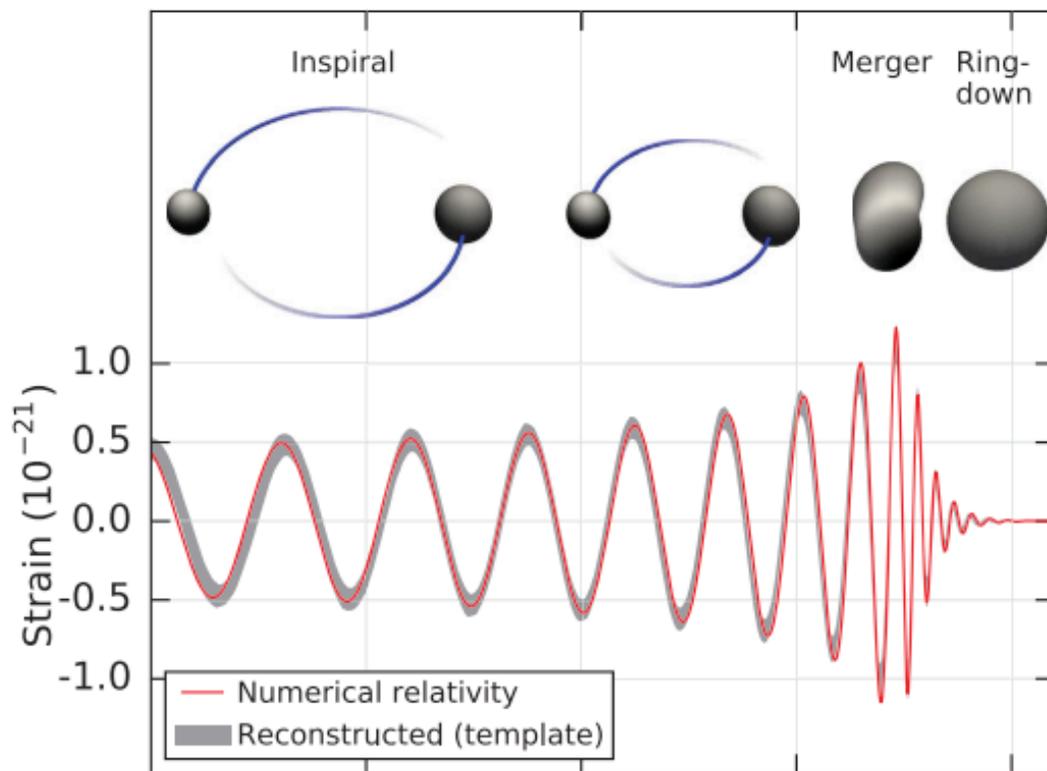


図 1.1: ブラックホール連星合体からの重力波波形とそれぞれの時間帯の連星のイメージ図。Abbott et al. [2016] より引用。

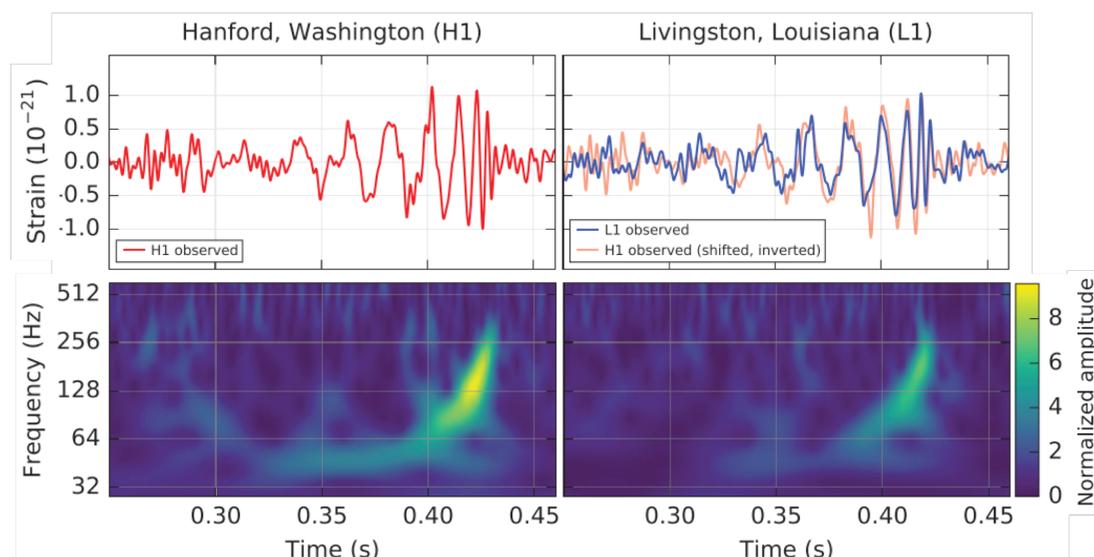


図 1.2: 初めて観測されたブラックホール連星合体からの重力波イベント GW150914。Abbott et al. [2016] より引用。時刻は 2015 年 9 月 14 日 09:50:45 UTC を基準として表示されている。可視化のために、全ての時系列波形は、検出器の最も感度の高い周波数帯域外の大きな振動を抑制するために 35 – 350 Hz のバンドパスフィルターをかけ、鋭いスペクトル線を除去するためにバンドリジェクトフィルターを用いられている。1 段目は左の図は Hanford にある重力波検出器 (H1) からの信号であり、右の図は Livingston にある重力波検出器 (L1) からの信号が表示されている。重力波イベントは最初に L1 に到来し、 $6.9^{+0.5}_{-0.4}$  ms 後に H1 に到来した。2 段目は時系列データの時間-周波数表現である。

## 1.4 重力崩壊型超新星爆発

この章では Kotake and Suzuki [2014] に基づいて重力崩壊型超新星爆発について述べる。

超新星爆発とは、太陽のような恒星の進化過程の 1 つである。星全体を爆発させ一気に広エネルギーを放射するため、一定期間光り輝く天体現象でもある。超新星爆発の観測手法や爆発メカニズムはその星の特徴 (例えば星の質量、密度、回転の速さ) に左右される。大質量星の爆発メカニズムに至っては 60 年以上前から研究が盛んにもかかわらず十分に解明されていない。

まず、超新星爆発を起こす星について、大まかな内部構造の時間変化を述べる。この変化は星の質量に依存しており星が爆発するか否かについても質量に左右される。次に、重力崩壊型超新星爆発を起こす星に着目して詳しい爆発メカニズムを追う。これらは未だ十分に解明されていないため、数値シミュレーションの研究結果に基づいて現状の標準理論とその爆発メカニズム候補を述べる。

### 1.4.1 恒星の進化

恒星とは内部の核融合反応から得られるエネルギーより輝く天体を指す。恒星は一般的に自己重力と圧力勾配が釣り合った静水圧平衡の状態にあり、中心部には元素コアが形成されている。球対称の定常な自己重力系の静水圧平衡について述べる。球対称の星の半径を  $r$ 、質量を  $M$ 、球殻の厚みを  $dr$ 、球殻の質量密度を  $\rho$  とすると、球殻の質量は  $dM = 4\pi r^2 \rho dr$  より

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad (1.4.1)$$

となる。圧力を  $P$  とすると、球殻に対する圧力勾配と重力の釣り合いは、

$$\{P(r) - P(r + dr)\}4\pi r^2 = \frac{GMdM}{r^2} \quad (1.4.2)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} = -\frac{GM}{r^2} \quad (1.4.3)$$

より、星の内部状態は質量に依ることが判る。

恒星の進化、すなわち恒星の内部構造の時間変化、の過程の最終段階として超新星爆発 (supernova explosion:SNE) と呼ばれる恒星全体の爆発現象が挙げられる。恒星の一生は質量と金属量に依るが、進化過程の大まかな分岐は質量で特徴づけられる。

恒星のエネルギー源である核融合反応を起こす最初の元素は水素である。天体の中心部にある水素が核融合反応を起こし静水圧平衡状態となった恒星を主系列星 (Main Sequence:MS) と呼ぶ。このとき天体中心は  $10^7\text{K}$  を超えている。主系列星の後、中心の水素が枯渇し水素殻の核融合反応が始まる。このとき膨張し、赤色巨星となる。以降、初期質量、すなわち主系列星時の質量ごとに構成の進化分岐がある。ここでは主に、形成されたコアが電子縮退を起こすときの元素の種類に着目すれば十分である。重い星ほど温度が高い為、その原子番号も大きくなる。その流れを図 1.3 に示した。ちなみに、重い星ほど寿命は短い。今回扱う超新星爆発は、鉄コアの重力崩壊を念頭に置く為  $10 M_{\odot}$  以上の質量をもつ恒星を対象とし、後に中性子星を生成するとする。

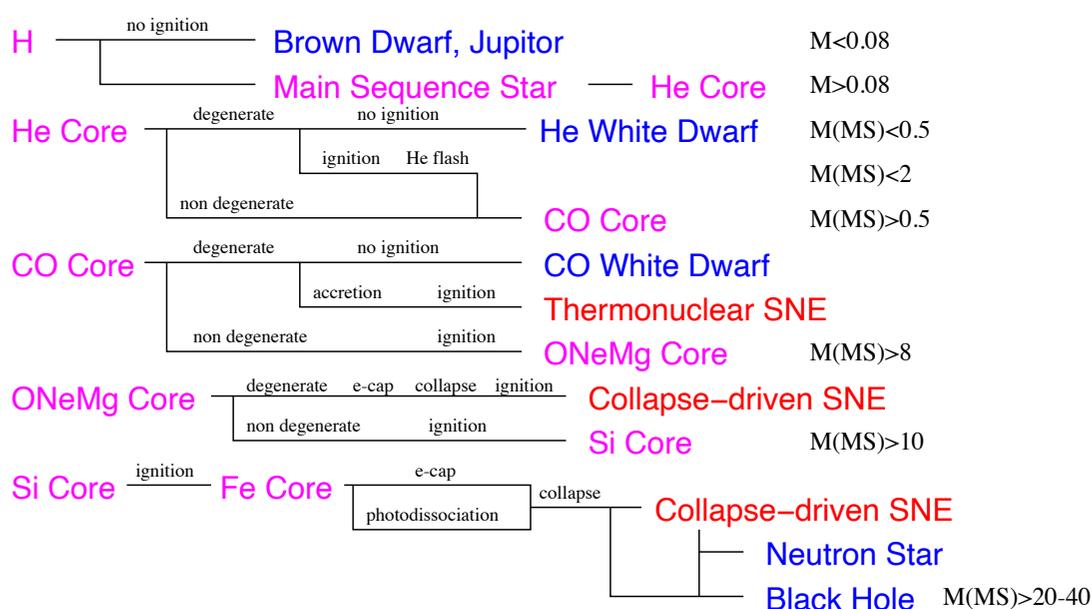


図 1.3: 初期質量別の恒星の進化。Kotake and Suzuki [2014] より引用。

### 1.4.2 超新星爆発の分類

観測から以下のような分類がなされる。

	分光から得られる輝線			爆発のエネルギー
	H	Si	He	
Ia	×	○		核融合エネルギー
Ib	×	×	○	重力エネルギー
Ic	×	×	○	
II	○			

表 1.1: 超新星爆発の分類

大質量星の星のコアが重力崩壊によって爆発する現象を重力崩壊型超新星爆発 (core collapse supernova ; CCSN) と呼ぶ。

### 1.4.3 対象とする超新星爆発の基本情報

重力崩壊型超新星爆発を起こす星の典型的な情報を既述する。

質量が $15M_{\odot}$ 、半径が $10^{12}$ - $10^{14}$ cm の星の場合		
コアの質量	1-2	$M_{\odot}$
コアの半径	$10^8$ - $10^9$	cm
コアの中心密度	$10^9$ - $10^{10}$	$\text{g/cm}^3$
電子のフェルミエネルギー	10	MeV

表 1.2: 典型的な重力崩壊時の星の構造

相対論的電子の縮退圧で支えられている。

爆発の流れは次の項目に沿って述べる。

- 鉄コアの重力崩壊
- ニュートリノの閉じ込め
- コアバウンス
- 衝撃波の発生
- 衝撃波の失速
- 衝撃波の復活

### 1.4.4 鉄コアの重力崩壊

重力崩壊前の鉄コアは、圧力勾配と自己重力が釣り合った状態である。重力崩壊はこの均衡が崩れることをきっかけに起こる。ここでは均衡を崩す原因となる物理現象を挙げる。コアの内部では、以下のような電子捕獲反応が起こる



ここで  $e^{-}$  は電子、 $p$  は陽子、 $n$  は中性子を示す。この反応により電子が減り、星を支えている縮退圧は下がる。生成されたニュートリノは自己の透過率の高さ故に外に逃げていくため、逆反応は起きない。また、上記は吸熱反応であるためコアの温度も下がり、熱による内部圧力も下がる。 $T > 10^9$  K では鉄の光分解が開始される。



ここで  $\gamma$  は光子を示す。この反応も吸熱反応であり、鉄コアの圧力勾配はますます小さくなり、やがて自己重力が圧力勾配を上回り鉄コアは重力崩壊を起こす。このとき、コアは位置による物質の流速の違いにより2層に分けられる。

- 内部コア：亜音速（音速以下）で収縮
- 外部コア：超音速（音速以上）で収縮

### 1.4.5 ニュートリノの閉じ込め

ニュートリノの平均自由行程は重力崩壊直前では、

$$l_{\nu_e} \sim \frac{1}{n\sigma} \sim 10^9 \text{ cm} \left( \frac{\rho}{10^{10} \text{ g/cm}^3} \right)^{-1} \left( \frac{\sigma}{10^{-42} \text{ cm}^2} \right)^{-1} \quad (1.4.7)$$

ここで  $n$  は反応相手（核子）の数密度、 $\sigma$  は弱い相互作用の断面積を示し、典型値を用いた。内部コアの半径は  $\sim 10^7 \text{ cm}$  のため、 $\rho \sim 10^{10} - 10^{11} \text{ g/cm}^3$  で同程度となり、自由に抜け出せなくなる。これをニュートリノの閉じ込めと呼ぶ。

次にニュートリノが逃げるタイムスケール  $t_{\nu_e}$  を考える。

$$N = \frac{R^2}{l_{\nu_e}^2}, \quad t_{\nu_e} = 3 \frac{l_{\nu_e}}{c} N \quad (1.4.8)$$

$$t_{\nu_e} = \frac{3R^2}{cl_{\nu_e}} \propto \rho \quad (1.4.9)$$

ここで  $N$  はニュートリノと物質の衝突回数を示す。これに対して、コアの重力崩壊のタイムスケールは自由落下で考えると

$$t_{\text{free}} \sim 1/\sqrt{G\rho} \propto \rho^{-1/2} \quad (1.4.10)$$

よって、重力崩壊が進むことで密度が上昇し  $\rho \sim 10^{11} - 10^{12} \text{ g/cm}^3$  に達すると2者のタイムスケールが同等となる。釣り合いの領域外ではニュートリノは外に逃げられるが、領域内ではニュートリノは外に逃げるができずコア内に閉じ込められる。この領域をニュートリノ球と呼ぶ。

ニュートリノ球内ではニュートリノの縮退が始まる。ここで起こる電子捕獲反応（原子核の中性子化）は



と、先ほどと異なりニュートリノが外に逃げないため逆反応が起きる。そして  $\beta$  平衡となり、中性子化が抑えられる。重力崩壊は密度が核密度  $\rho_0$  に達するまで続く。

### 1.4.6 コアバウンス

コアの密度が核飽和密度  $\rho_0$  を超えると、コアは急速に圧力を取り戻し、自己重力と競合してコアバウンスを引き起こす。これは、内側のコア付近に衝撃波を発生させる。また、発生時の衝撃波の位置はニュートリノ球より内側である。衝撃波は球対称に発生する。衝撃波通過後の領域では、超音速の落下運動のエネルギーが熱化する。すると原子核が核子に分解される。そこで電子捕獲反応が起こり、ニュートリノが放出される。ニュートリノ球の外でニュートリノが一気に放出され、これをニュートリノバースト、または中性子化にちなんで中性子化バーストと呼ぶ。コアバウンス時には、衝撃を受けなかったコアが原始中性子星（proton-neutron star: PNS）の形成を引き起こす。

### 1.4.7 衝撃波の失速

コアバウンス時に形成された衝撃波はすぐに崩壊したコアの外層を吹き飛ばすのではなく、一時的に停止する。（レビュー：Kotake et al. [2006]）衝撃波の発生当初のエネルギーは  $E_{\text{shock}} \sim \mathcal{O}(10^{52} \text{ erg})$  である。この膨大なエネルギーによって鉄コアが重力崩壊を引き起こす前の状態が再現され、同様の反応が起こる。すると衝撃波のエネルギーは外部コアを伝播中に次の物理現象発生によって損失する。特に鉄の光分解が大きく寄与する。

- 鉄の光分解
- 電子捕獲反応
- ニュートリノ放出によるエネルギー損失

これらの反応が衝撃波のエネルギーを使い果たし、衝撃波は失速し即時の爆発に至らず、コア内に定在する。

#### 1.4.8 衝撃波復活

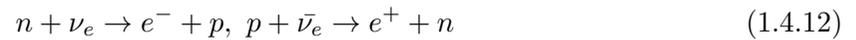
失速した衝撃波にエネルギーを取り戻させるメカニズムはまだ解明されていない。しかし数値シミュレーションを用いた研究が熱心に進められ、現在では主に2つのメカニズムモデルが有力である。

- ニュートリノ駆動メカニズム
- 磁場

本研究で用いる重力波はニュートリノ駆動メカニズムの数値シミュレーションから得られるものである。

##### ニュートリノ駆動メカニズムのおおまかな流れ

このメカニズムはニュートリノが外に逃げる際に運ぶエネルギーの一部を復活に使うというモデルである。衝撃波通過後の背面は、ニュートリノ放出による冷却と衝撃波背後のニュートリノ加熱によって冷却領域と加熱領域に分かれる。



冷却領域と加熱領域の境目に値する位置を gain 半径と呼ぶ。

ニュートリノ ( $\nu_e$ ) 球半径	~ 50	km
gain 半径	~ 80	km
衝撃波半径	~ 100-200	km
鉄コア半径	~ 1500	km

表 1.3: 衝撃波定在時の星の構造

ニュートリノ加熱が衝撃波のエネルギーを取り戻すためには、加熱率が重力エネルギーに勝る必要がある。そこで半径  $R$  における 1 核子あたりの加熱率と重力エネルギーの比較をすると、加熱率は

$$Q_\nu^+ = \frac{L_\nu \sigma(\epsilon_\nu) Y_n}{4\pi R^2} \quad (1.4.13)$$

$$\sim 30 \left( \frac{L_\nu}{10^{52} \text{erg s}^{-1}} \right) \left( \frac{\epsilon_\nu}{15 \text{MeV}} \right)^2 \left( \frac{R}{200 \text{km}} \right)^{-2} \left( \frac{Y_n}{1.0} \right) \left[ \frac{\text{MeV}}{\text{s} \cdot \text{nucleon}} \right] \quad (1.4.14)$$

であり、重力エネルギーは

$$-\frac{GM_{\text{NS}} m_u}{R} = -6.5 \left( \frac{M_{\text{NS}}}{1.4 M_\odot} \right) \left( \frac{R}{200 \text{km}} \right)^{-2} \left[ \frac{\text{MeV}}{\text{s} \cdot \text{nucleon}} \right] \quad (1.4.15)$$

となる。 $Q_\nu^+ \delta t >$  重力エネルギーとなるには、~0.2 秒の加熱が必要である。これにより、衝撃波はコアの重力束縛から逃れ爆発に至る。実際には加熱過程の逆反応が冷却に寄与するので、爆発のタイムスケールは 100msec ~ 1s と長くなる。この 1s の加熱を助けるための機構として、次に取り上げる SASI が挙げられる。

### 1.4.9 定常降衝撃波不安定性

ニュートリノ駆動型の超新星爆発では、失速した衝撃波は、ニュートリノ駆動対流や衝撃面を大域的に変形させる定常降着衝撃波不安定性 (standing accretion shock instability: SASI; Blondin et al. [2003]) を含む多次元流体不安定性の影響を受けやすいことが知られている。(Burrows and Vartanyan [2021], Foglizzo et al. [2015]) 図 1.4 は Kuroda et al. [2016] より引用した SASI のスナップショットである。この不安定性は、核の状態方程式や、親星のコンパクトさや回転などのシミュレーションの初期条件に依存する。重力波放射機構に関連する顕著な特徴として、SASI が完全に成長すると、原始中性子星のコアに時間的に一定ではない質量降着が発生することが挙げられる。この時間変調された質量降着は、原始中性子星の深部にまで浸透し、原始中性子星のコアの表面の歪みと運動の引き金となる。そこからまた、衝撃波の背後にある大域的な変形領域から、時間-周波数が約 100 Hz の SASI 周波数で特徴づけられる、大きな重力波が放射される可能性がある。また、SASI の発生は原始中性子星と降着衝撃波面の間を移流に起因しており、波が増幅しながら往復することによって発生する。(Mezzacappa et al. [2020], Kuroda et al. [2016], Andresen et al. [2017], [?], Shibagaki et al. [2021], Powell et al. [2021], Vartanyan and Burrows [2020], Vartanyan et al. [2019]) 本研究では、特に SASI を起因として放射される重力波に焦点を当て、Kuroda et al. [2016] によって開発されたモデルを議論する。図 1.5 は Kuroda et al. [2016] より引用した重力波の時間-周波数図である。数値シミュレーションから得られた重力波は、時間-周波数領域において SASI-mode をもち、その周波数帯は約 100 – 200 Hz である。これは、対流によって引き起こされる原始中性子星の表面 g-mode 振動が約 700 Hz であることと比べてかなり小さい値である。SASI 発生時のシミュレーションにおける原始中性子星の振る舞いの詳細は、Kawahara et al. [2018] が重力波解析を用いて調べている。さらに、Takeda et al. [2021] では、Hilbert-Huang transform を用いて SASI の発生を捉えることができるのか、さらにどの程度 SASI の性質を捉えることができるのかについて調べている。

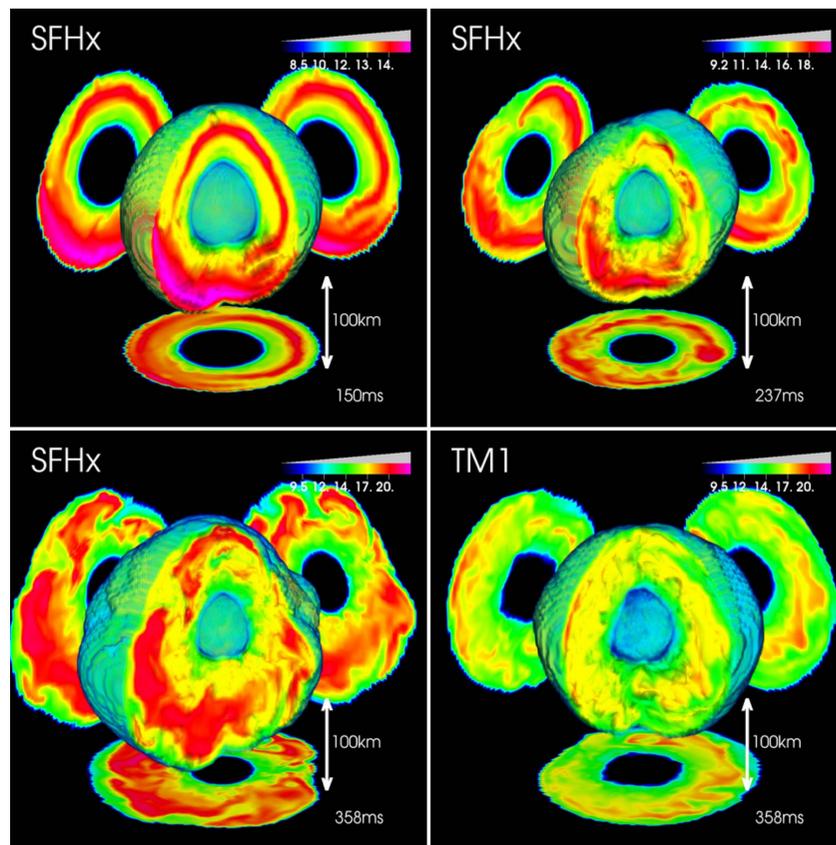


図 1.4: Kuroda et al. の重力崩壊型超新星爆発の 3D 数値シミュレーションにおけるエントロピー空間分布のスナップショットであり、SFHx の時系列画像 3 枚と TM1 の一枚である。Kuroda et al. [2016] より引用した。

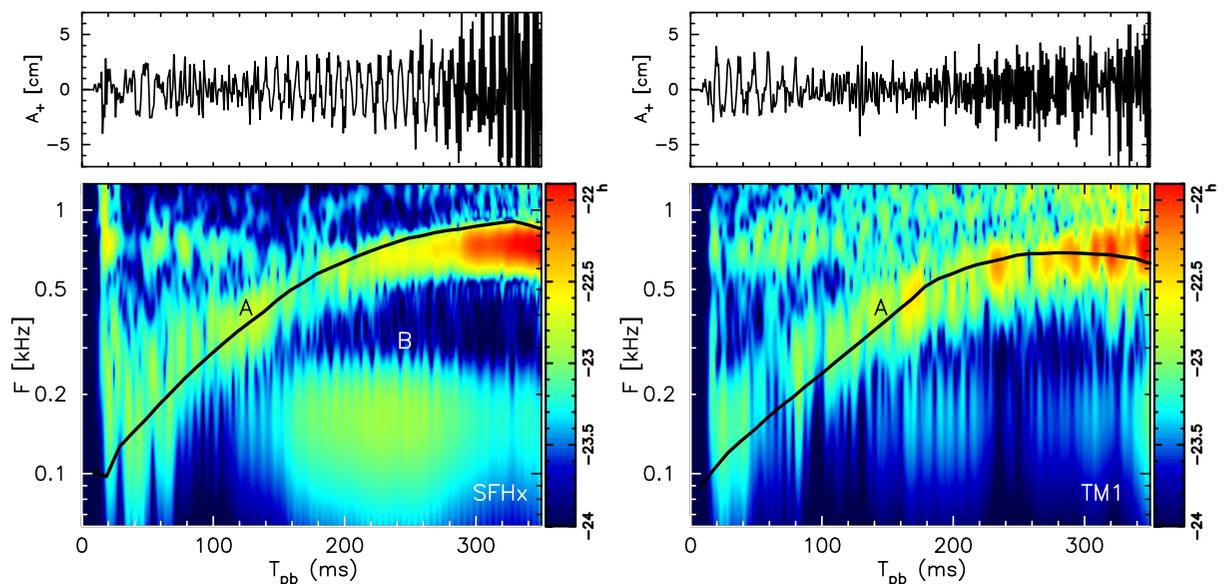


図 1.5: Kuroda et al. [2016] の重力崩壊型超新星爆発の数値シミュレーションモデルから得られた重力波の時間・周波数図。数値シミュレーションの名前は用いた状態方程式から名付けられており、左が SFHx であり、右が TM1 である。横軸はコアバウンスを  $T_{pb} = 0$  s としてシミュレーション内で経過した時刻を表し、計算は 0.35 s で打ち切られている。両者のモデルの違いは状態方程式の軟かさのみであり、より軟らかい SFHx には 100 – 200 Hz 付近の低周波数帯に強い反応があり、SASI に起因するものである。Kuroda et al. [2016] より引用した。A で示された黒色の実線は複数のシミュレーションから予想されたピーク周波数である (Müller et al. [2013])。

## 第2章

# Hilbert-Huang Transform

この章では Huang et al. [1998], WU and HUANG [2009], Cohen [1995], Takahashi et al. [2013], Sakai et al. [2017b], Kaneyama [2015] に倣って、Hilbert-Huang transform について説明する。Sec.2.2 で、IMF から解析的に瞬時周波数を得る時間・周波数手法である Hilbert スペクトル解析 (Hilbert spectrum analysis: HSA) について、Sec.2.3.1 では実信号を固有モード関数に分解する手法であるアンサンブル経験的モード分解 (Ensemble empirical mode decomposition: EEMD) について述べる。

### 2.1 瞬時周波数

Hilbert-Huang transform の説明に入る前に周波数の概念について確認する。

**一般的な周波数** 周期の逆数で定義される定数であり、波が単位時間あたりに振動する回数を示す

**瞬時周波数** 時間の関数  $f(t)$  として表記される、その時刻  $t$  における周波数の瞬間的な値を示す

瞬時周波数の導入は非定常な信号（スペクトルが時間変化する信号）を解析する上で非常に便利であり、その概念は古くから Cohen [1995] 等によって定義されている。これらと Hilbert-Huang transform で扱う瞬時周波数は定義が異なり、Hilbert-Huang transform で用いる瞬時周波数とは実信号を Hilbert 変換した複素信号の極形式から得られる位相  $\phi(t)$  の時間微分であり、固有モード関数に対して定義される。そして HHT の独創的な点は、解析対象の信号を、Hilbert 変換から物理的に意味のある瞬時周波数を得られる形式の複数のモードに、分解することである。それらのモードは固有モード関数 (intrinsic mode function: IMF) と呼ばれ、全データ内において零点周りで振動し、振幅も周波数も時間変化する信号である。モード分解の際には、事前に基底を設けたりデータを区切ったりしない為、時間分解能と周波数分解能のトレードオフの関係が存在しない。さらに、実信号の極値を用いる為、信号の全データにおける平均値など非定常信号では定義が容易でない統計量を無理やり用いる必要がない。

### 2.2 Hilbert Spectral Analysis

Hilbert スペクトル解析 (Hilbert Spectrum Analysis: HSA) (Cohen [1995]) は次の操作より、実信号から瞬時周波数を得る時間-周波数解析手法である。

$$z(t) = x(t) + i\mathcal{H}[x(t)] = a(t)e^{i\phi(t)} \quad (2.2.1)$$

$$a(t) = \sqrt{x(t)^2 + \mathcal{H}[x(t)]^2}, \quad \phi(t) = \tan^{-1} \frac{\mathcal{H}[x(t)]}{x(t)}, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \phi(t) \quad (2.2.2)$$

$z(t)$  は解析信号と呼ばれる複素数値をとる信号 (複素信号)、 $x(t)$  は  $z(t)$  の実部であり任意の実信号、 $\mathcal{H}[x(t)]$  は  $z(t)$  の虚部、 $\mathcal{H}[\cdot]$  は Hilbert 変換を表す。 $a(t)$  は瞬時振幅 (Instantaneous amplitude: IA)、 $\phi(t)$  は瞬時位相 (Instantaneous phase: IP)、 $f(t)$  は瞬時周波数 (Instantaneous frequency: IF) を表す。HHT では  $x(t)$  は Sec.2.3.1 より得られる IMF である。

### Hilbert 変換

Hilbert 変換は、 $x(t)$  と  $1/\pi t$  との畳み込み積分

$$\mathcal{H}[x(t)] = \frac{1}{\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t')}{t' - t} dt' \quad (2.2.3)$$

にて定義される。ここで、P は Cauchy の主値積分を表す。Hilbert 変換の性質を確認する為に、両辺を Fourier 変換すると

$$\mathcal{H}[x(t)] \equiv x * \frac{1}{\pi t} \quad (2.2.4)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{F}[x](f) \cdot \mathcal{F}\left[\frac{1}{\pi t}\right](f) \quad (2.2.5)$$

ここで  $*$  は畳み込み積、 $\xrightarrow{\mathcal{F}}$  は Fourier 変換の操作を表し、Fourier 変換の畳み込みの定理  $\mathcal{F}[x * y] = \mathcal{F}[x] \cdot \mathcal{F}[y]$  を用いた。

$$\frac{1}{\pi t} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i f t}}{t} = \begin{cases} e^{-i\pi/2} & (f > 0) \\ 0 & (f = 0) \\ e^{i\pi/2} & (f < 0) \end{cases} \quad (2.2.6)$$

さらに  $x(t)$  の Fourier 変換後の関数  $X(f)$  と符号関数  $\text{sgn}$  を用いて書き換えると、

$$\mathcal{H}[x(t)] \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f) \cdot (-i \text{sgn}(f)), \quad (2.2.7)$$

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f), \quad \frac{1}{\pi t} \xrightarrow{\mathcal{F}} -i \text{sgn}(f) = \begin{cases} -i = e^{-i\pi/2} & (f > 0) \\ 0 & (f = 0) \\ +i = e^{+i\pi/2} & (f < 0) \end{cases} \quad (2.2.8)$$

である。式 (2.2.8) の最後はオイラーの公式を用いた。よって、 $x(t)$  を Hilbert 変換することは、 $X(f)$  に対して

- $X(f)$  の正の周波数成分 ( $f > 0$ ) の位相を  $-\pi/2$  ずらす
- $X(f)$  の負の周波数成分 ( $f < 0$ ) の位相を  $+\pi/2$  ずらす
- $X(f)$  の非振動成分 ( $f = 0$ ) には作用しない
- $X(f)$  の振幅には作用しない

を施した  $\mathcal{H}[x(t)]$  を導くことである。すなわち自身に直交する成分への変換であり、複素共役を  $*$  で表すと、

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \mathcal{H}[x(t)]^* dt = 0. \quad (2.2.9)$$

また、Hilbert 変換を 2 回作用させると、正および負の周波数成分はそれぞれ  $-\pi$  と  $\pi$  だけ位相のズレが生じ、 $e^{\pm\pi} = -1$  より両者とも等しく  $\mathcal{H}[\mathcal{H}[x(t)]] = -x(t)$  となる。

以上の議論から Hilbert 変換は phase shift の性質をもつことが判明した。この時点で、 $x(t)$  は実数でも複素数でも成立する。次に、現実の観測から得られる実数値をとる信号へ応用できるよう実関数に対する Hilbert 変換の性質について述べる。Hilbert 変換は次のような性質をもつ。

- $x(t)$  が実関数のとき、 $\mathcal{H}[x(t)]$  も実関数である。  
 $x(t)$  が実関数のとき、 $X(f)$  と  $-i \operatorname{sgn}(f)$  は  $\pm f$  で互いに共役なことから  $-i \operatorname{sgn}(f)X(f)$  も同様である。
- $x(t)$  が正則関数<sup>\*1</sup>の実軸上の実部であるとき、 $\mathcal{H}[x(t)]$  は正則関数の虚部として一意に定まる。

実部と虚部の関係を調べるために、 $x(t)$  を実関数として  $\mathcal{H}[x(t)]$  を変形すると、

$$\mathcal{H}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)(-i \operatorname{sgn}(f))e^{2\pi ift} df \quad (2.2.10)$$

$$= \int_{-\infty}^0 iX(f)e^{2\pi ift} df + \int_0^{\infty} (-i)X(f)e^{2\pi ift} df \quad (2.2.11)$$

$$= -i \int_0^{\infty} [X(f)e^{2\pi ift} - X(-f)e^{-2\pi ift}] df \quad (2.2.12)$$

$$= \int_0^{\infty} \operatorname{Im} [2X(f)e^{2\pi ift}] df \quad (2.2.13)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im} [z(f)e^{2\pi ift}] df \quad z(f) = \begin{cases} 2X(f) & (f > 0) \\ 0 & (f \leq 0) \end{cases} \quad (2.2.14)$$

ここで、 $\operatorname{Im}[z] = (z - z^*)/2i$  と  $X(-f) = X(f)^*$  を用いた。同様に、 $x(t)$  は

$$x(t) = \int_0^{\infty} \operatorname{Re} [2X(f)e^{2\pi ift}] df = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} [z(f)e^{2\pi ift}] df \quad (2.2.15)$$

ここで、 $\operatorname{Re}[z] = (z + z^*)/2$  を用いた。よって、複素関数を  $z(t)$  とすると、

$$z(t) = x(t) + i\mathcal{H}[x(t)] \quad (2.2.16)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} z(f)e^{2\pi ift} df \quad \left( = \int_0^{\infty} 2X(f)e^{2\pi ift} df \right) \quad (2.2.17)$$

と表せる。よって Hilbert 変換を用いて実関数から複素関数を生成することが可能である。

## 解析信号

信号解析において、実信号から解析信号と呼ばれる信号を生成し、そこから信号の特徴を調査する手法がある。この解析信号について述べるため、まず実信号  $x(t)$  の平均周波数  $\langle f \rangle$  を導く。

$$\langle f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f|X(f)|^2 df \quad (2.2.18)$$

$$= \int_0^{\infty} f|X(f)|^2 df + \int_{-\infty}^0 f|X(f)|^2 df \quad (2.2.19)$$

$$= \int_0^{\infty} f|X(f)|^2 df + \int_0^{\infty} (-f)|X(-f)|^2 (-df) \quad (2.2.20)$$

$$= \int_0^{\infty} f|X(f)|^2 df - \int_0^{\infty} f|X(f)|^2 df \quad (2.2.21)$$

$$= 0 \quad (2.2.22)$$

ここで  $|X(-f)|^2 = |X(f)|^2$  を用いた。このように、どんな実信号でも平均周波数は常に 0 となり、信号の性質を調査する上で都合が悪い。そこで 0 でない周波数を得る為に、積分区間を  $[0, \infty)$  とする代わりに、周波数領域の区間  $(-\infty, 0)$  でのスペクトルの値を 0 にした複素信号を定義する。

$$z(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Z(f) = \begin{cases} 2X(f) & (f > 0) \\ 0 & (f \leq 0) \end{cases} \quad (2.2.23)$$

<sup>\*1</sup>  $x(t)$  が正則関数  $F(z)$  の実軸上の実部と仮定すると、 $F(z)$  が  $\exists k > 0, \exists M > 0, |z|^k |F(z)| < M$  for  $|z| \rightarrow \infty$  を満たすとき、その虚部は  $\mathcal{H}[x(t)]$  として一意に決まる

このような  $z(t)$  を  $x(t)$  の解析信号と呼ぶ。この形は先ほどの式 (2.2.14) で定義した  $Z(f)$  と同様であり、解析信号  $z(t)$  の定義には Hilbert 変換を用いることが有用である。よって、 $z(t)$  を極形式で表すと式 (2.2.1) であり、 $x(t)$  の解析信号  $z(t)$  から  $x(t)$  の瞬時振幅  $a(t)$  と瞬時位相  $\phi(t)$ 、そして瞬時周波数  $f(t)$  が定義される。

次に、 $x(t)$  の解析信号  $z(t)$  を生成するための条件を確認する。任意の振幅信号  $a(t)$  と位相信号  $\phi(t) = e^{i\phi(t)}$  が与えられた時、

$$a(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} A(f) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t)e^{2\pi ift} dt, \quad (2.2.24)$$

$$p(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} P(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\phi(t)} e^{2\pi ift} dt, \quad (2.2.25)$$

$$(2.2.26)$$

より、Fourier 変換の畳み込みの定理を用いて、

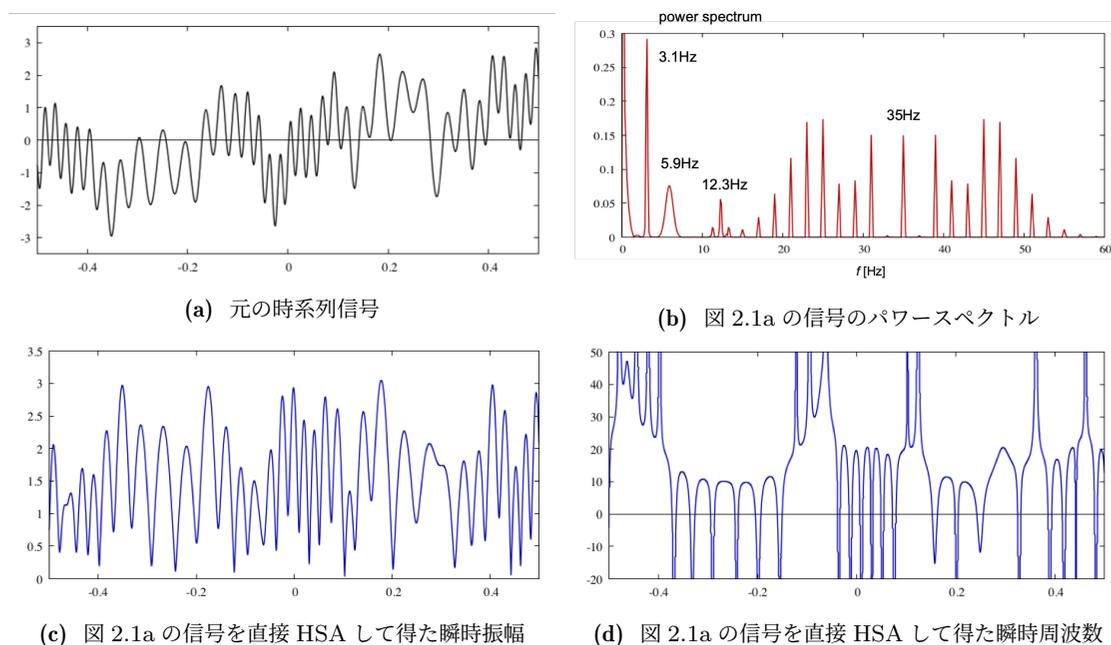
$$z(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Z(f) = \int_{-\infty}^{\infty} A(f-f')P(f') df' \quad (2.2.27)$$

となり、 $f \geq 0$  で  $Z(f) = 0$  ならば  $z(t)$  は解析信号となる。よって、どんな  $a(t)$ ,  $p(t)$  の組みであっても解析信号を生成されるわけではない (明らかに  $A(f)$ ,  $P(f)$  が全帯域に渡って分布している場合は不可能)。もし  $A(f)$  の帯域が  $-f_i < f < f_1$  に制限されているならば、 $A(f-f')$  より  $-f_1 < f-f' < f_1$  なので  $f'$  の範囲は  $f-f_1 < f' < f+f_1$  となる。この範囲において  $P(f) = 0$  であれば、 $Z(f) = 0$  となり、 $z(t)$  は解析信号となり得る。以上より、解析信号の条件は

- $A(f)$  の帯域が  $P(f)$  の帯域よりも低周波 ( $a(t)$  が  $e^{i\phi}$  よりもゆっくりとした変化)
- $A(f)$  の帯域と  $P(f)$  の帯域に重なりがなく分離できる

である。

最後に応用例として、複数のモードが混ざった信号の瞬時周波数と瞬時振幅を求める。図 2.1 により、信号から得た瞬時振幅と瞬時周波数は歪な振る舞いをすることが分かる。



**図 2.1:** 複数のモードが混合した信号の式 (2.2.1) による解析結果。原信号 (図 2.1a)、瞬時振幅 (図 2.1c)、瞬時周波数 (図 2.1d) の横軸は時間を表し単位は秒である。(図 2.1d) の縦軸の単位は Hz である。(図 2.1b) にて複数のピークが立っているようにモードが混合している信号をそのまま Hilbert 変換して瞬時振幅と瞬時周波数を求めると、物理的解釈が困難な結果を導くことがわかる。

これらを解析的に調べるために、次のような2つのモードの重ね合わせを考える。

$$h(t) = \alpha \cos(2\pi ft) + \beta \quad (2.2.28)$$

ここで、 $\alpha$ ,  $\beta$  は定数である。 $h(t)$  の Hilbert 変換は、

$$\mathcal{H}[h(t)] = \alpha \sin(2\pi ft) \quad (2.2.29)$$

であり、瞬時振幅と瞬時周波数は

$$a(t) = \alpha \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2} + 2\frac{\beta}{\alpha} \cos(2\pi ft)}, \quad (2.2.30)$$

$$f(t) = f \left[ 1 - \frac{\beta^2 + 2\alpha\beta \cos(2\pi ft)}{a^2(t)} \right] \quad (2.2.31)$$

と、2つのモードの成分が複雑に入り混じった値となり、物理的解釈が困難である。もし  $\beta = 0$  のように、実信号が単モードであれば、瞬時振幅と瞬時周波数は単モード成分のみの関数なため物理的解釈が容易となる。実際に信号解析で扱う信号、特に重力波信号においては、複数のモードが混合している場合が一般的であり、観測された信号に対して直接 Hilbert 変換を行うことは適切ではない。そこで、Hilbert-Huang transform では Sec.2.3.1 で述べる通り、IMF に抽出された信号を分解する。そして信号から抽出された IMF 毎の解析信号を生成することで、物理的解釈が容易な瞬時振幅と瞬時周波数を導く。これらは実信号から分解された信号から得られることから、局所的な瞬時振幅、瞬時周波数であると言える。

## 2.3 Ensemble Empirical Mode Decomposition

### 2.3.1 信号の固有モード関数への分解

実信号から IMF を得る方法は WU and HUANG [2009] が提案するアンサンブル経験的モード分解 (Ensemble Empirical Mode Decomposition: Ensemble EMD) に従う。Ensemble EMD は実信号の極値から得たエンベロップ平均を信号から差し引き、低周波数成分をふるい落とす操作である。その操作を繰り返すことで高周波数成分順に IMF を抽出する。

時系列信号を次のように分解する。

$$h(t) = \sum_{i=1}^{N_{\text{IMF}}} c_i(t) + r(t) = \text{Re} \left[ \sum_{i=1}^{N_{\text{IMF}}} a_i(t) e^{i\phi_i(t)} \right] + r(t) \quad (2.3.1)$$

ここで、 $h(t)$  は実信号、 $c_i(t)$  は零点周りで振動するモード、 $r(t)$  は残留物 (非振動モード)、 $N_{\text{IMF}}$  は IMF の数、 $a_i(t)$  と  $\phi_i(t)$  はそれぞれ振幅と位相を表す。 $r(t)$  は実信号の長時間で緩やかな推移成分であり、振動中心の描く軌道を示しフーリエ級数における定数項 (直流成分) のようなものである。

#### 経験的モード分解

経験的モード分解 (Empirical mode decomposition: EMD) は信号の極値のみを必要とするため、平均などを厳密に定義することが容易でない非定常な信号 (スペクトルが時間変化) を解析することが可能となる。信号の極値をとり、極大値と極小値のエンベロップの平均を計算し極値をとった信号から差し引く操作を、差し引いた後の信号が零点回りで振動する波になるまで繰り返す。この時の閾値の設定は、緩ければ欲しい波の条件を満たさないが厳しすぎると振幅の時間変化を禁止する条件となる為信号に合わせて適宜設定しなければならない。こうして最初に取り出された零点回りで振動する波を1番目の固有モード関数、IMF1と呼ぶ。IMF1を取り出す前の信号から IMF1 を差し引いて

残った信号が振動していれば同様の操作を繰り返し、IMF2 とする。取り出す IMF の個数は、最後に振動しない信号になるまで、もしくは物理的に必要な周波数帯までである。各 IMF の周波数帯は HHT のパラメータに応じて変化するので、毎回確認が必要である。瞬時周波数を求めるか、IMF のパワースペクトルをとることで確認できる。

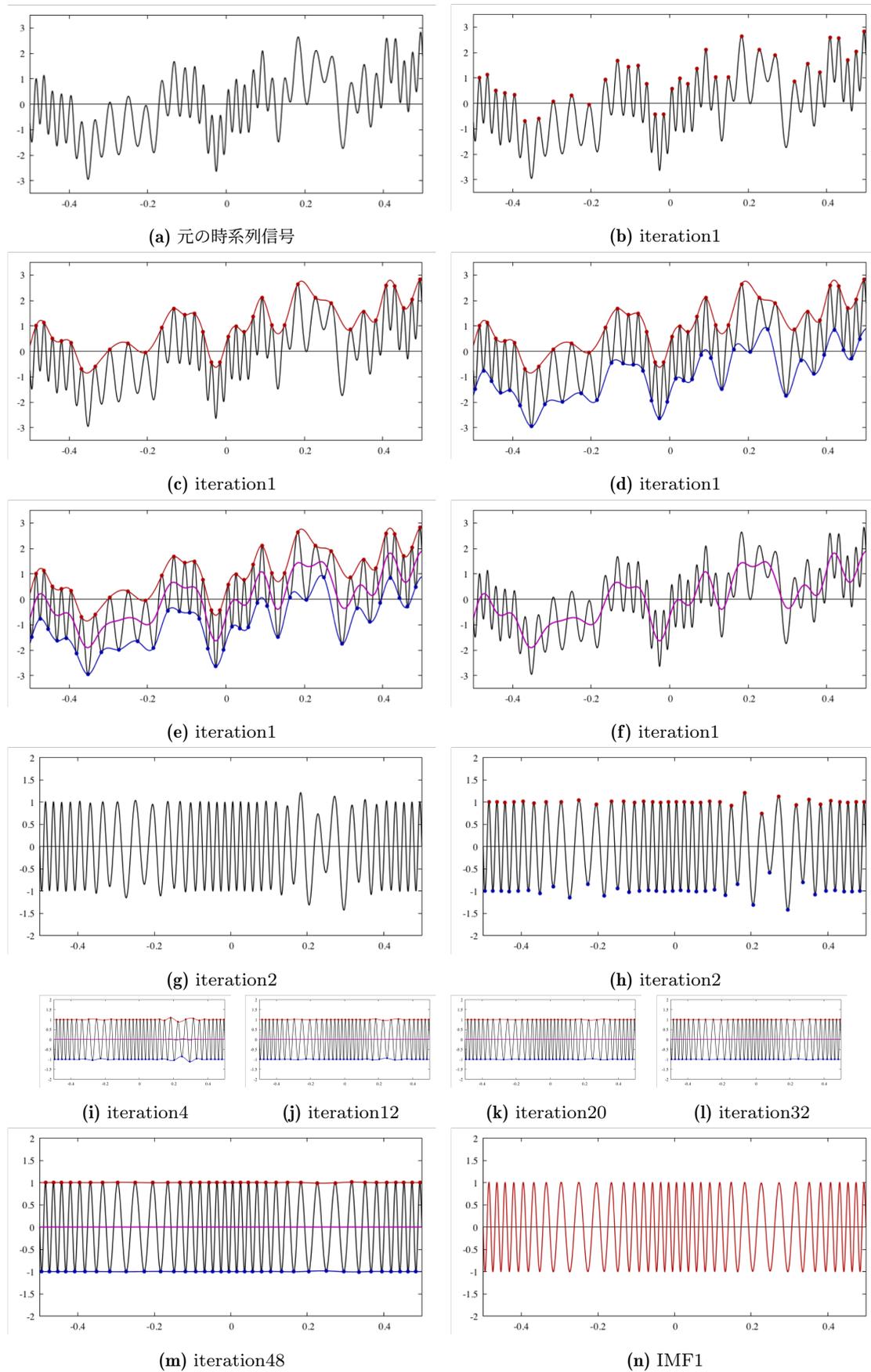


図 2.2: 時系列信号から EMD を用いて IMF1 を抽出する流れの一部抜粋。

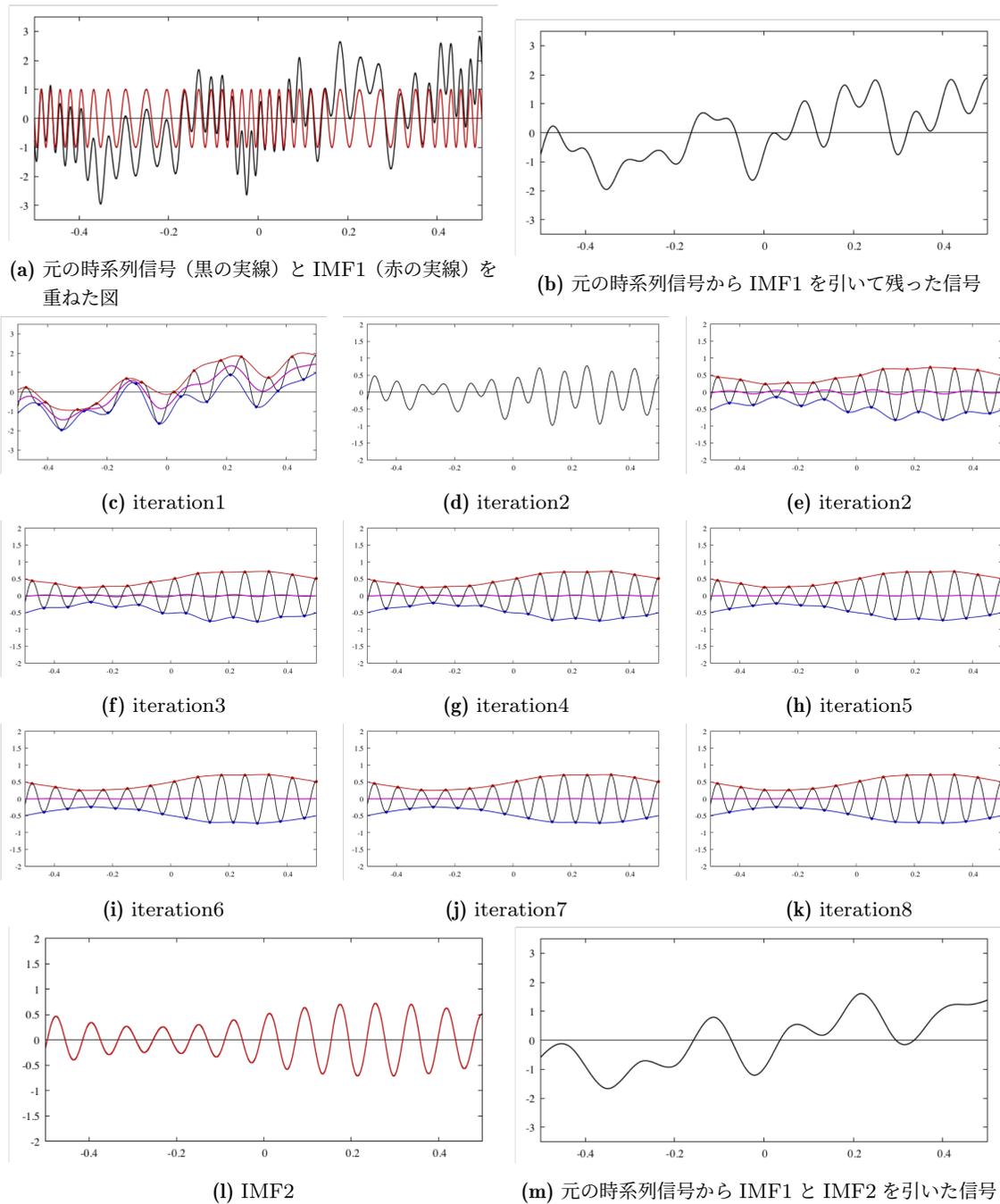


図 2.3: IMF2 を抽出する流れ。

短時間フーリエ変換との比較は図 2.4 である。

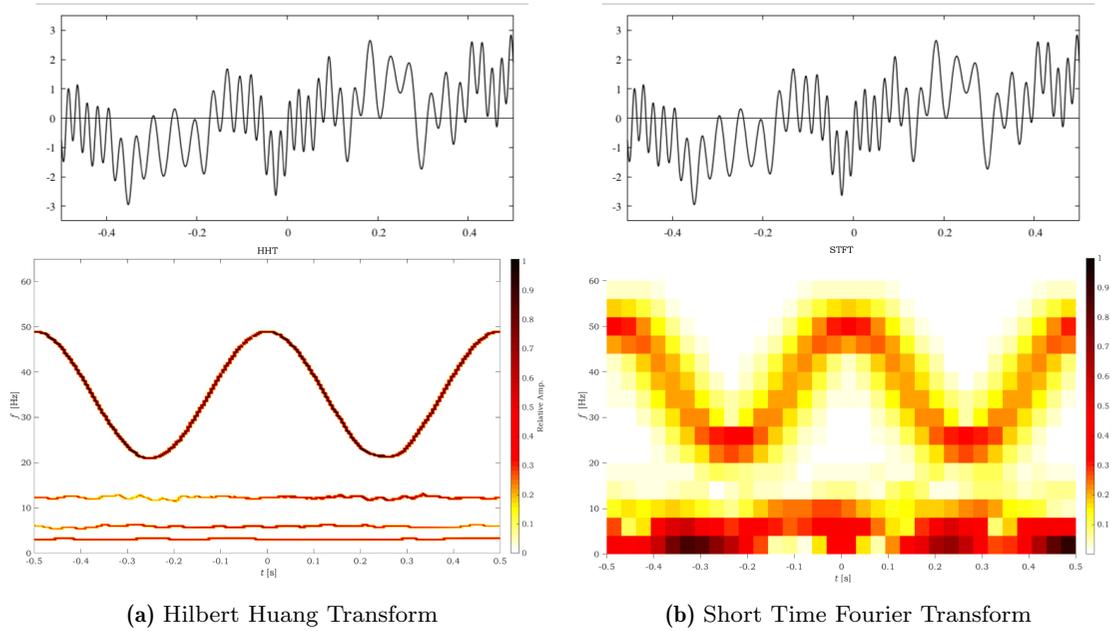


図 2.4: 解析手法による時系列信号の時間周波数図の違い。上段の時系列信号は左右同じものであり、下段はそれぞれ HHT と STFT によって作成された時間-周波数図である。

### アンサンブル経験的モード分解

アンサンブル経験的モード分解 (Ensemble Empirical mode decomposition: Ensemble EMD) は EMD の欠点を解消したモード分解手法である。信号の標準偏差の定数倍の標準偏差をもつホワイトガウス雑音を乱数の種を変えて多数用意し、それぞれを信号と重ねる。次にそれぞれに対して同じ閾値を用いて EMD を行い IMF<sub>s</sub> を得る。そして番号毎に IMF の平均をとったものを Ensemble EMD から得られる IMF<sub>s</sub> とする。

$$IMF_i = \frac{1}{N_{eemd}} \sum_{l=1}^{N_{eemd}} IMF_{i_{w_l}}, \quad (i = 1, \dots, N_{IMF}) \quad (2.3.2)$$

この操作により、EMD で多発していたモード分裂やモード混合の問題が軽減される。図 2.5 は Ensemble EMD を計算する工程を示した。

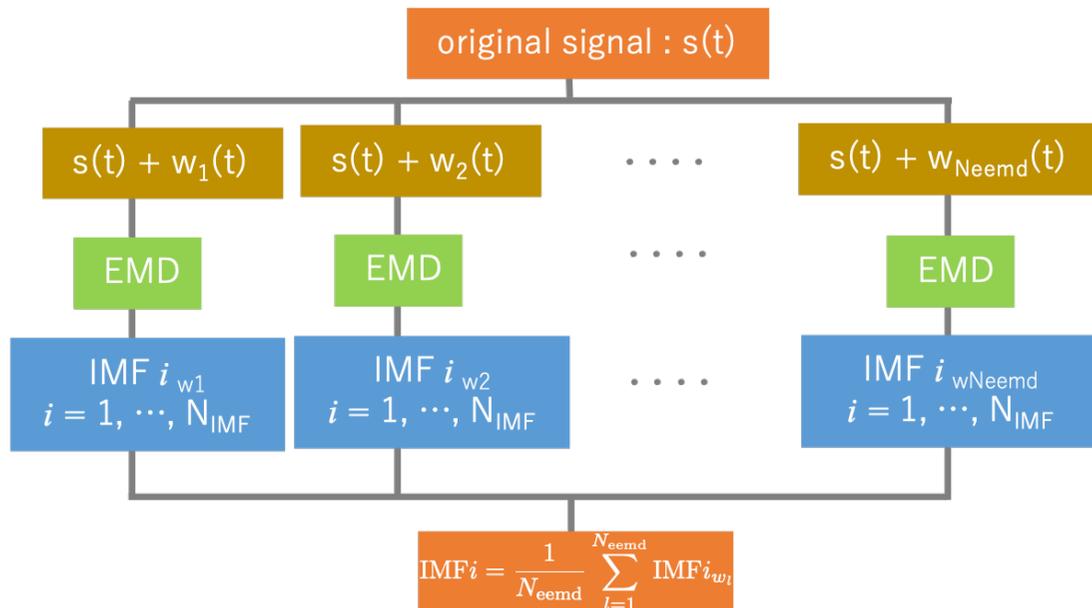


図 2.5: Ensemble EMD の流れ。

## 2.4 固有モード関数の時間周波数空間でのクラスタリング

観測データに対して経験的モード分解 (Empirical mode decomposition: EMD) を行なって得られる固有モード関数 (Intrinsic mode function: IMF) は、IMF1 が最も高い周波数成分をもち、IMF2、IMF3、... と番号が大きくなるにつれて低い周波数帯域をもつ。解析する信号が急激に時間変動する周波数モードをもつ場合、信号は複数の IMF にモード分裂を起こす。そのような信号の例として、重力崩壊型超新星爆発からの重力波の g-mode や、コンパクト天体連星合体からのインスパイラルから合体までの重力波が挙げられる。ここでは、この問題の解決方法の1つとして Son et al. [2021] によって提案された、時間-周波数領域で大きい瞬時振幅の値をもつ瞬時周波数を抽出し、それらを時間-周波数領域でクラスタリングする手法について述べる。Son et al. [2021] は「EtaGen」と名付けられている。

### 2.4.1 過剰な瞬時振幅をもつ時刻の推定手法

時間-周波数領域で顕著な成分の瞬時周波数を抽出するために、信号雑音比に閾値を設ける。信号雑音比 (signal-to-noise ratio: SNR) は突発天体からの重力波のパワーの平方根と重力波検出器雑音の標準偏差の比とする。SNR を推定するために、重力波検出器雑音の標準偏差を推定する。重力波検出器データ  $s(t)$  は、天体现象からの重力波  $h(t)$  と重力波検出器雑音  $n(t)$  の重ね合わせ  $s(t) = h(t) + n(t)$  とする。重力波検出器雑音の標準偏差  $\sigma_n$  は式 (2.4.1) から推定する。

$$\sigma_n = \gamma \text{MAD}[s(t)] = \gamma \text{median}[|s(t) - \text{median}[s(t)]|] \quad (2.4.1)$$

$\text{med}[s(t)]$  は  $s(t)$  の中央値を表す。MAD[ $s(t)$ ] は  $s(t)$  の中央絶対偏差 (Median Absolute Deviation: MAD) を表し、データ  $s(t)$  と中央値の差分の絶対値をとったデータ  $|s(t) - \text{median}[s(t)]|$  の中央値である。中央絶対偏差は中央値からの広がりを表す。平均が 0、分散が 1 の標準正規分布の時、係数  $\gamma \sim 1.48$  となる。中央絶対偏差は標準偏差よりも外れ値の影響を受けづらい利点があるため、中央絶対偏差から標準偏差を推定した。

瞬時振幅の過剰な時間区間を導出する。

まず、それぞれの IMF の瞬時振幅に対して値が小さいデータの切り捨てを行う。瞬時振幅のカットオフ  $\sigma_j$  を次のように設ける。

$$\sigma_j := \min\{\sigma_n, \text{MAD}[c_j(t)]\} \quad (2.4.2)$$

$c_j(t)$ , ( $j = 1, \dots, N_{\text{IMF}}$ ) は  $j$  番目の IMF を表す。このとき、カットオフ以上の値をもつ瞬時振幅が連続している時間帯を 1 つのクラスターとする。 $j$  番目の IMF の瞬時振幅に対して、過剰な瞬時振幅の値が連続したクラスターが  $N_k$  個得られるとする。図 2.6 は Son et al. [2021] から引用した。細い青色の点線が IMF であり、細い緑色の実線は瞬時振幅であり、赤色の破線は瞬時振幅のカットオフの値である。瞬時振幅がカットオフ以上の値を持つ時間帯の IMF と瞬時振幅をそれぞれ太い青色の点線と太い緑色の実線で表している。図 2.6 の 2 段目にある IMF2 の場合、クラスターは 4 個である。

次に、クラスターの両端の時刻に最も近い IMF の極値が位置する時刻をそれぞれ開始時刻  $t_s$  と終了時刻  $t_e$  とする。 $j$  番目の IMF の  $k$  番目のクラスターの SNR を次の式を用いて計算する。

$$\rho_{j,k} = \frac{1}{\sigma_n} \left[ \int_{t_s}^{t_e} |c_j(t)|^2 dt \right]^{1/2} \quad (2.4.3)$$

なお、式 (2.4.3) で用いた SNR の定義は、Stroeer et al. [2009] で定義された SNR と無矛盾である。 $\rho_{j,k}$  の値が任意の閾値  $T$  以上の場合、クラスターとして保持する。

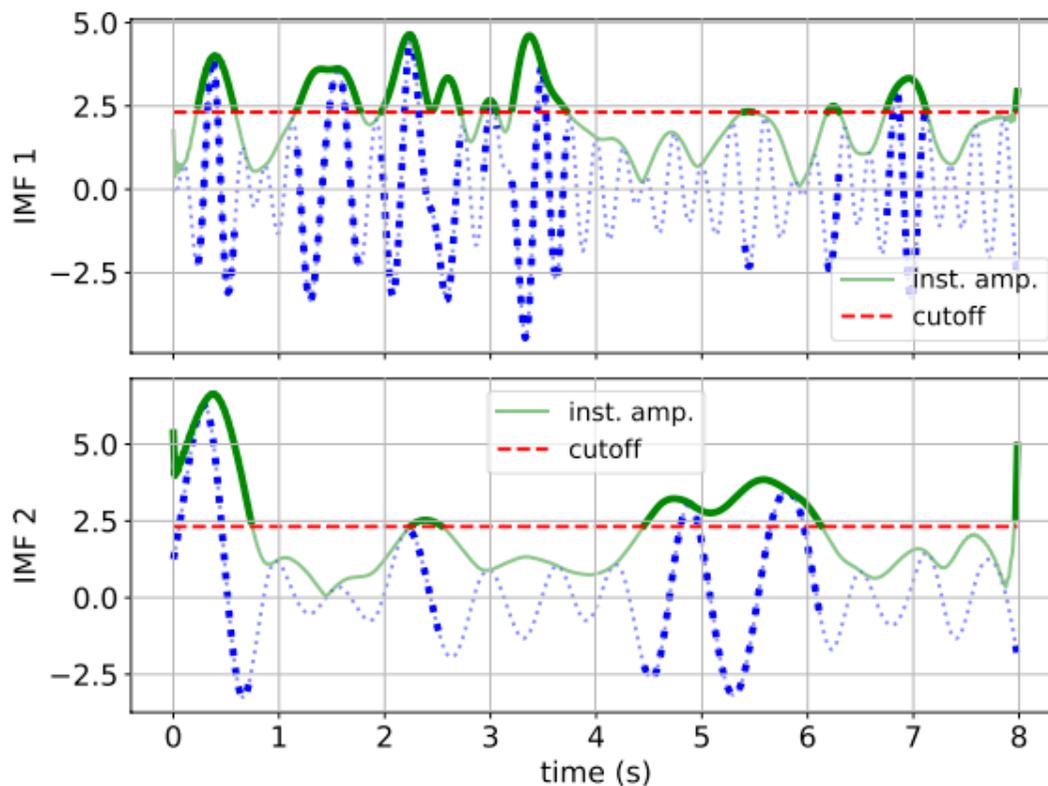


図 2.6: 瞬時振幅の過剰な時刻を求める手法を説明するための図。細い青色の点線が IMF、細い緑色の実線は瞬時振幅、赤色の破線はカットオフ (式 (2.4.3)) の値である。瞬時振幅がカットオフ以上の値を持つ時間帯の IMF と瞬時振幅をそれぞれ、太い青色の点線と太い緑色の実線で表している。2 段目にある IMF2 の場合、クラスターは 4 個である。Son et al. [2021] から引用した。

## 2.4.2 時間-周波数領域でのクラスタリング手法

先ほど求めたクラスターに対して、さらに時間-周波数領域でクラスタリングを行う。さきほど求めたクラスターの時間-周波数領域での位置を定義する。まず、時刻の最小値と最大値は、クラスターの開始時刻と終了時刻とする。周波数の最小値と最大値は、クラスターの開始時刻と終了時刻の間の時刻における、最小の瞬時周波数の値と最大の瞬時周波数の値とする。時間-周波数図上では、これら 4 点で囲われた領域がクラスターに該当する。図 2.7 は Son et al. [2021] から引用したイメージ図である。時間-周波数空間上で、重なっているクラスターはまとめて 1 つのクラスターとする。イメージ図では、さきほどの手法で 10 個のクラスターを得て、時間-周波数領域でのクラスタリングによって 4 個のクラスターを得ている。クラスター 1 のような、どのクラスターとも重なりがないクラスターは単独でクラスターとして認定される。クラスター 2,3,4 は時間-周波数領域で重なっているため、まとめて 1 つのクラスターとして認定される。このとき、クラスター 3 とクラスター 4 だけに注目すると時間-周波数領域での重なりはないが、それぞれ同じクラスター 2 とかさなっているため、同じクラスターとする。

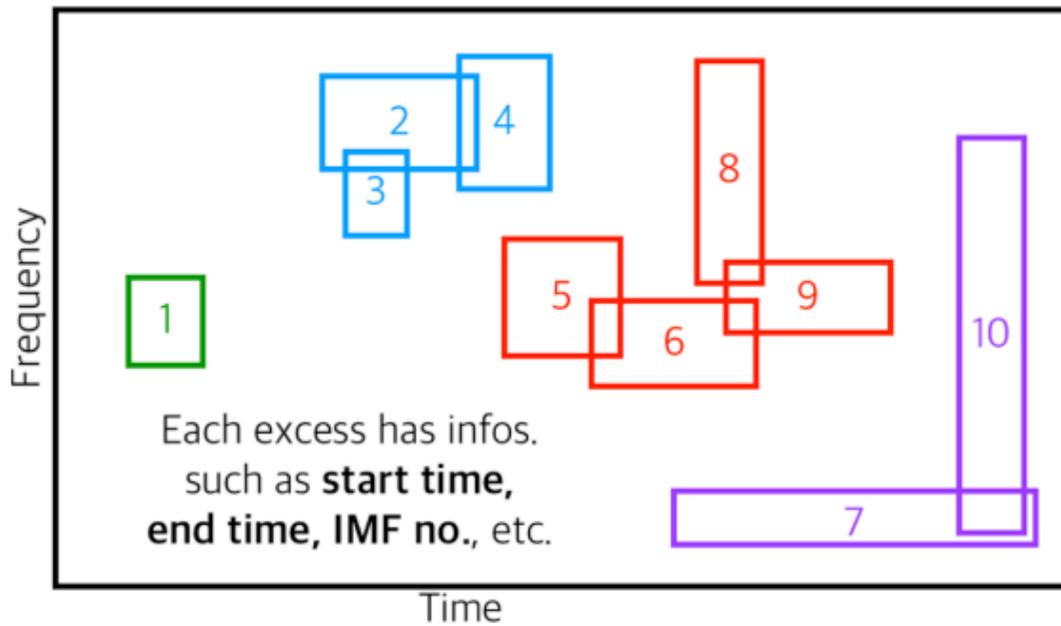


図 2.7: 時間-周波数領域でのクラスタリングを説明するためのイメージ図。Son et al. [2021] から引用した。

時間-周波数領域でのクラスタリング後のクラスターを  $X(t)$  とする。図 2.7 のクラスター 7 と 10 をクラスタリングする場合、クラスター 7 の開始時刻から終了時刻までの IMF と、クラスター 10 の開始時刻から終了時刻までのデータを足し合わせる。クラスターの開始時刻と終了時刻は、クラスタリングに用いたクラスターの開始時刻の最小値  $\min\{t_s\}$  と終了時刻の最大値  $\max\{t_e\}$  を用いる。クラスター 7 と 10 の場合は、 $X(t)$  の開始時刻  $T_s$  はクラスター 7 の開始時刻であり、 $X(t)$  の終了時刻  $T_e$  はクラスター 10 の終了時刻となる。 $X(t)$  は、クラスター 7 とクラスター 10 が重なっている時刻では、これら 2 つの IMF が足し合わされた値をもつ。このようにして再構成された  $X(t)$  の SNR を次の式のように定義する。

$$\rho = \frac{1}{\sigma_n} \left[ \int_{T_s}^{T_e} |X(t)|^2 dt \right]^{1/2} \quad (2.4.4)$$

### 2.4.3 手法の評価

EtaGen を重力波イベント検出用のソフトウェアとして用いる場合、事前に閾値を決定する必要がある。ここでは、ホワイトガウス雑音と重ね合わせたサインガウス波形に対する、実装したソフトウェアの性能を評価する方法について述べる。ホワイトガウス雑音のみのデータと、ホワイトガウス雑音にサインガウス波を重ね合わせたデータを 1000 個ずつ用意し、サインガウス波を抽出できたか調べる。便宜上ホワイトガウス雑音のみのデータを N データ、サインガウス波とホワイト雑音を重ね合わせたデータを S データとして、次の 4 つの量を定義する。

$$TP = (\text{S データを正しく S データと判断した回数}) \quad (2.4.5)$$

$$TN = (\text{N データを正しく N データと判断した回数}) \quad (2.4.6)$$

$$FP = (\text{N データを誤って S データと判断した回数}) \quad (2.4.7)$$

$$FN = (\text{S データを誤って N データと判断した回数}) \quad (2.4.8)$$

$$(2.4.9)$$

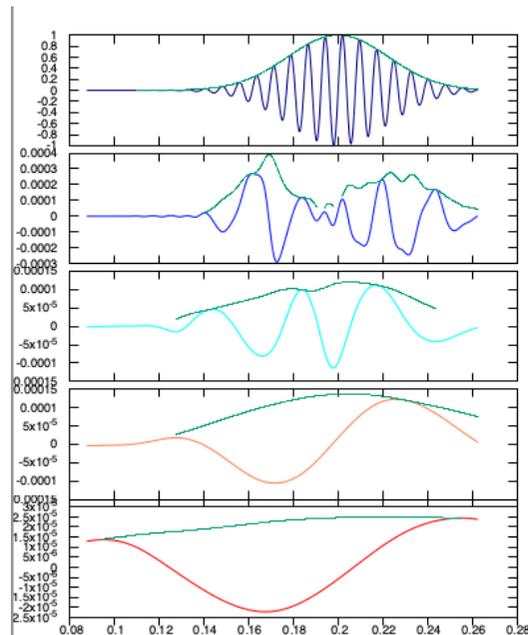
TP, TN, FP, FN はそれぞれ、true positive, true negative, false positive, false negative のことを指す。これらの量から、偽陽性率 (false positive rate: FPR)、再現率 (recall: R)、適合率 (precision: P)、

F 値 (F-measure:F) を次のように定義する。

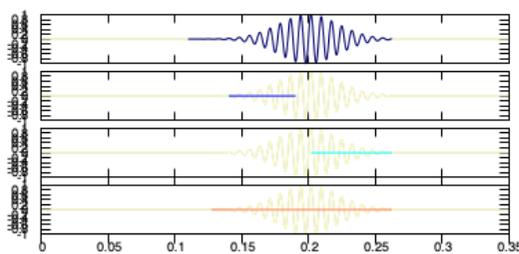
$$\text{FPR} = \frac{\text{FP}}{\text{TN} + \text{FP}}, \text{R} = \frac{\text{TP}}{\text{TP} + \text{FN}}, \text{P} = \frac{\text{TP}}{\text{TP} + \text{FP}}, \text{F} = \frac{2\text{R} \cdot \text{P}}{\text{R} + \text{P}} \quad (2.4.10)$$

再現性 R は、本来 S データであるものを、正しく S データと判断した割合を表す。適合率 P は、S データと判断した結果のうち、正しく S データであった割合を表す。再現率 R は S データをどの程度見逃すかという指標であり、適合率 P は判定にどれだけ正当性があるかの指標である。F 値は再現率 R と適合率 P の調和平均であり、F 値の最大値が最適な閾値の指標となる。横軸に偽陽性率 FPR、縦軸に再現性 R をとって、閾値の変化による FPR と R の変化を示した図は、ROC 曲線 (receiver operating characteristic curve) と呼ばれる。FPR と R はトレードオフの関係にあり、誤検出を減らすために閾値を高くすると S データの見逃しが増え、S データの見逃しを減らすために閾値を低くすると誤検出が増える。ROC 曲線の下側面積が大きいほど、性能が高いと言える。重力波検出器の観測期間中に自動で最新のデータを解析して天体現象からの重力波イベントを検出する場合、これらの方法によって閾値を決定することができる。本論文の後の章では、見つかった重力波イベントに対しての解析を前提としており、閾値は任意の値を何度か試せる場合を想定しているため、F 値を用いて閾値の決定は行っていない。

図 2.8 はノイズなしのサインガウス波形を解析した結果である。元のサインガウス波形よりも短い時間区間になっていることから、振幅が大きい領域のみ再構成されることがわかる。また、IMF2-5 へモード分裂が起きており、それらがクラスターとして現れている。



(a) IMF1-5 とカットオフ以上の振幅区間。開始時刻と終了時刻を極値に調整している。



(b) それぞれのクラスターの時系列表示

図 2.8: サインガウス信号を閾値 8 で検出した結果。図 2.8b のクラスターの詳細は表 2.1 に記載している。

再構成した波形がどれだけ元の波形を再現できているかを確認するために、次のピアソンの相関係数 (Pearson's correlation coefficient) を用いた。

$$r = \frac{cov(x, y)}{\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y} = \frac{\frac{1}{n-1} \sum (x_i - \hat{x})(y_i - \hat{y})}{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (x_i - \hat{x})^2} \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (y_i - \hat{y})^2}} \quad (2.4.11)$$

ここで  $\hat{\sigma}_x$  はデータ  $x$  の標本分散、 $\hat{x}$  はデータ  $x$  の平均、 $n$  はデータ数、 $cov(x, y)$  はデータ  $x, y$  の共分散を表す。

表 2.1: サインガウス信号を閾値 8 で検出して得られたクラスター (図 2.8) の情報。

SNR	開始時刻	終了時刻	ピーク周波数	元の波形との相関係数
$4.6 \times 10^4$	$1.0 \times 10^{-1}$	$2.6 \times 10^{-1}$	$1.3 \times 10^2$	$9.9 \times 10^{-1}$
$1.1 \times 10^1$	$1.4 \times 10^{-1}$	$1.9 \times 10^{-1}$	$5.0 \times 10^1$	$-1.4 \times 10^{-2}$
$1.0 \times 10^1$	$2.0 \times 10^{-1}$	$2.6 \times 10^{-1}$	$5.6 \times 10^1$	$1.9 \times 10^{-2}$
9.2	$1.2 \times 10^{-1}$	$2.8 \times 10^{-1}$	7.7	$-6.0 \times 10^{-5}$

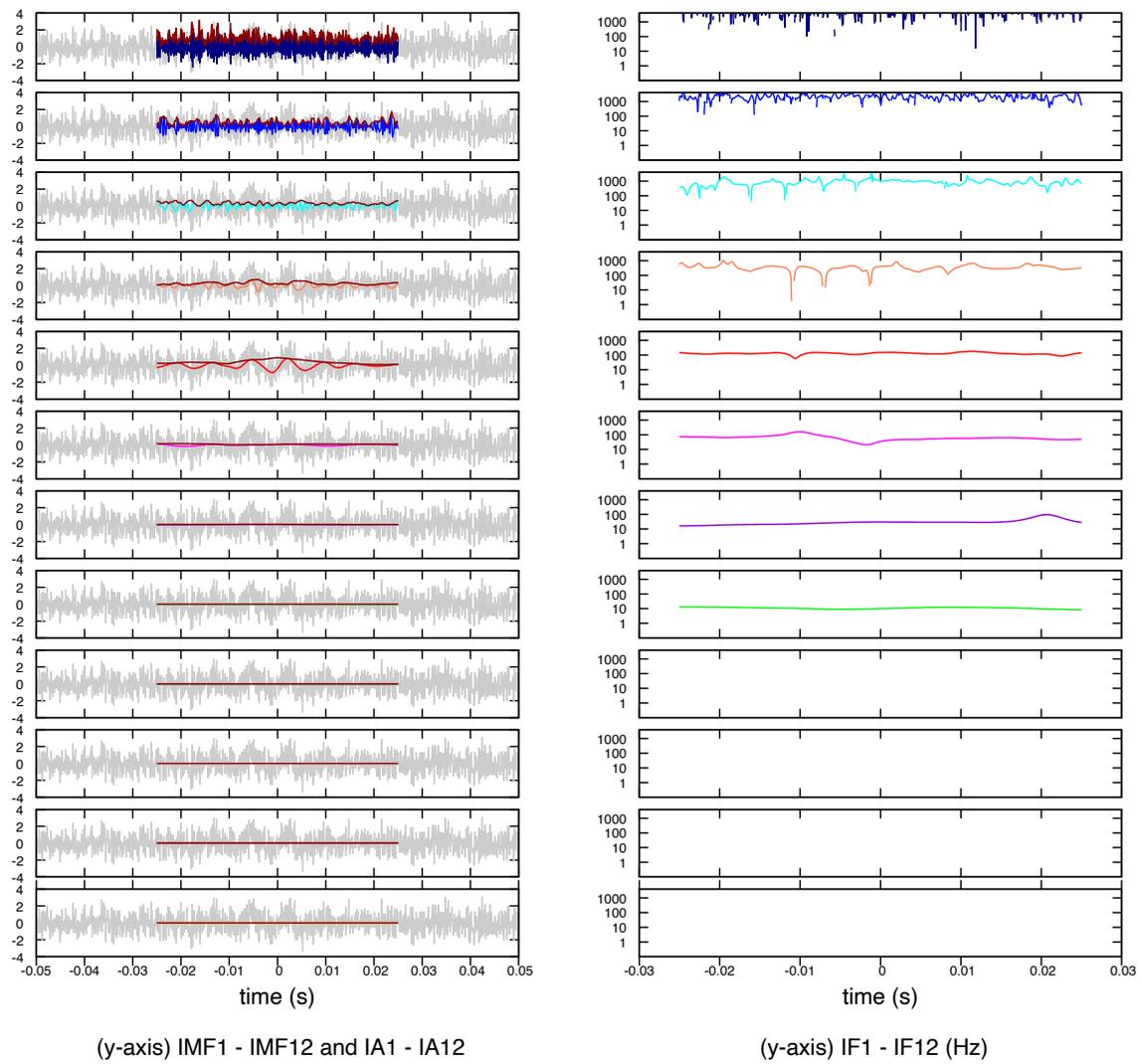
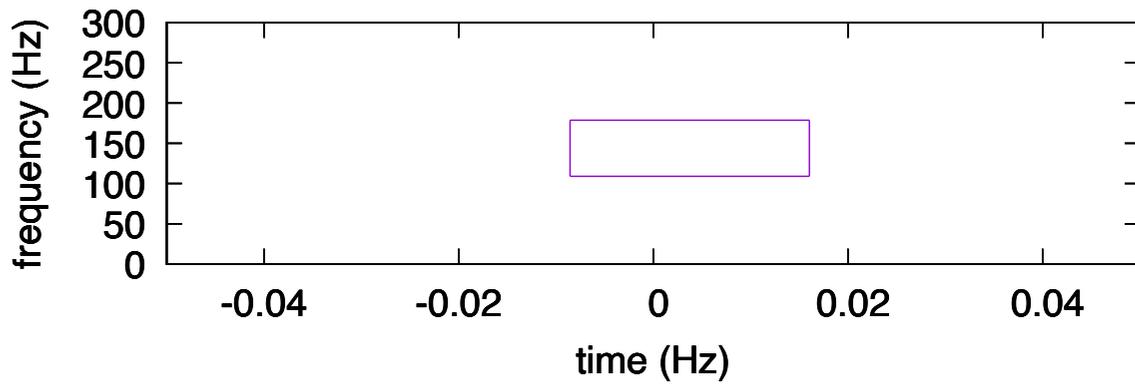
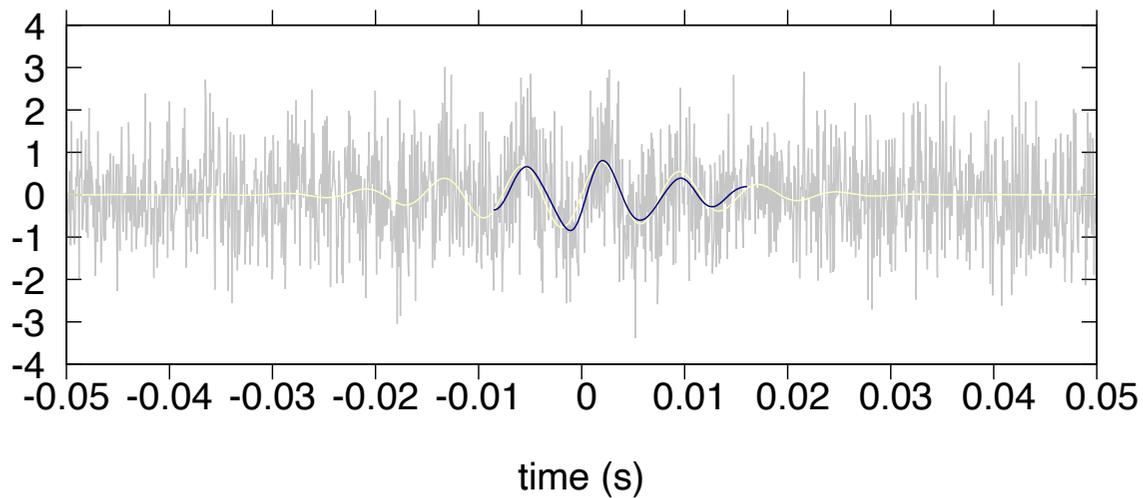


図 2.9: 周波数一定の sine-gauss 波形にホワイトガウス雑音を足した信号に Hilbert-Huang transform を行なって得られた図

図 2.9 はサインガウス波にホワイトガウス雑音を重ねた信号に Hilbert-Huang transform を用いて得られた IMF と瞬時振幅、瞬時周波数である。これらを用いて波形を再構成した結果が図 2.10 である。灰色の実線が Hilbert-Huang transform を元の波形であり、黄色の実線が雑音に重ね合わせたサインガウス波形、青色の実線が再構成した波である。



(a) イベントの時間-周波数空間上での分布



(b) 検出されたイベントの時系列データ

図 2.10: EtaGen を sine-gauss 波形に適用した結果

乱数の種を変えて多数用意した試験波形（サインガウス波形+ホワイトガウス雑音）を解析して描いた ROC 曲線が図 2.11 の左の図である。右の図は横軸はクラスターの SNR の評価に用いた閾値  $T$  であり、縦軸は、F 値、再現性 R、適合率 P、偽陽性率 FPR の閾値に対する変化を示した。

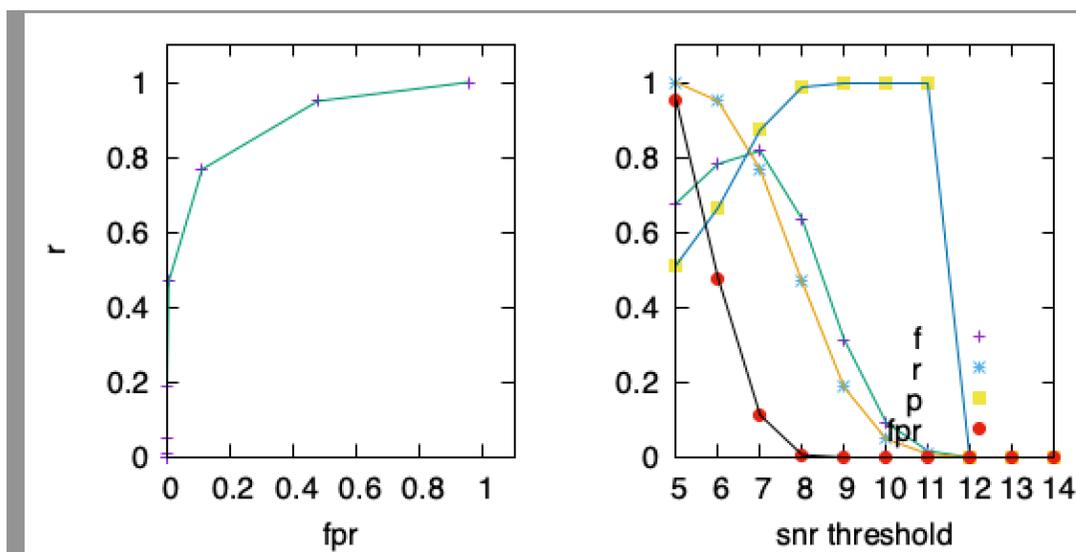


図 2.11: ROC 曲線

## 2.5 Stacked Hilbert-Huang Transform

この章では、2022年に提案された Stacked Hilbert-Huang Transform Hu et al. [2022] の実装内容について説明する。Stacked HHT とは、seed を変えたホワイトガウスノイズと信号を重ね合わせた波形をそれぞれ HHT して瞬時振幅と瞬時周波数を導出し、それらを時間-周波数空間で積み上げることで時間-周波数図を生成する手法である。図 2.12 はアルゴリズムを表しており、Hu et al. [2022] から引用した。積み上げ方は、まず時間と周波数を任意の時間幅と周波数幅で区切り、時間-周波数空間上でグリッドを生成する。次に瞬時周波数の各時刻の値に該当するますを決定する。そのまは瞬時周波数と同時刻の瞬時振幅の値をもつ。それを全ての瞬時周波数と瞬時振幅に対して行い、まは瞬時振幅の値が足されていく。これにより、一貫性のないノイズの影響は薄れ、重力波信号が強調されて可視化される。stacked HHT では積み上げる際に時間-周波数空間上でグリッドを生成するため、最終的に得られる結果は画像データであり、時系列データである瞬時周波数等は得られない。

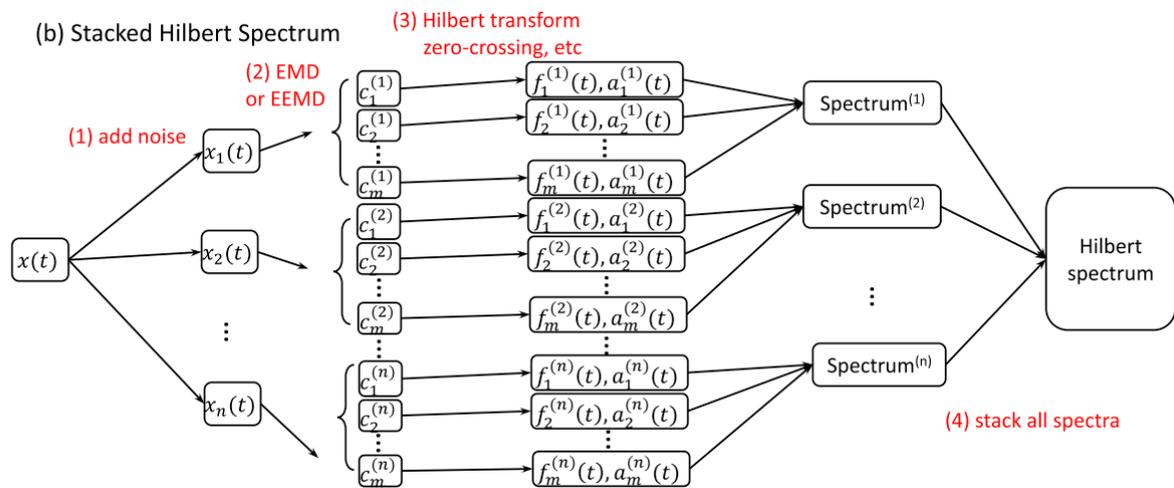


図 2.12: stacked Hilbert-Huang transform のアルゴリズムを説明した図。Hu et al. [2022] から引用した。

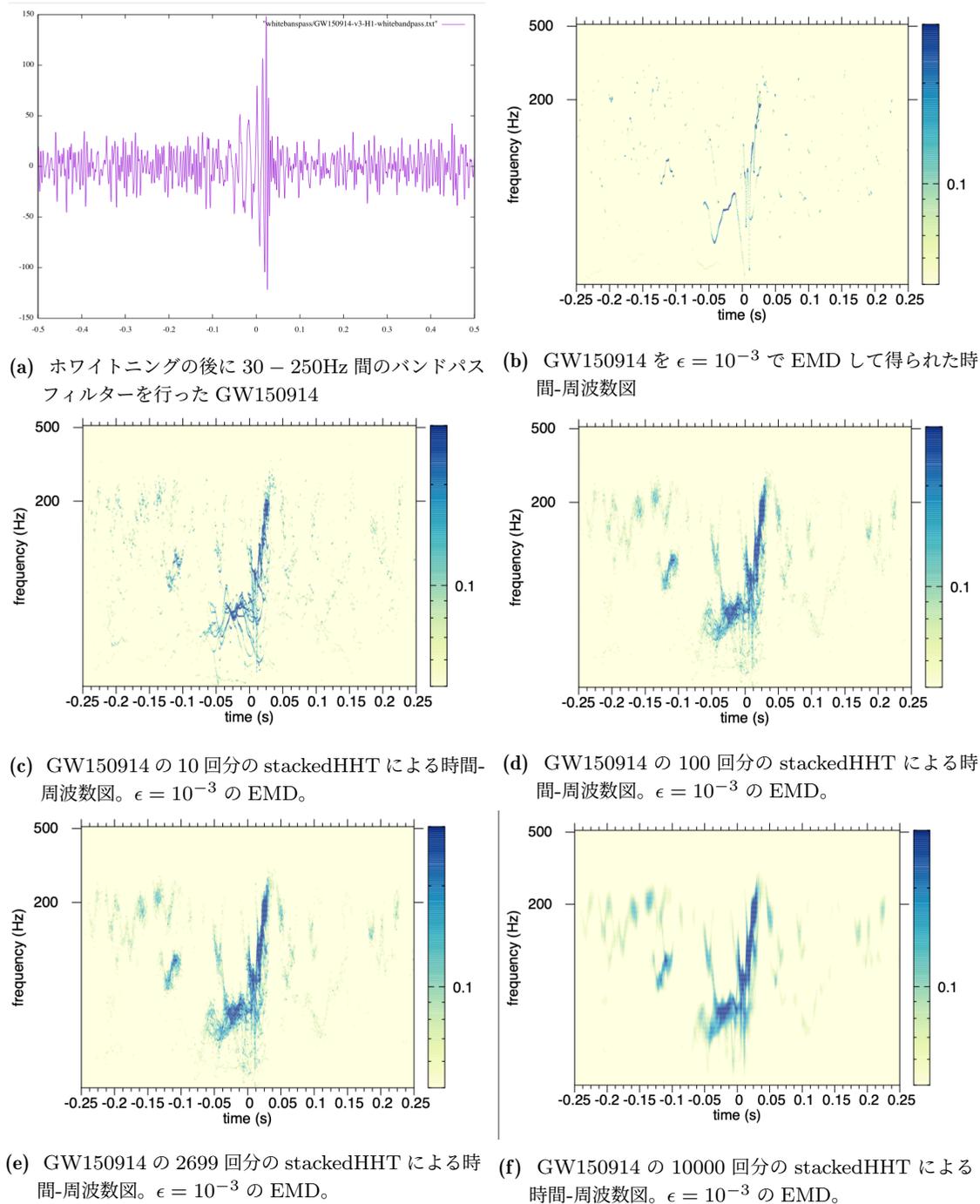


図 2.13: stacked HHT の積み上げる回数による時間-周波数の変化。図 2.13a はホワイトニングの後に 30 – 250Hz 間のバンドパスフィルターを行った GW150914 であり、解析した波形である。

### 2.5.1 Hilbert-Huang transform のパラメータ

Hilbert-Huang transform を行う際に用いるパラメータについて述べる。まず、サインガウス波に SNR20 のホワイトガウス雑音を加えた信号を、雑音の乱数の種を変えて 1000 個用意した。それらを同じ HHT パラメータを用いて Hilbert-Huang transform を行い、元のサインガウス波形との相関の値の変化を図 2.14 に示した。Hilbert-Huang transform は雑音の影響を受けやすく、信号ごとに最適な HHT パラメータを用いる必要があることがわかる。

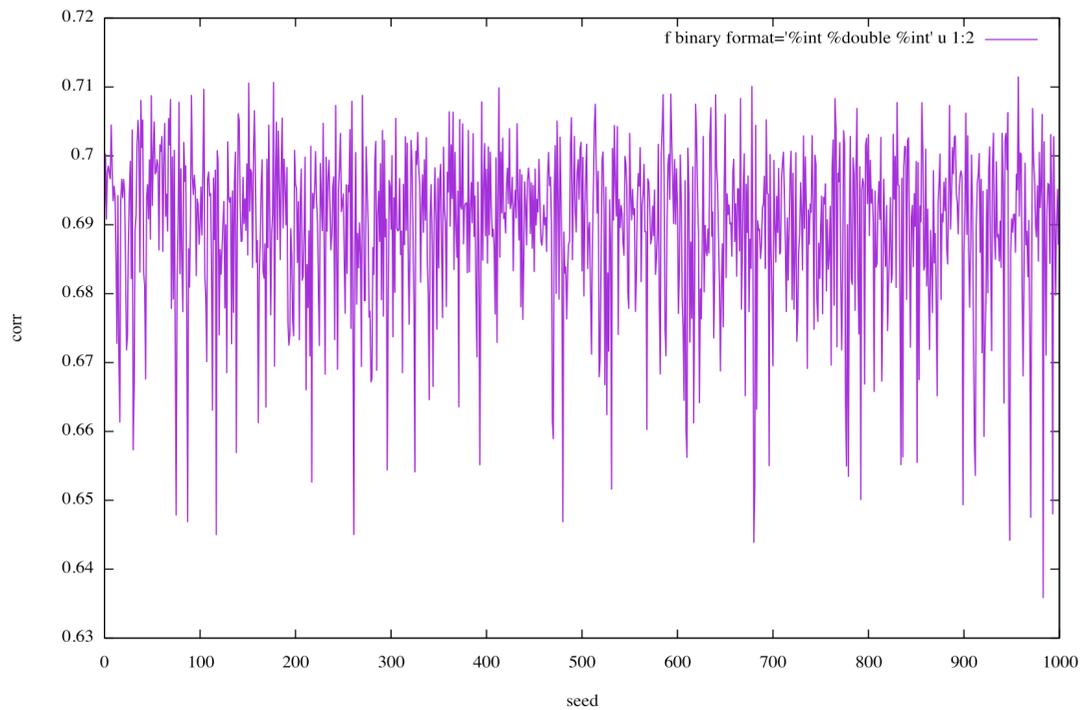


図 2.14: 同一パラメータによる雑音の影響。横軸は乱数の種。サインガウス信号に SNR20 のホワイトガウス雑音を加えた信号を、加える雑音の乱数の種を変えて同じパラメータで Hilbert-Huang transform を行った。 $\{\epsilon, N_{\text{eemd}}, \sigma_{\text{eemd}}\} = \{0.1, 1000, 1\}$

次に、同一の波形に対して HHT パラメータを変えたことによる時間-周波数図の変化を図 2.15 に示した。波形は、ブラックホール連星合体からの重力波である GW150914 をホワイトニング<sup>\*2</sup>した信号である。縦軸の crEPS は IMF の閾値である  $\epsilon_e$  を表しており、横軸の eeSig は Ensemble EMD の際に加えるホワイトガウス雑音が元の信号の標準偏差の何倍かを示す  $\sigma_{\text{eemd}}$  を表している。どの HHT パラメータを選んでも合体付近の重力波を抽出することができる。一方で、inspiral 期のような振幅の値が小さい時間帯は、HHT パラメータの選び方で挙動が異なることがわかる。

<sup>\*2</sup> ホワイトニングについては 4 章で解析した。

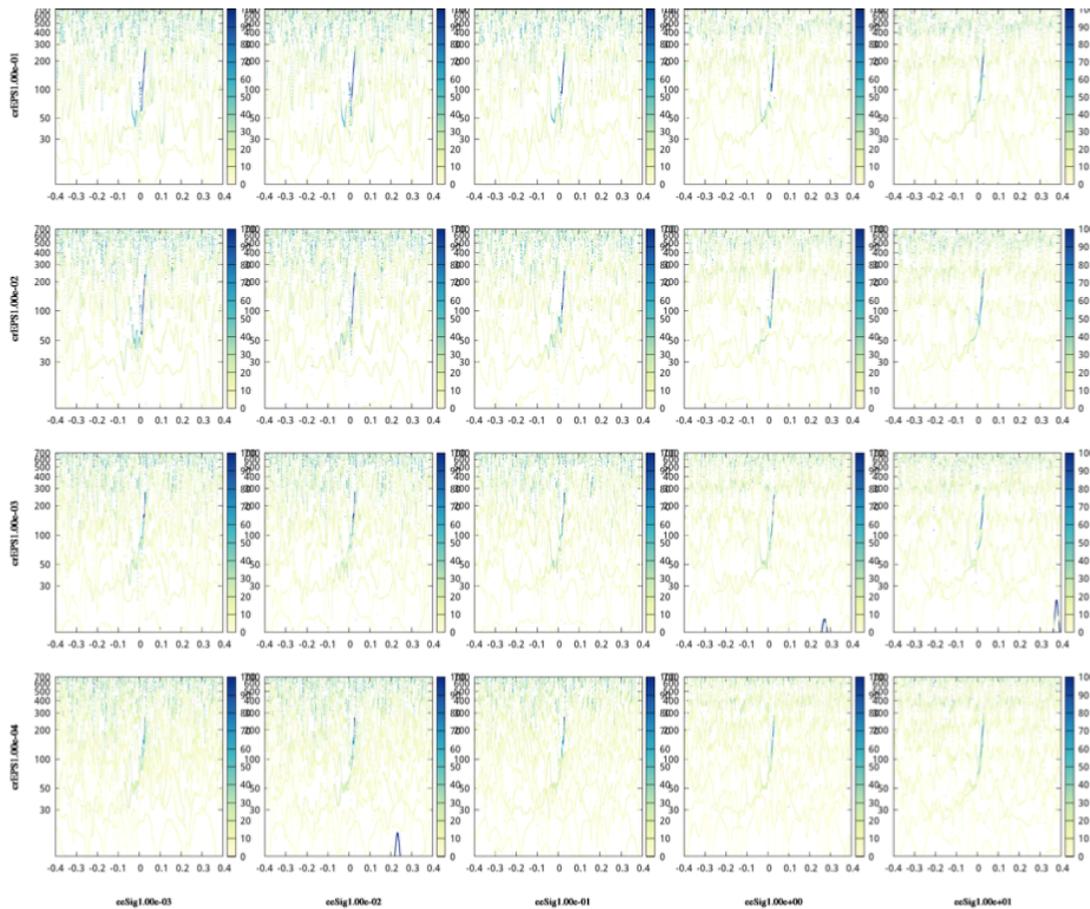


図 2.15: ホワイトニングした GW15094 の時系列データを HHT して得た TF 図。個々の図の縦軸は周波数 (Hz)、横軸は時間 (s)、カラーは瞬時振幅。全体の縦軸は IMF の閾値である  $\epsilon$ 、横軸は EEMD の際に加えるノイズが元の信号の標準偏差の何倍かを表す  $\sigma_{\text{eemd}}$  検出器は H1 である。0 秒は GPStime で 1126259462.4 である。 $\{\text{emdtype}, N_{\text{eemd}}\} = \{2, 10^4\}$

## 2.5.2 Hilbert-Huang transform の重力波データ解析への応用

重力波データ解析で代表的な時間-周波数解析手法は、フーリエ変換やウェーブレット変換を用いる。それらは事前に正規直交基底を設け、その重ね合わせで原信号を表現するため、時間の分解能と周波数の分解能の間にトレードオフの関係を生じる。天体现象からの重力波の多くは、数百ミリ秒といった非常に短い時間内で周波数が何桁も変化する波であるため、高い時間-周波数分解能をもつ解析手法の研究は重要である。本研究では、1996年に提唱された Hilbert-Huang Transform (HHT) (Huang et al. [1996, 1998, 1999, 2003]) と呼ばれる非定常信号に対する時間-周波数解析手法に着目した。フーリエ変換やウェーブレット変換を用いた時間-周波数解析手法と比べ、Hilbert-Huang Transform (HHT) は、波形の事前情報無しに信号の抽出が可能な利点がある。事前に正規直交基底を設けず、信号を適応的に分解し、周波数を時間の関数として定義する。実数値をもつ信号を実部、信号を Hilbert 変換したものを虚部とし、複素関数を構成することで、極形式から信号の振幅、位相が導出できる。周波数は位相を時間微分することで得られ、瞬時周波数と呼ばれる。振幅と位相も同様に時間の関数であり、瞬時振幅、瞬時周波数と呼ばれる。Hilbert-Huang transform は信号を固有モード関数 (intrinsic mode function: IMF) と呼ばれる零点周りで振動する波の重ね合わせとして表現する。IMF への分解方法は、経験的モード分解 (Empirical mode decomposition: EMD) と呼ばれる手法によって行われる。EMD は信号の極小値と極大値を求め、それぞれのエンベロープを計算し、極小値と極大値のエンベロープの平均値の差をとる操作を繰り返すことで、IMF を求める。EMD は信号が複数の IMF へ分裂してしまうモード分裂が発生する課題をもつ。モード分裂を抑制

するために EMD を改良した手法はいくつか提案されており、本論文では Ensemble EMD (WU and HUANG [2009]) を用いた。Ensemble EMD では、 $N_{\text{eemd}}$  個のホワイトガウス雑音を用いる。ホワイトガウス雑音と解析したい信号を重ね合わせた  $N_{\text{eemd}}$  個のデータに対してそれぞれ EMD を行い、求められた  $N_{\text{eemd}}$  個の IMF $_j$  の平均を、Ensemble EMD の IMF $_j$  とする。重ね合わせたホワイトガウス雑音の影響は十分な数でアンサンブルをとることによって軽減できる。ホワイトガウス雑音を重ねる利点として、次の例を挙げる。データが周波数ギャップが大きい2つの波の重ね合わせだとして、IMF1 と IMF3 にそれぞれ分解される場合を考える。このとき IMF2 に、本来 IMF1 と IMF3 に出るはずだった成分が分裂してしまう。初めにホワイトガウス雑音を重ね合わせることで、全ての周波数成分で振動するため、 $N_{\text{eemd}}$  個のデータに EMD をする段階では IMF2 にはホワイトガウス雑音の成分のみが抽出され、平均をとることで0となる。このように、モード分裂の発生を防ぐ利点がある。

重力波データ解析に Hilbert-Huang transform を用いるアイデアは 2007 年に Jordan B. Camp, John K. Cannizzo, Kenji Numata (Camp et al. [2007]) によって提案された。Camp et al. [2007] は、天体現象からの重力波データ解析と、重力波検出器の雑音の特性評価と、2つの観点から重力波解析への有用性を提示している。前者では、まず、ブラックホール連星合体からの重力波に対する Hilbert-Huang transform の有用性を初めて示した。理論的に予想されている super massive black hole 連星の inspiral 期からの重力波に対して Hilbert 変換を行い、理論と一致した瞬時周波数を得られることを示した。実際に観測される重力波は重力波検出器の雑音が重なっているため、データに直接 Hilbert 変換を行なっても適切な瞬時周波数を得ることはできない。そこで次に、 $20M_{\odot}$  のブラックホール連星合体の重力波とホワイト雑音を重ね合わせた信号から、ホワイト雑音を足す前の時系列波形を抽出可能なことを示した。さらに、雑音に対して瞬時振幅が大きい時間帯を重力波イベントが到来しているとする検出手法への応用の可能性を示唆している。このように Camp et al. [2007] は多くのアイデアを提唱しており、Hilbert-Huang transform を重力波データ解析へ用いるための研究のパイオニア的な存在である。

2009 年には、A. Stroer, J.K. Cannizzo, J.B. Camp, N. Gagarin (Stroer et al. [2009]) によって、低い Signal to Noise Ratio (SNR) をもつ重力波に対して、HHT を用いて特徴を抽出する方法を考案された。ここでは信号と雑音のパワーの平方根の比を SNR とする。彼らはまず、Hilbert-Huang transform を計算する前の処理として、雑音の影響を軽減するために、適切なローパスフィルターの選出基準やパスバンドの決定方法を提案した。SNR が小さいとき、前処理によって雑音が軽減されたとしても、瞬時位相は真の値の周りで振動する場合がある。これらの振動は、最小二乗速度フィルタ Frei et al. [1999] を用いて抑えられることを示した。ある時刻  $t$  の瞬時周波数を求める際に、同時刻  $t$  を中心とした区間長  $n$  の瞬時位相のデータに対して最小二乗法を適用している。これにより、鋭い瞬時周波数の変動を平均化する効果がある。さらに Hilbert-Huang transform で得られる IMF、瞬時振幅、瞬時周波数の不定性を定量的に評価する方法を提案している。IMF への分解は経験的な性質のため、不定性を解析的に推定することは困難である。そこで、彼らは Ensemble EMD を応用して、解析するデータの雑音と同じ標準偏差をもつホワイトガウス雑音と重ね合わせたデータを複数用意し、それらを EMD して得られた瞬時周波数の分布の導出した。次に、Camp et al. [2007] で提案されていた瞬時振幅の過剰値を用いて重力波候補イベントを検出するアイデアから、Bayesian blocks (Scargle [1998], McNabb et al. [2004]) を用いた検出アルゴリズムが提案した。さらに、Hilbert-Huang transform を計算した後の処理として、カーネル密度推定 (Silverman [1986]) を用いて時間-周波数図において雑音に対する重力波信号の大きさを大きくする方法を提案している。この手法は同年 NINJA (Numerical INjection Analysis) プロジェクトにて性能評価が行われた (Aylott et al. [2009], Stroer and Camp [2009])。NINJA とは、複数の数値シミュレーションによるブラックホール連星合体からの重力波をガウス雑音に注入した信号を観測信号に見立てて、

検出ソフトウェアの性能評価を行ったものである。彼らの開発した HHT を用いた検出ソフトウェアでは、検出は振幅が大きい合体付近の寄与が大きいことが示された。これらの手法と検証は CAMP et al. [2009] でも報告されている。

2011 年には、A. Stroeer, L. Blackburn, J. Camp (Stroeer et al. [2011]) によって、2 台の検出器信号の瞬時振幅と瞬時周波数から、信号の相対的な時間差の決定や、類似しているが同一でない波形を識別するための手法を提案している。この方法は、LIGO の第 4 回サイエンスランで得られた重力波データに対しても適用された。

2013 年に H. Takahashi, K. Oohara, M. Kaneyama, Y. Hiranuma, J. Camp (Takahashi et al. [2013]) は、解析に用いる HHT パラメータの最適値を決定する手法の提案と実証を行った。さらに、2015 年には重力波解析における IMF の完全性と直交性 (Kaneyama et al. [2015], Kaneyama [2015]) についても報告されている。

Camp et al. [2007] で示唆されていた Hilbert-Huang transform を用いた重力波候補イベント検出のための研究は、2015 年に、M. Kaneyama, K. Oohara, H. Takahashi, Y. Hiranuma, T. Wakamatsu, J.B. Camp (Kaneyama et al. [2014], Kaneyama [2015]) によって発展した。彼らは、ある継続時間の間、瞬時振幅が閾値以上の値をもっていた場合、重力波候補イベントとすることを提案した。2016 年には K. Sakai, K. Oohara, M. Kaneyama, H. Takahashi (Sakai et al. [2016]) によって、Excess amplitude method という検出手法が提案された。これは、短時間における瞬時振幅の区間平均を計算して雑音と比べて大きい場合に重力波候補イベントとする。このとき、全 IMF の中で最も大きい区間平均の値をもつ IMF を 1 つ選んでいる。さらに機械学習である異常検知手法を取り入れたものが、2018 年に、K. Saka, M. Kaneyama, K. Oohara, H. Takahashi (Sakai et al. [2018], Sakai [2018]) によって提案された。異常検知手法とは、取得されたデータの中で異常な振る舞いをしている部分を探す機械学習の 1 つであり、彼らは重力波検出器の信号にとって正常データは検出器雑音、異常データは突発的に到来する重力波候補イベントとして応用している。瞬時振幅と瞬時周波数のそれぞれの区間平均を計算し、それぞれの確率が最も小さい時間帯を探す。ここでも、全 IMF の中で最も小さい確率を持つ IMF の値が選ばれている。同じ 2018 年には、E. Son, W. Kim, Y. Kim, J. McIver, J. Oh, S. Oh (Son et al. [2018, 2021]) が EtaGen という検出手法を提案している。彼らは、絶対中央偏差を用いた閾値よりも大きい瞬時振幅の時刻を記し、連続した時間区間におけるパワーの信号雑音比が閾値よりも大きい時間帯を重力波候補イベントとした。このとき、全 IMF の中から 1 つの IMF を選ぶのではなく、時間-周波数空間でクラスタリングを行うことで、複数の IMF ヘモード分裂した信号を再構成している。

中性子星-中性子星連星合体からの重力波に Hilbert-Huang transform を用いた研究は、2016 年に M. Kaneyama, K. Oohara, H. Takahashi, Y. Sekiguchi, H. Tagoshi, M. Shibata (Kaneyama et al. [2016], Kaneyama [2015]) によって行われた。彼らは一般相対論的数値シミュレーションによって計算された連星中性子星合体からの重力波にデザイン感度曲線に沿ったガウス雑音を重ね合わせた信号を解析している。注入した重力波の時期は late-inspiral, merger, post-merger phase であり、inspiral phase からの重力波は注入していない。それぞれ別の IMF に分かれて抽出されている。さらに、合体後に数ミリ秒存在する大質量中性子星からの重力波の瞬時周波数から状態方程式の制限を行なっている。それに伴って、フーリエ解析における周波数ピークには瞬時周波数の時間積分が対応していることを用いている。

重力波の初観測が 2016 年に発表されて以降、実際の重力波イベントに対して Hilbert-Huang transform を用いた研究結果も報告されている。初めて観測された重力波イベント GW150914 に Hilbert-Huang transform を用いた結果は 2017 年に K. Sakai, K. Oohara, M. Kaneyama, H. Takahashi (Sakai et al. [2017a], Sakai [2018]) によって報告された。これにより、Hilbert-Huang transform は重力波検出器信号から天体現象からの重力波を抽出できることが初めて示された。さ

らに、2018 年には K.Sakai, K. Oohara, H. Nakano, M. Kaneyama, H. Takahashi (Sakai et al. [2017b], Sakai [2018]) によって、GW150914 のリングダウン期から合体後のブラックホールの物理量が推定された。Akhshi et al. [2021] では、初イベント以降、O1 と O2 で観測された重力波イベントと、O3a で観測されたイベントのうちの 4 つに対して Hilbert-Huang transform を適用した結果が報告されている。

Hilbert-Huang transform を用いた結果を他の手法と比較した報告もなされている。Nakano et al. [2019] では、Sakai et al. [2017b] で提案された重力波のリングダウン期から合体後のブラックホールの物理量を推定する手法が取り上げられている。Jia et al. [2018] では、2 つの周波数モードが時間-周波数領域で交差する場合に、ヒルベルトスペクトル解析によって瞬時周波数がどう得られるかについて議論されている。ここでは IMF に分解する工程は行っていない。

Hilbert-Huang transform は天体现象からの重力波イベントだけでなく重力波検出器雑音の理解にも用いられている。Valdes et al. [2017] にて、重力波検出器の雑音の一つである散乱光の原因特定のために、LIGO Livingston の O1 のデータに Hilbert-Huang transform が用いられた。Longo et al. [2020] では Virgo の O3 のデータに対して、Bianchi et al. [2022] では LIGO Livingston の O3 のデータに対して用いられた。

重力崩壊型超新星爆発からの重力波に Hilbert-Huang transform を用いた研究は、2017 年に M. Kaneyama, K. Oohara, T. Wakamatsu, H. Takahashi, J. B. Camp (Kaneyama et al. [2017]) によって行われた。彼らはシミュレーションから求められたコアバウンス時に放射される重力波に対して Hilbert-Huang transform を行い、波形の再構成を行なった。2021 年には、シミュレーションから求められた、コアバウンス後に放射される重力波に対して解析を行い、Takeda et al. [2021] にて報告した。Takeda et al. [2021] では爆発機構に深く関わりとされる流体力学不安定性を起因とする重力波の瞬時周波数を初めて抽出した。

2022 年には Hu et al. [2022] によって、Hilbert-Huang transform を用いた新しい解析手法である Stacked Hilbert transform が提案された。これは信号がより鮮明に得られる時間-周波数図を作成する。彼らは O1, O2 の間に観測されたコンパクト天体連星合体からの重力波イベントと、重力崩壊型超新星爆発シミュレーションからの重力波に適用し、その有用性を示した。

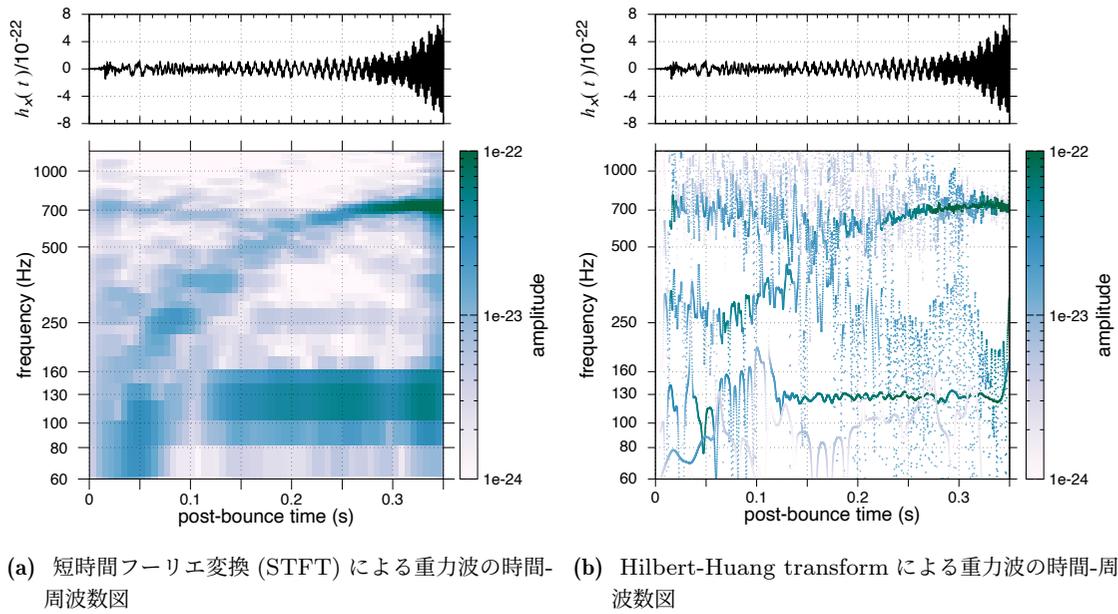
以上のように、重力波に Hilbert-Huang transform を用いる研究は発展してきている。

## 第 3 章

# 重力崩壊型超新星爆発からの重力波データ解析

### 3.1 シミュレーションから得られた重力波への Hilbert-Huang transform の適用

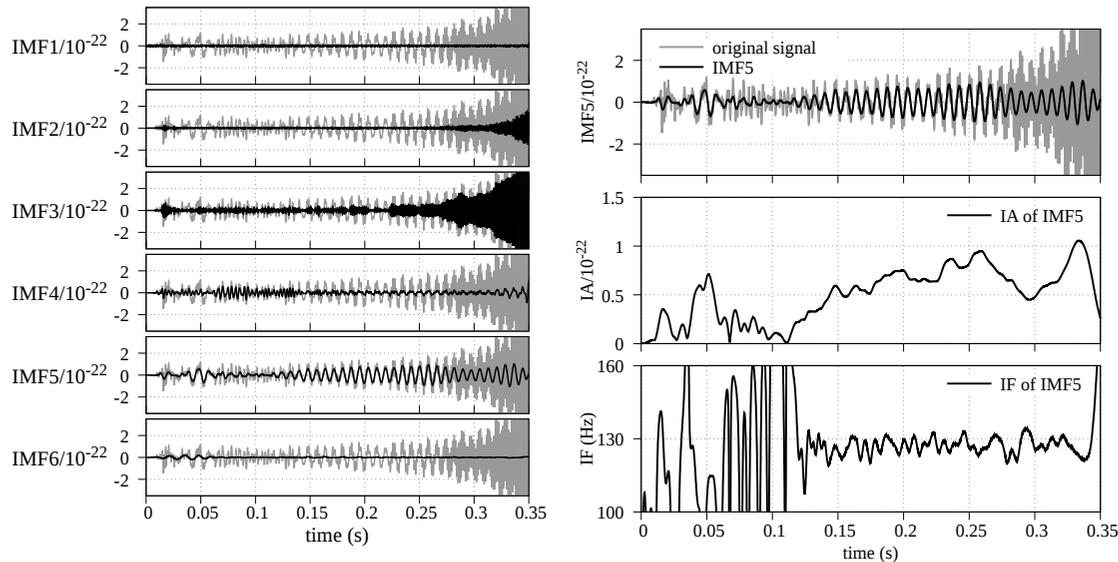
ここでは、Kuroda et al. [2016] による重力崩壊型超新星爆発の 3 次元一般相対論的シミュレーションから得られた重力波に対して、Hilbert-Huang transform を用いて解析した結果について述べる。用いた重力波は図 1.5 の SFHx である。SFHx という名前の由来はシミュレーションに用いた状態方程式の名前である。図 3.1 の上段は 2 つとも同じ重力波波形 ( $h_x$ ) であり、下段は短時フーリエ変換を用いた時間-周波数図 [図 3.1a] と、Hilbert-Huang transform を用いた図 [3.1b] である (Takeda et al. [2021])。これらから、時間-周波数領域内に 2 つの強い信号が存在することがわかる。0.05 – 0.35 s にかけて周波数が急速に増加しているモードは、原始中性子星の表面 g-mode (gravity-mode) である。一方は、g-mode に比べて低い周波数帯域をもつモードは、SASI に起因していると考えられている。(ここでは、SASI mode と呼ぶことにする。)



**図 3.1:** 超新星爆発の数値シミュレーションから得られた重力波  $h_x$  の時間-周波数図の比較。重力波のサンプリング周波数は 16384Hz。横軸はコアバウンス後の時刻。縦軸は周波数の対数スケール表示。STFT の色は振幅スペクトルを表しており、Hilbert-Huang transform の色は瞬時振幅を表す。瞬時振幅の値が相対的に小さい時刻の瞬時周波数は物理的な議論で扱わないため、目立たないように背景の白に近い色で示した。STFT では Hanning window function を使用し、窓幅は約 0.048s、オーバーラップは約 0.042s である。Ensemble EMD のパラメータは  $\{\epsilon, N, \sigma_{\text{eemd}}\} = \{0.1, 10^6, 10\}$  とした。

同じ重力波を解析した先行研究である Kawahara et al. [2018] では、2つの強いモードである g-mode と SASI mode 以外にも、いくつかの振幅スペクトルの値が小さいモードが時間-周波数領域上に表れており、Hilbert-Huang transform を用いた図 3.1b にも同様のモードが表れている。しかし、その時刻にその周波数の波が存在する重みの意味をもつ瞬時振幅の値が小さいため、ここではこれらのモードについては議論せず、SASI mode に焦点を当てる。

重力波から得られた IMF1 – 6 は図 3.2a である。灰色の実線は解析した重力波波形を表し、黒色の実線が IMF である。g-mode と SASI mode はそれぞれ、IMF3 と IMF5 に表れている。図 3.2b は IMF5 と、IMF5 の瞬時振幅と瞬時周波数である。これらから、SASI mode はコアバウンスから ~ 0.1 s 後まで表れていないこと、周波数が ~ 150 Hz 程度であることがわかる。



(a) 重力波を Ensemble EMD して得た IMF Ensemble EMD のパラメータは  $\{\epsilon, N, \sigma_{\text{eemd}}\} = \{0.1, 10^6, 10\}$  (b) 図 3.2a の IMF5 と、IMF5 を Hilbert Spectral 解析して得られた瞬時振幅と瞬時周波数

**図 3.2:** 重力波に Hilbert-Huang transform を行なって得られる IMF と瞬時振幅 (IA) と瞬時周波数 (IF)。灰色の線は重力崩壊型超新星爆発の数値シミュレーションである SFHx から得られた重力波  $h_x$  の時系列データ。IMF と瞬時振幅と瞬時周波数は、元の信号と同じサンプリング周波数の時系列データである。図 3.2a の IMF を個々に Hilbert Spectral 解析して得られた瞬時周波数に、瞬時振幅で色をつけて重ねて図示したものが図 3.1b。

Hilbert-Huang transform は高い時間-周波数分解能をもつため、重力波の周波数から SASI が支配的な時間帯の推定や、周波数の時間変動の推定に適している。SASI の活動によって、重力波とニュートリノ信号の両方の時間変動に影響を与える可能性があるため、重力波の周波数をより正確に決定することは、重力波とニュートリノ信号を結びつけ、それらが同じ起源から放射されていることを同定することに繋がる。(重力波について:Kuroda et al. [2016], Andresen et al. [2017], Vartanyan and Burrows [2020]、ニュートリノについて:Tamborra et al. [2013], Kuroda et al. [2017]) そこで、Hilbert-Huang transform を用いて SASI からの重力波の瞬時周波数を解析する手法を提案する。

## 3.2 SASI mode の瞬時周波数の解析

3.1 章では、重力崩壊型超新星爆発のシミュレーションから得られた重力波に Hilbert-Huang transform を適用し、SASI mode を 1 つの IMF に抽出した。SASI の活発さは親星の質量や状態方程式によって異なることが分かっているが、理論的な描像は十分に理解されていない (Kuroda et al. [2016, 2017])。SASI の発生はコアバウンス直後ではなく、数ミリ秒経過後に発生し、 $\mathcal{O}(100 \text{ Hz})$  の周波数帯域をもつことがシミュレーションから知られている。その周波数の時間変動は、衝撃波半径などの影響を受け、爆発に転ずると減少する可能性が考えられており、初期条件や計算時間に応じて SASI mode の周波数の詳細な時間変動は異なる。(Powell et al. [2021] など) ここでは、SASI mode が表れた IMF の瞬時周波数を解析する手法について提案し、実際に SFHx の SASI mode に適用する。まず、SASI mode が優勢になり始めた時刻を瞬時周波数から推定する。次に、瞬時周波数の平均と時間的推移を推定する。さらに、この提案する手法の系統誤差を、試験波形を用いて推定する。

### 3.2.1 解析手法と試験波形への適用

周波数一定のサインガウス波形と、ホワイトガウスノイズを足した信号を試験波形として用いる。

$$h_{\text{test},l}(t) = A \exp \left[ - \left( \frac{2\pi(t - t_{\text{shift}})}{t_{\text{width}}} \right)^2 \right] \sin(2\pi f_{\text{const}} t) + g_l,$$

ここで、 $g_l$  はホワイトガウスノイズ、 $l$  は ( $l = 1, \dots, N_{\text{test}}$ )、 $N_{\text{test}}$  は乱数の seed を変えて生成したホワイトガウスノイズの数である。波形のパラメータは、図 3.2 に出ている SASI mode を模倣して  $t_{\text{shift}} = 0.22$ ,  $t_{\text{width}} = 0.4$ ,  $f_{\text{const}} = 130$  Hz とした。サンプリング周波数は 16384 Hz である。生成した試験波形を図 3.3 に示した。左側の上段の赤色の実線で示した波がサインガウス波である。右側の2つの図は、サインガウス波に対してヒルベルトスペクトル解析を行なって得られた瞬時振幅と瞬時周波数である。左側の下段の黒色の実線で示した波が、赤色の実線で示したサインガウス波にホワイトノイズを重ね合わせた試験波形の一例である。

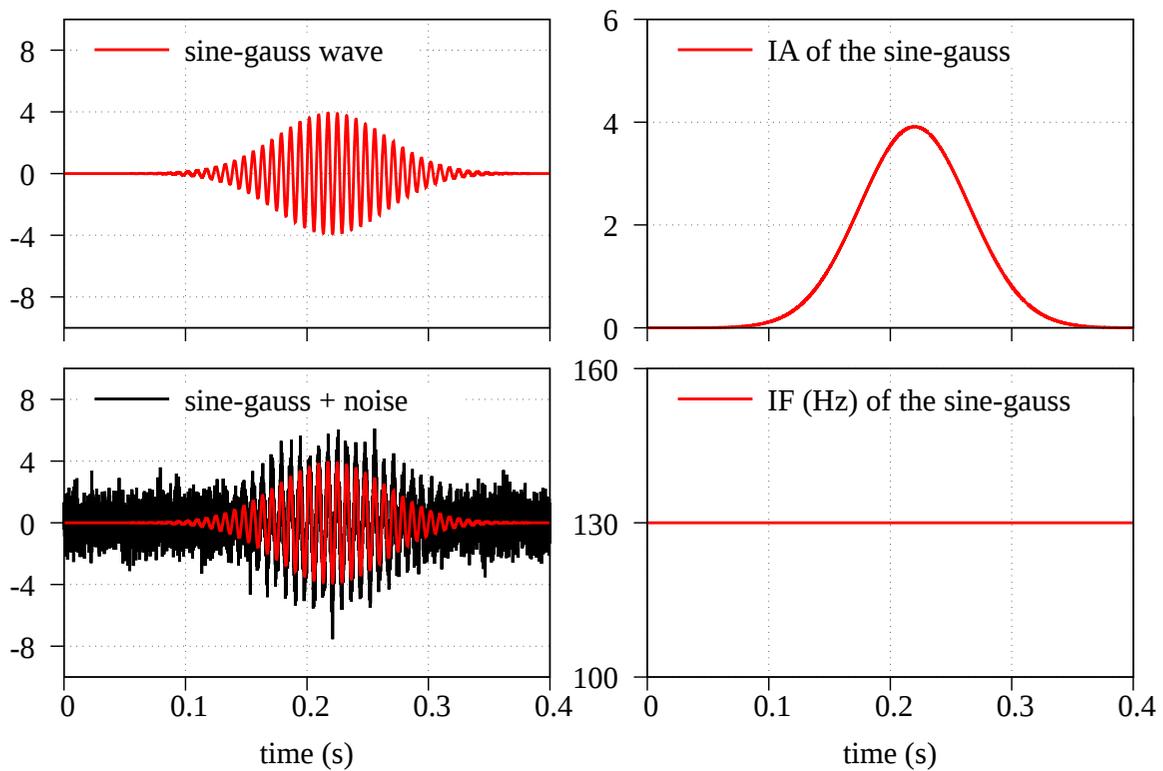
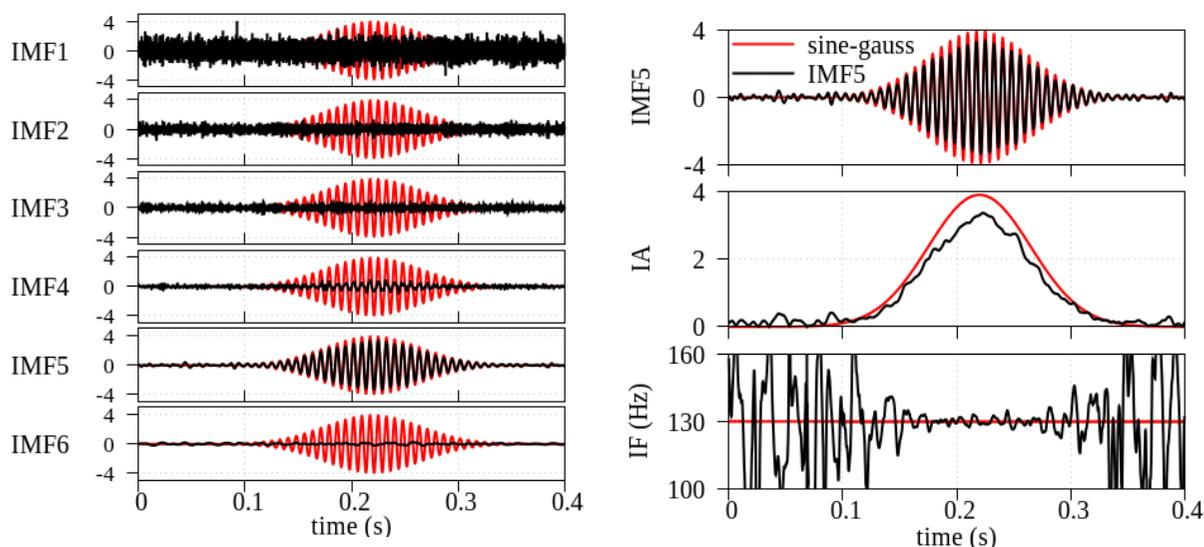


図 3.3: 試験波形と、ノイズを足す前のサインガウス波形に Hilbert Spectral 解析を行なって得られた瞬時振幅と瞬時周波数

試験波形としてサインガウス波を用いた理由は、図 3.1b のように、今回解析した SASI mode は、ある時刻から振幅が強くなり、周波数はほとんど一定な波形あるためである。SASI はその発生条件や挙動の理解が十分でない現象であり、SASI を起因とした重力波の普遍的な波形モデルは存在しない。しかし、Kuroda et al. [2016] で報告されてるように SFHx では SASI の周波数はほぼ一定であると考えることが妥当である。

試験波形に対して Hilbert-Huang transform を行った結果が図 3.4 である。アンサンブルの数は  $N_{\text{eemd}} = 10^3$  と、重力波の解析で用いた値よりも小さくなっている。試験波形のような単純な波形では、 $N_{\text{eemd}} = 10^6$  の場合と結果が変わらなかったためである。図 3.4b はホワイトガウスノイズを足す前のサインガウス波と IMF5 を比較したものである。IMF5 の振幅が実際の波形よりも小さくなっていることが分かるが、これは他の IMF へのモード分裂が発生したからである。図 3.4a から、IMF1-3, IMF6 はほとんどノイズの成分が抽出され、IMF4 はサインガウス波の分裂した成分を含んでいることがわかる。また、図 3.4b から、瞬時振幅が小さい時刻の瞬時周波数はノイズや計算誤差

の影響で瞬時周波数の物理的な解釈は難しくなっていること、瞬時振幅が大きい時刻の瞬時周波数はホワイトガウスノイズの影響で真の値である 130 Hz 周りで振動していることがわかる。実際の重力波解析では、IMF のモード分裂の完全に回避できない場合が多いと想定されること、また、モード分裂の有無を厳密に確認することはできないことから、今回の結果を用いて解析を進める。



(a) 試験波形に Ensemble EMD を行なって得られた図。パラメータは  $\{\epsilon, N, \sigma_{\text{emd}}\} = \{0.1, 10^3, 10\}$

(b) 図 3.4a の IMF5 とその瞬時振幅と瞬時周波数

図 3.4: 試験波形を Hilbert-Huang transform を行なって得られた図。赤色の実線はサインガウス波形とサインガウス波形に対して Hilbert-Huang transform を行なって得られた結果である。黒色の実線はサインガウス波形とホワイトガウスノイズを足した試験波形とそれに対して Hilbert-Huang transform を行なって得られた結果である。

### 特定のモードの開始時刻の推定手法

IMF は解析した信号と同じ時間区間、時間分解能をもつため、IMF のある時刻から重力波が抽出されている場合、別途その時間区間を推定する必要がある。この項では、SASI-mode が優勢となる開始時刻  $t_{\text{start}}$  と終了時刻  $t_{\text{end}}$  を推定する。推定方法は、二乗平均平方根誤差 (root mean squared error: RMSE) を用いてリングダウン重力波の時間区間を推定した先行研究 Sakai et al. [2017b] に基づいた手法である。彼らは一般相対性理論が予言するリングダウン重力波の振る舞いを仮定しているが、ここでは SFHx の SASI の周波数はほぼ一定なことから、瞬時周波数は一定と仮定した。

離散的な時系列信号における開始時刻と終了時刻を次のように定義する。

$$t_{\text{start}}(n_0) = n_0 \Delta t \quad (3.2.1)$$

$$\begin{aligned} t_{\text{end}}(n_0, N_T) &= t_{\text{start}} + T \\ &= (n_0 + N_T) \Delta t \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

ここで、 $n_0$  は  $t_{\text{start}}$  のセグメント番号、 $\Delta t$  はサンプリング時間区間でありサンプリング周波数の逆数 ( $\Delta t = 1/f_{\text{sampling}}$ )、 $T$  は信号が開始している時間の長さ、 $N$  は  $T$  のセグメントの数である。信号の開始している区間  $[n_0, n_0 + N_T]$  を、 $n_0$  と  $N_T$  を変数として推定する。

まず、それぞれの  $N_T$  に対して最適な  $t_{\text{start}}$  を推定する。ある値で固定した  $N_T$  に対して、あらゆる  $n_0$  での区間  $[n_0, n_0 + N_T]$  における瞬時周波数の RMSE を計算する。瞬時周波数の平均を、

$$\langle f \rangle(n_0, N_T) = \sum_{i=n_0}^{n_0+N_T-1} f_i w_i, \quad (3.2.3)$$

として、RMSE を、

$$\text{RMSE} : \hat{\sigma}(n_0, N_T) = \sqrt{\frac{1}{N_T} \sum_{i=n_0}^{n_0+N_T-1} [f_i - \langle f \rangle(n_0, N_T)]^2} \quad (3.2.4)$$

とした。ここで、 $f_i$  は瞬時周波数、 $a_i$  は瞬時振幅、 $w_i$  は重み関数を表す。重み関数は瞬時振幅の二乗を用いた。

$$w_i = \frac{a_i^2}{\sum_{i=n_0}^{n_0+N_T-1} a_i^2}. \quad (3.2.5)$$

固定した  $N_T$  に対して最適な  $n_0$  を  $n_0^{\text{best}}$  で表し、RMSE が最小の値をとる  $n_0$  が最適として、

$$n_0^{\text{best}}(N_T) = \underset{n_0}{\operatorname{argmin}} \hat{\sigma}(n_0, N_T), \quad (3.2.6)$$

$$\sigma(N_T) = \hat{\sigma}(n_0^{\text{best}}(N_T), N_T). \quad (3.2.7)$$

図 3.5a の下段は横軸が  $N_T$ 、縦軸が  $\sigma$  の図である。各  $N_T$  に対して  $\sigma$  を計算する過程で、最適な開始時刻と終了時刻も得られている。ここでは、 $N_T$  の最小値は 5 とした。

次に、最適な  $N_T$  を推定するため、次のように仮定した。

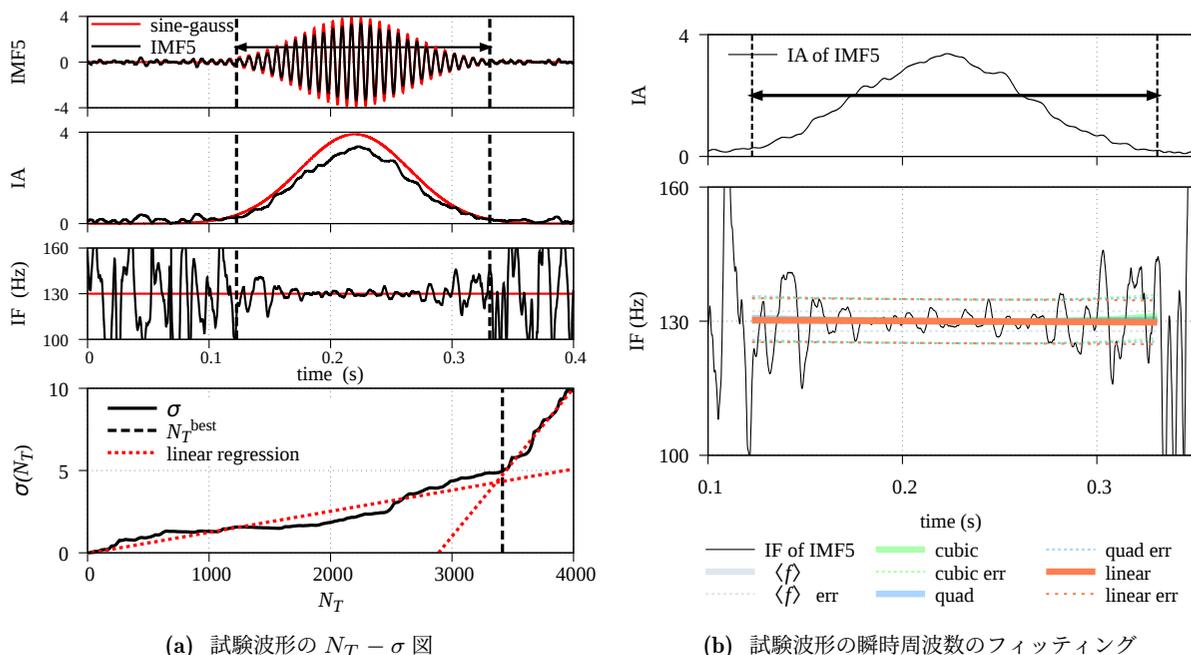
- SASI の瞬時周波数はほとんど一定である
- SASI は IMF の一部分で優勢に開始している

$N_T - \sigma$  図において、SASI が支配的な時間区間では、 $N_T$  が増加するにつれて  $\sigma$  はゆるやかに増加するが、そうでない区間ではノイズが支配的なため急激に  $\sigma$  が増加する考えられる。上記の仮定に基づき、 $N_T - \sigma$  領域をある  $N_T$  を境に 2 つの領域に分ける。境目となる  $N_T$  は、それぞれの領域に対して線形回帰を行い、2 つの回帰の誤差の和が最小となる  $N_T$  を最適な  $N_T^{\text{best}}$  とした。

$$N_T^{\text{best}} = \underset{N_T}{\operatorname{argmin}} [\operatorname{Er}(N_{T,\min}, N_T) + \operatorname{Er}(N_T + 1, N_{T,\max})], \quad (3.2.8)$$

$$\operatorname{Er}(N_{T,1}, N_{T,2}) = \min_{a,b} \sqrt{\frac{\sum_{N_T=N_{T,1}}^{N_{T,2}} [\sigma(N_T) - (aN_T + b)]^2}{N_{T,2} - N_{T,1}}}, \quad (3.2.9)$$

ここで、 $N_{T,1}, N_{T,2}$  ( $N_{T,1} < N_{T,2}$ ) は  $N_T - \sigma$  図上での任意の点  $N_T$  であり、 $a, b$  はフィッティング係数である。 $N_{T,\min}, N_{T,\max}$  はそれぞれ  $N_T - \sigma$  図の横軸の最小値と最大値である。図 3.5a の下段の黒色の破線は  $N_T^{\text{best}}$  を表しており、そこから得られた特定のモードが優勢な時間区間は、図 3.5a の上段の黒色の破線と矢印で示している。試験波形に対して、サインガウス波の瞬時振幅が 0 に近くない時間帯の推定に成功しており、実際の SASI mode が支配的な時間区間に対しても有効なことが期待できる。

(a) 試験波形の  $N_T - \sigma$  図

(b) 試験波形の瞬時周波数のフィッティング

図 3.5: 試験波形の瞬時周波数推定。

### 周波数の時間的推移の推定手法

この項では、瞬時周波数が時間変動しているかどうかを推定する。モード分裂が発生している場合、瞬時周波数は真の値の周りで振動するため、重み付き最小二乗法から得られるフィッティング係数を用いて周波数の時間的推移を推定する。

$$f_{\text{lin}}^{\text{fit}}(t) = a_0 + a_1\tau + f_{\text{lin, err}}^{\text{fit}}, \quad (3.2.10)$$

$$f_{\text{quad}}^{\text{fit}}(t) = b_0 + b_1\tau + b_2\tau^2 + f_{\text{quad, err}}^{\text{fit}}, \quad (3.2.11)$$

$$f_{\text{cubic}}^{\text{fit}}(t) = c_0 + c_1\tau + c_2\tau^2 + c_3\tau^3 + f_{\text{cubic, err}}^{\text{fit}} \quad (3.2.12)$$

ここで、 $f_{\text{lin}}^{\text{fit}}$ ,  $d = \{\text{lin, quad, cubic}\}$  は周波数の時間的推移の従属変数であり、 $\tau = (t - t_c)/(t_{\text{end}} - t_{\text{start}})$ ,  $t_c = (t_{\text{start}} + t_{\text{end}})/2$  である。 $f_{d, \text{err}}^{\text{fit}}$ ,  $d = \{\text{lin, quad, cubic}\}$  は誤差項であり、 $f_{d, \text{err}}^{\text{fit}} = \sum w_i (f_i - f_d^{\text{fit}})^2$  である。

それに加えて、解析結果がどれだけ正しいかを調べるために、次の値を導入する。

$$\chi_d^2 = \frac{1}{N_T} \sum_i \frac{(f_{d, i}^{\text{fit}} - f_{\text{true}, i})^2}{f_{\text{true}, i}}, \quad d = \{\text{lin, quad, cubic}\} \quad (3.2.13)$$

ここで、 $f_{\text{true}}$  は真の値である。ホワイトガウスノイズを重ね合わせる前のサインガウス波に対して Hilbert Spectral 解析を行い得た瞬時周波数の値であり、 $f_{\text{true}} = 130$  Hz である。

フィッティングの結果を図 3.5b に示し、得られたフィッティング係数は表 3.1 にまとめた。これらの結果から、周波数一定の試験波形を適切に解析できることがわかる。また、重み無しな場合 ( $w_i = 1$ )、瞬時周波数の平均は本来の値から大きくずれることから、重みをつけて解析することで適切な結果を得ることができた。

### 誤差推定

この項では既述の手法で生じる誤差を推定する。試験波形を  $N_{\text{test}} = 1000$  用意し、個々に対して手法を適用し、得られたフィッティング係数のヒストグラムを計算した。

表 3.1: Fitting coefficients and errors of the IF

	Linear	Quadratic	Cubic
$\tau^0$	$130.0 \pm 1.0$	$130.0 \pm 1.2$	$130.0 \pm 1.3$
$\tau^1$	$-0.3 \pm 3.3$	$-0.6 \pm 3.5$	$-0.4 \pm 5.5$
$\tau^2$		$0.6 \pm 8.0$	$0.7 \pm 8.3$
$\tau^3$			$0.8 \pm 16.8$
$f_{\text{err}}^{\text{fit}}$	4.9	4.9	6.5
$\chi^2$	$1.6 \times 10^{-4}$	$4.4 \times 10^{-4}$	$6.4 \times 10^{-4}$

図 3.6 は 1000 個の試験波形を解析して得られた結果のヒストグラムである。右上の図が開始時刻のヒストグラムであり、その 1 個下の図が終了時刻のヒストグラムである。開始時刻のヒストグラムの左にある図が瞬時周波数の平均値のヒストグラムである。残りはフィッティング係数のヒストグラムであり、上から 1 次関数、2 次関数、3 次関数の係数であり、右にいくほど 0, 1, 2, 3 と冪の値が大きくなる。赤色の破線は真の値であり、定数項に対しては  $f_{\text{true}}$  との差である。ヒストグラムの幅は、1000 個の試験波形の解析結果のばらつきを反映している。これらは Ensemble EMD でのモード分解が完全には行えなかったこと、式 (3.2.1) の第二項の、seed だけ異なるノイズの挙動に起因するものである。本手法を重力波に適用する場合、これらは系統誤差と考えるべきである。

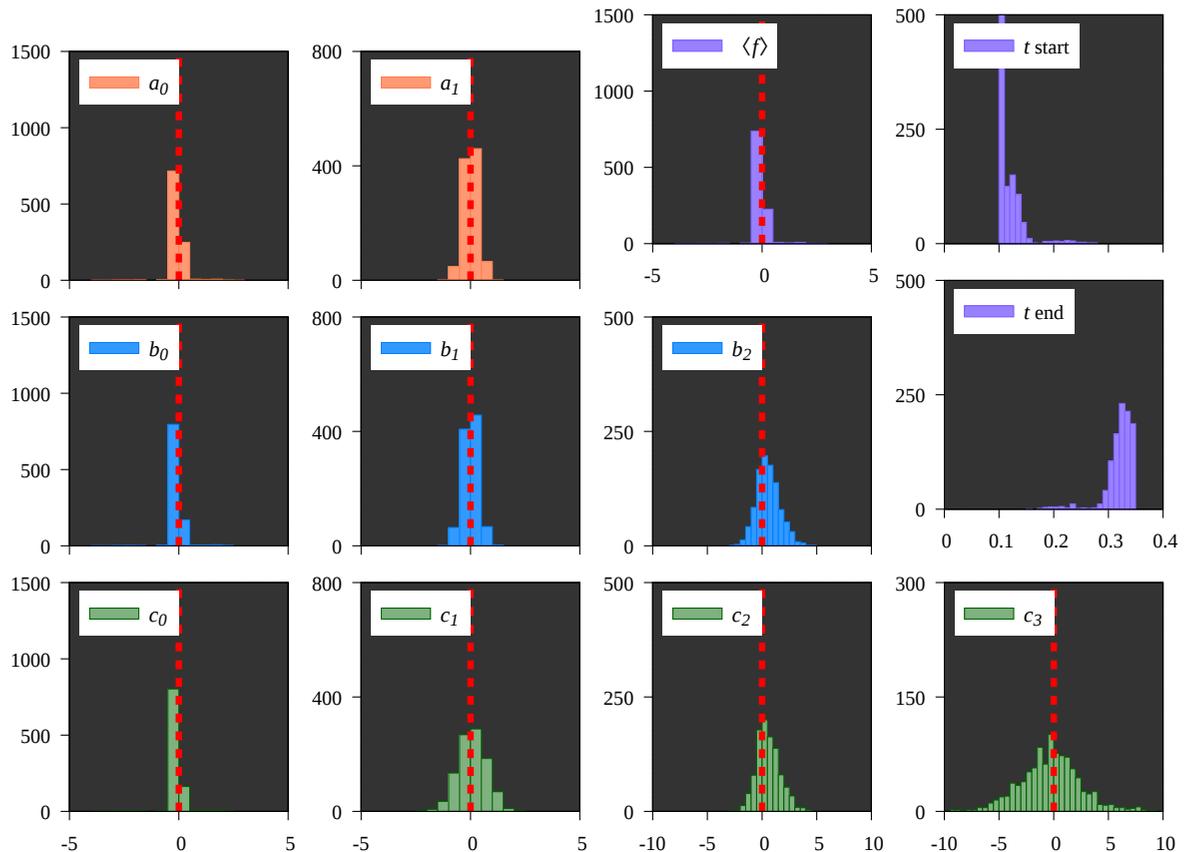


図 3.6: 試験波形の瞬時周波数のフィッティング係数のヒストグラム。赤色の点線は真の値であり、ヒストグラムの幅が太いほど誤推定が多いということ。  $a_0, b_0, c_0$  の横軸は  $\langle f \rangle$  を引いた値。  $\langle f \rangle$  の横軸は瞬時周波数の平均から  $f_{\text{const}} = 130 \text{ Hz}$  を引いた値。

### 3.2.2 重力崩壊型超新星爆発のシミュレーションから得られた重力波に対する解析

ここでは 3.2 章で提案した手法を、重力崩壊型超新星爆発のシミュレーションから得られた重力波に Hilbert-Huang transform を行なって得られた瞬時周波数に適用した。

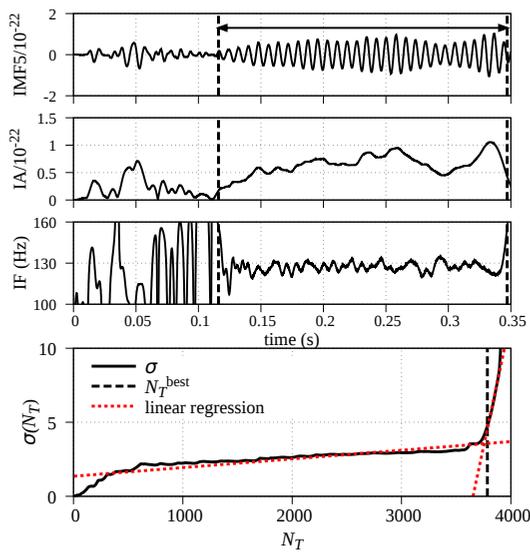
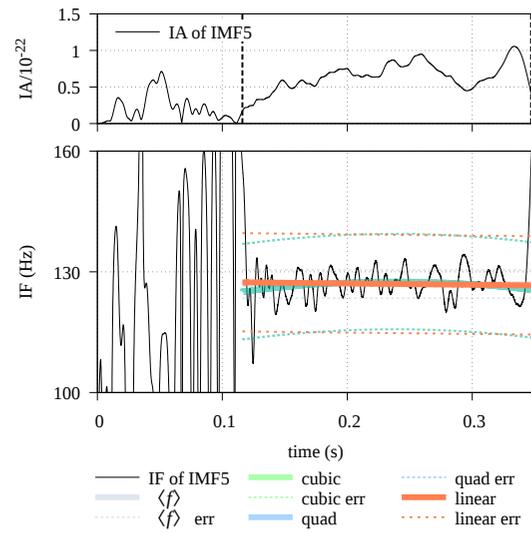
はじめに、SASI mode の開始時刻を推定した。まず、SASI mode を抽出している IMF5 の瞬時周波数における  $N_T - \sigma$  図 (図 3.7a) を計算した。次に、時間区間  $[0.0 \text{ s}, 0.35 \text{ s}]$  において  $N_T^{\text{best}}$  を計算した。次に、 $[N_{T, \text{min}}, N_T^{\text{best}}]$  と  $[N_T^{\text{best}}, N_{T, \text{max}}]$  の 2 つ領域それぞれに対して第二、第三の  $N_T^{\text{best}}$  を計算した。これらから、フィッティング誤差が最も小さい  $N_T^{\text{best}}$  を最適な値とした。結果を図 3.7a に示した。SASI mode は  $0.116 \text{ s} \lesssim t \lesssim 0.347 \text{ s}$  ( $t$  は時刻) で支配的であり、コアバウンス ( $t = 0 \text{ s}$ ) 後のコア内部の環境において、SASI が発生するまでに必要な時間は  $\sim 0.1 \text{ s}$  だと推定した。SASI の終了時刻はシミュレーションの計算が打ち切られた時刻に非常に近く、計算の停止時に SASI が一時的に弱まった影響だと推測される。

次に、SASI mode の瞬時周波数を解析した。SASI mode の瞬時周波数のトレンドの有無を、試験波形の時と同様にフィッティングを行い調べた。SASI mode が優勢な時間区間での瞬時周波数の重み付き平均は  $\langle f \rangle = 127.0 \pm 3.7 \text{ Hz}$  であった。フィッティングを図 3.7b、係数の値を表 3.2 に示した。定数項は  $1\sigma$  の範囲で瞬時周波数の平均値と無矛盾である。係数の評価のために、図 3.8 を用いて、推定した係数の値と手法の誤差を比較した。ヒストグラムは試験波形から得られた図 3.6 であり、赤色の破線は重力波に対して推定した係数の値、定数高に対しては瞬時周波数の平均との差である。灰色の領域は、重力波に対して推定したフィッティング係数の誤差範囲である。試験波形の瞬時周波数の平均のヒストグラムに対しては、重力波の瞬時周波数の平均の誤差範囲を灰色の領域として重ねて表示し、試験波形の開始時刻と終了時刻のヒストグラムに対しては、SASI mode の開始時刻と終了時刻の推定した値を赤色の破線で重ねて表示した。図 3.6 の  $b_2, c_2$  の赤色の破線から、SASI mode は時間変動している可能性が示唆されているが、係数の誤差である灰色の領域と手法の系統誤差であるヒストグラムの幅を考慮すると、この値は誤差の範囲内であることがわかる。そこから、今回解析した重力崩壊型超新星爆発モデル SFHx の SASI mode の瞬時周波数は、 $1\sigma$  で、時間変動している兆しはないと結論づけた。この結果は、異なる時間-周波数解析手法で同じ重力波波形を扱った先行研究 (Kuroda et al. [2016], Kawahara et al. [2018]) と一致しており、Hilbert-Huang transform の有用性を示している。したがって、Hilbert-Huang transform は今後期待される観測信号から SASI mode を解析することに有用であると期待できる。今後、シミュレーションから得られた重力波信号に重力波の検出器ノイズを重ね合わせた信号を解析することは重要である。

Kuroda et al. [2016] では、重力崩壊型超新星爆発が銀河系内で発生した場合、既存の地上重力波検出機 (Advanced LIGO, Advanced Virgo, KAGRA) で SASI mode を捉えることができる可能性を指摘している。したがって、性能を向上させた将来の地上重力波検出機である Einstein Telescope (Punturo et al. [2010]) や Cosmic Explorer (Abbott et al. [2017]) においても SASI mode が検出される可能性は高く、Hilbert-Huang transform の実用化に向けた研究は重力波天文学において意義のあることだと考えられる。

表 3.2: Fitting coefficients and errors of the IF

	Linear	Quadratic	Cubic
$\tau^0$	$127.0 \pm 1.1$	$127.6 \pm 1.4$	$127.6 \pm 1.4$
$\tau^1$	$-0.4 \pm 2.0$	$0.3 \pm 2.2$	$0.3 \pm 4.8$
$\tau^2$		$-1.9 \pm 3.9$	$-2.3 \pm 4.3$
$\tau^3$			$-0.1 \pm 8.4$
$f_{\text{err}}^{\text{fit}}$	12.2	11.9	11.9

(a) 重力波の  $N - \sigma$  図。矢印は推定した時間区間。

(b) 重力波の瞬時周波数をフィッティングした図。矢印で示した時間区間内で線形回帰を行った。

図 3.7: 重力崩壊型超新星爆発のシミュレーションから得られた重力波に対して Hilbert-Huang transform を行なって得られた瞬時周波数の解析

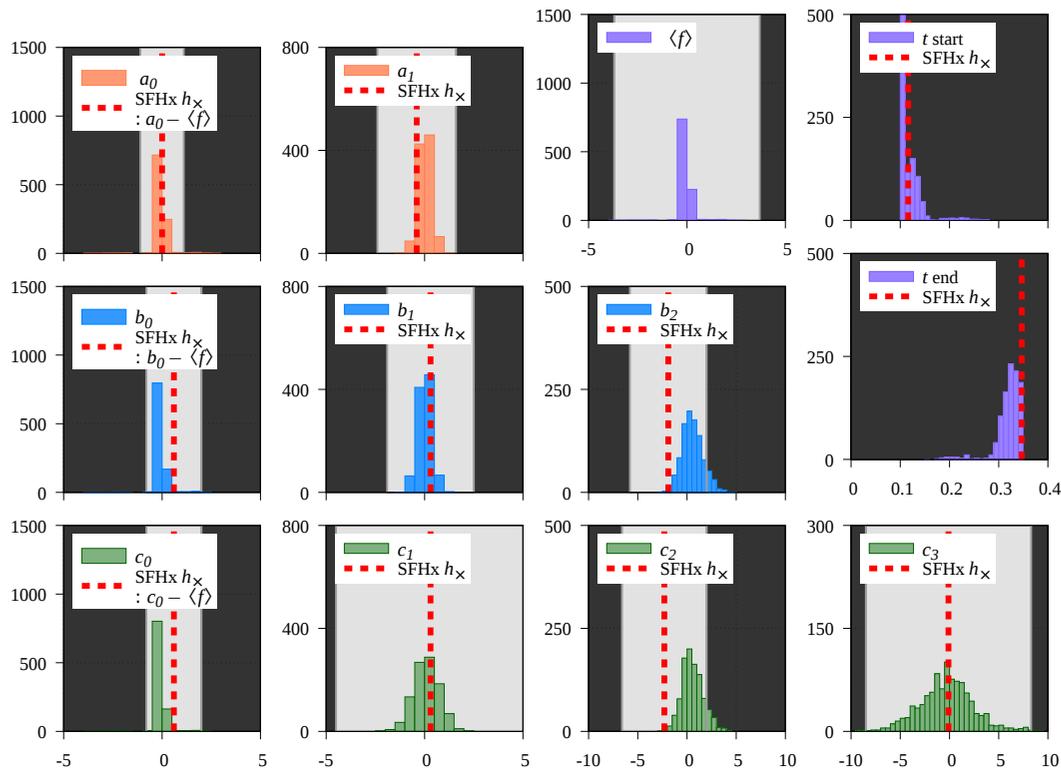
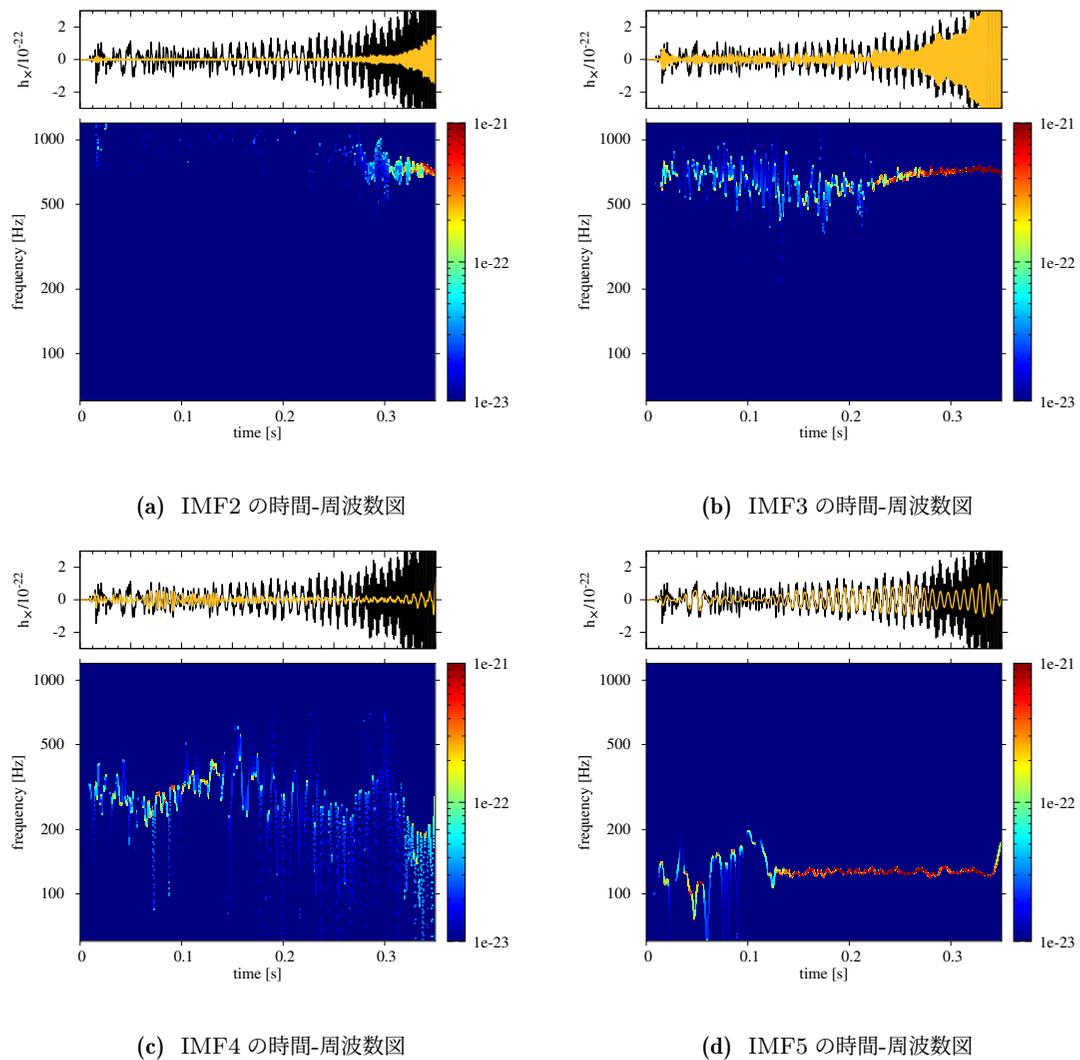


図 3.8: 重力波のフィッティング係数の推定値。背後のヒストグラムは、図 3.6 の試験波形の瞬時周波数のフィッティング係数のヒストグラムと同一。赤色の点線は超新星爆発の数値シミュレーションから得られた重力波の瞬時周波数をフィッティングして得られた係数。灰色の領域は、係数の  $1\sigma$  の誤差。瞬時周波数のヒストグラムの図と重ねて表示している灰色の領域は瞬時周波数の標準偏差の値。

### 3.3 g-mode の瞬時周波数の解析

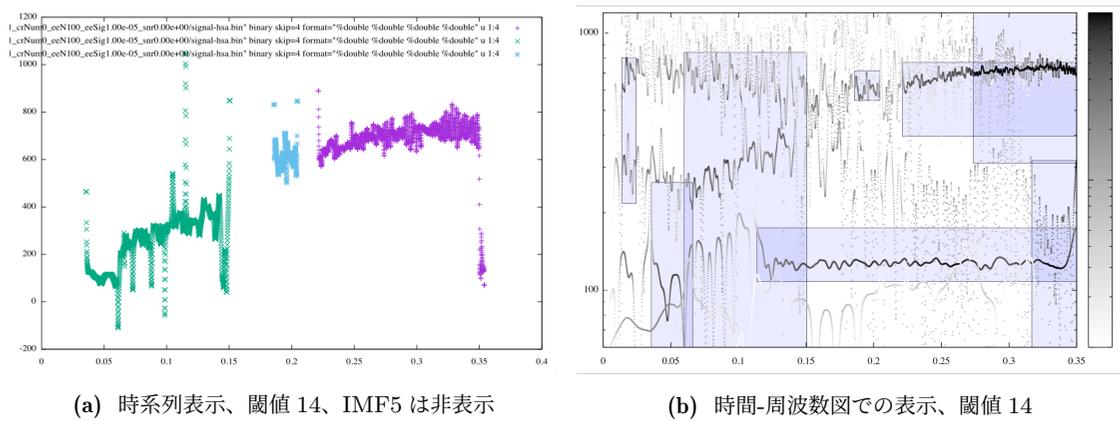
g-mode の周波数の時間発展は親星の回転の速さを反映している可能性が示唆されており (Morozova et al. [2018])、スペクトログラムから推定した g-mode の傾きと親星の回転との関係を調べた先行研究 Casallas-Lagos et al. [2021] もある。今後、Hilbert-Huang transform で得られた瞬時周波数を用いて親星の物理量を推定するためには、g-mode の再構成が必要である。IMF は番号が若い順から高い周波数帯をもつ関数であり、g-mode は広い周波数帯域をもつ信号なため複数の IMF に分かれてしまう。時間-周波数図を描く際には、複数の IMF を同じに出力しており、それぞれの IMF の g-mode が含まれている時間帯は瞬時振幅の値が大きいため繋がっているように見えるが、瞬時周波数は個々の IMF に対して計算しているため、複数の瞬時周波数のデータファイルに分裂している。ここでは、既述の時間-周波数領域におけるクラスタリング手法を用いて、3.1 章で得られた g-mode の再構成を行った。



**図 3.9:** 重力崩壊型超新星爆発のシミュレーションモデル SFHx からの重力波に Hilbert-Huang transform を行なって得られた IMF2-5 の時間-周波数図。それぞれの図の上段の黒色実線は解析した重力波であり、橙色実線は IMF の時系列データであり、下段は橙色実線の瞬時振幅と瞬時周波数から成る時間-周波数図である。3.1 章で得られた IMF と同じもの。時間-周波数領域内でグリッドを用意し、同じグリッドに該当する複数の瞬時振幅の値を足し合わせているため、カラーバーの値が実際の信号の振幅よりも大きくなっている。図 3.1b では、各時刻の値を点描画しているためカラーバーの値は同時刻の瞬時振幅の値そのもの。

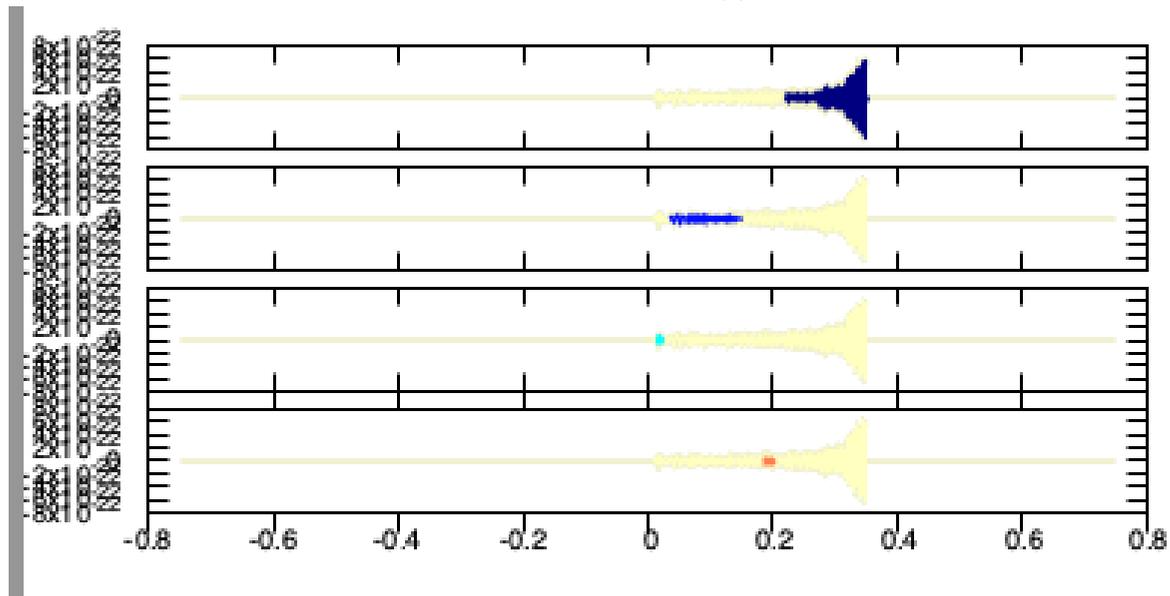
図 3.9 は個々の IMF から得られる瞬時周波数を瞬時振幅を使った時間-周波数図である。図 3.9b より、g-mode の最も信号が大きい時間帯は、IMF3 に抽出されていることがわかる。図 3.9a より、 $\sim 0.3$  s 以降、g-mode の一部が IMF2 へのモード分裂を起こしていることが分かる。図 3.9c より、IMF4 の  $\sim 0.15$  s までの瞬時周波数には、モード分裂した g-mode が表れていると考えられる。さらに、図 3.9d より IMF5 の  $\sim 0.1$  s 以前に、IMF4 と同じ程度の瞬時振幅をもつ瞬時周波数がある。これらの瞬時振幅の値が大きいところを抜き出すために閾値 14 でクラスタリングを行い、図 3.10b のようなクラスターを得た。SASI mode に該当するクラスターを除き、時間-周波数領域で重なっているクラスターの IMF を重ね合わせた時系列データが図 3.10c である。得られたクラスターのうち、SNR が高い順に 4 つ表示した。黄色実線は、元の重力波波形である。上から 1 番目、2 番目、4 番目の IMF に対してヒルベルトスペクトル変換を行い得られた瞬時周波数が図 3.10a である。今回用いた手法では、時間-周波数空間上で g-mode を繋げた状態で抽出できなかった。g-mode と別のモードが交差している時間帯は瞬時振幅が小さくなっているため、閾値を低くしてもクラスターを得られなかった。しかし、線形回帰を用いて g-mode の傾きを調査する際にはデータが不連続でも問

題ないため、式 (3.2.10) を用いた重み付き最小二乗法を用いてフィッティング係数を求めた。その際、 $\sim 0.35$  s 付近で瞬時周波数の値が急激に小さくなっているデータを取り除いた。結果は図 3.11 であり、フィッティング係数を表 3.3 にまとめた。重み関数には式 (3.2.5) を用いた。図 3.11c と表 3.3c はデータの外れ値を取り除いてフィッティングした結果である。図 3.11b と表 3.3b と比べて誤差の改善は得られず、瞬時周波数が振動していることが要因だと考えられる。スペクトログラムから g-mode を線形回帰して傾きを調べた先行研究 Casallas-Lagos et al. [2021] では同じ SFHx のシミュレーションモデルを扱っていないものの、無矛盾な結果が得られており、手法の有用性を示している。g-mode は爆発前の星の内部情報を反映しており、SASI mode と同様に、Hilbert-Huang transform で得られた g-mode から重力崩壊型超新星爆発の物理量の推定が有用であることが期待できる。



(a) 時系列表示、閾値 14、IMF5 は非表示

(b) 時間-周波数図での表示、閾値 14



(c) クラスターごとの表示。IMF5 を無視したクラスターのうち、SNR が高い上位 4 つ。

図 3.10: 重力崩壊型超新星爆発の数値シミュレーション SFHx から得られた重力波  $h_x$  の瞬時周波数のクラスタリング

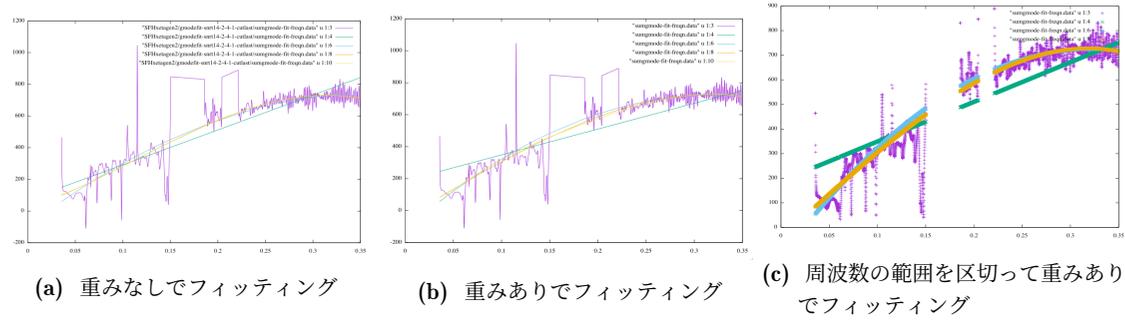


図 3.11: g-mode の傾きの推定。重み関数には瞬時振幅の二乗を使用。図 3.11c は周波数の範囲を区切ったデータに対して瞬時振幅の二乗の重みありでフィッティングした結果。最も早い時刻のクラスターの周波数範囲を  $30 < f < 600$  とした。他のクラスターへの制限はない。

表 3.3: Fitting coefficients and errors of the IF

(a) 重みなし			
	Linear	Quadratic	Cubic
$\tau^0$	$71.1 \pm 3.0$	$-94.4 \pm 5.1$	$14.1 \pm 9.4$
$\tau^1$	$2205.0 \pm 13.6$	$4554.6 \pm 63.7$	$2111.7 \pm 191.0$
$\tau^2$		$-6135.1 \pm 163.5$	$8391.2 \pm 1085.3$
$\tau^3$			$-24976.9 \pm 1845.7$
$f_{err}^{fit}$	$3.1e+7$	$2.5e+7$	$2.4e+7$

(b) 重みあり			
	Linear	Quadratic	Cubic
$\tau^0$	$187.6 \pm 7.1$	$-123.5 \pm 11.5$	$-43.9 \pm 26.2$
$\tau^1$	$1613.1 \pm 21.7$	$5278.9 \pm 109.4$	$3572.4 \pm 516.0$
$\tau^2$		$-8207.5 \pm 240.2$	$418.6 \pm 2560.0$
$\tau^3$			$-12644.6 \pm 3736.1$
$f_{err}^{fit}$	2447	1279	1268

(c) 周波数範囲を指定して重みあり			
	Linear	Quadratic	Cubic
$\tau^0$	$188.0 \pm 7.1$	$-123.0 \pm 11.5$	$-43.0 \pm 26.2$
$\tau^1$	$1612.0 \pm 21.7$	$5275.6 \pm 109.5$	$3559.9 \pm 516.1$
$\tau^2$		$-8201.7 \pm 240.2$	$470.6 \pm 2560.6$
$\tau^3$			$-12712.2 \pm 3736.8$
$f_{err}^{fit}$	2422	1277	1265

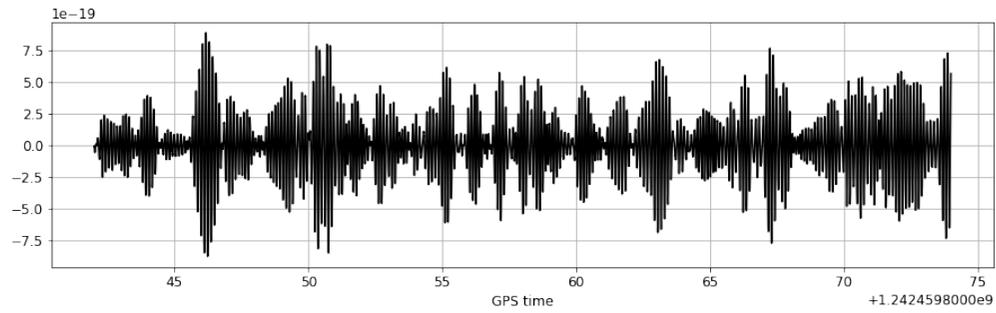
## 第4章

# ブラックホール連星合体からの重力波データ解析

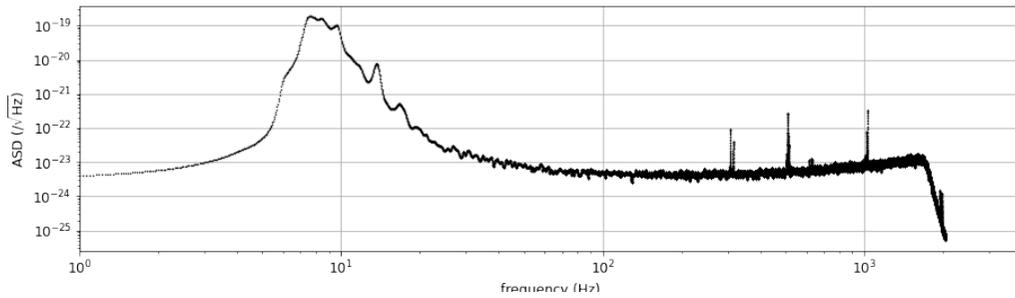
### 4.1 チャープ波形の抽出

ここでは重力波検出器 LIGO-Virgo によって観測されたブラックホール連星合体からの重力波 (Rich Abbott et al. [2021]) に対して Hilbert-Huang transform を行なった解析結果について説明する。

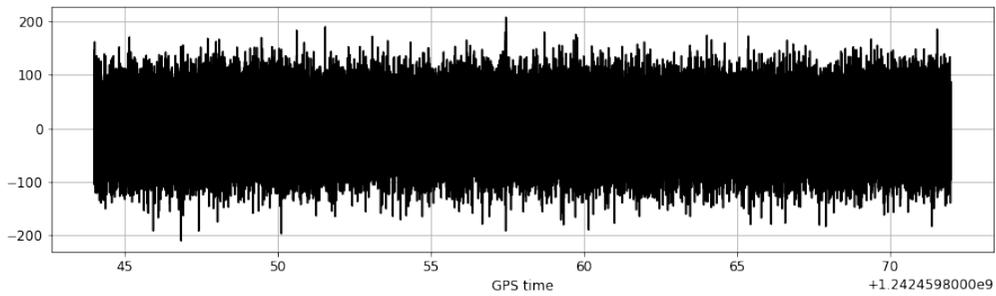
SNR の値が大きい重力波イベントである GW190521\_074359-v2 を例に、解析手法について説明する。はじめに、データの前処理としてホワイトニングを行った。ここでのホワイトニングは、周波数ごとに定常的な雑音スペクトルで規格化する操作である。その結果、雑音スペクトルによる構造を抑制し、天体起源の重力波信号成分が顕になる。図 4.1 は、図 4.1a をホワイトニングの過程を表している。ホワイトニングの手順は、まずサンプリング周波数 4096Hz の 32 秒間の時系列データにフーリエ変換を行なった。次に時系列データのパワースペクトル密度を Allen et al. [2012] に従って推定した。Welch 法の overlapping method に基づいて、hanning 窓を用いてデータを overlap50% の 4 秒間のセグメントに分けた。Welch 法では各セグメントの平均を用いるが、はずれ値の影響を抑えるために平均値の代わりに中央値を使用した。そして、推定したパワースペクトル密度に対して線形補間を用いて、元の時系列データをフーリエ変換したデータと周波数系列の分解能を等しくした。また、パワースペクトル密度の逆数には非常に狭い線状の特徴があり、このままでは鋭いノッチフィルタとして機能してしまう。それを防ぐため、Allen et al. [2012] に従い、周波数領域でのパワースペクトル密度の急激な変化を抑える処理を行なった。その際の窓関数は hanning 窓とし、時間領域フィルターの最大の長さを 4 秒 × サンプリング周波数とした。最後に、フーリエ変換した時系列データを、パワースペクトル密度の平方根である振幅スペクトル密度で割った後に、逆フーリエ変換を行なって時系列データ (図 4.1c) とした。さらに、解析時間を短縮するために、ホワイトニング済みの時系列データを 2 秒間に切り取って Hilbert-Huang transform を行った。



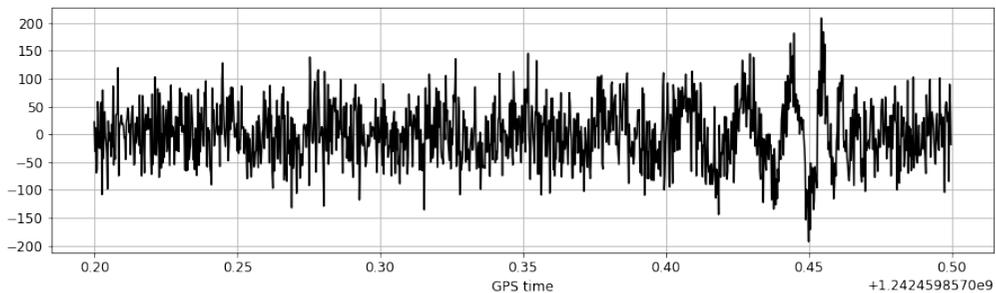
(a) GW190521\_074359-v2 の時系列データ



(b) GW190521\_074359-v2 の振幅スペクトル密度



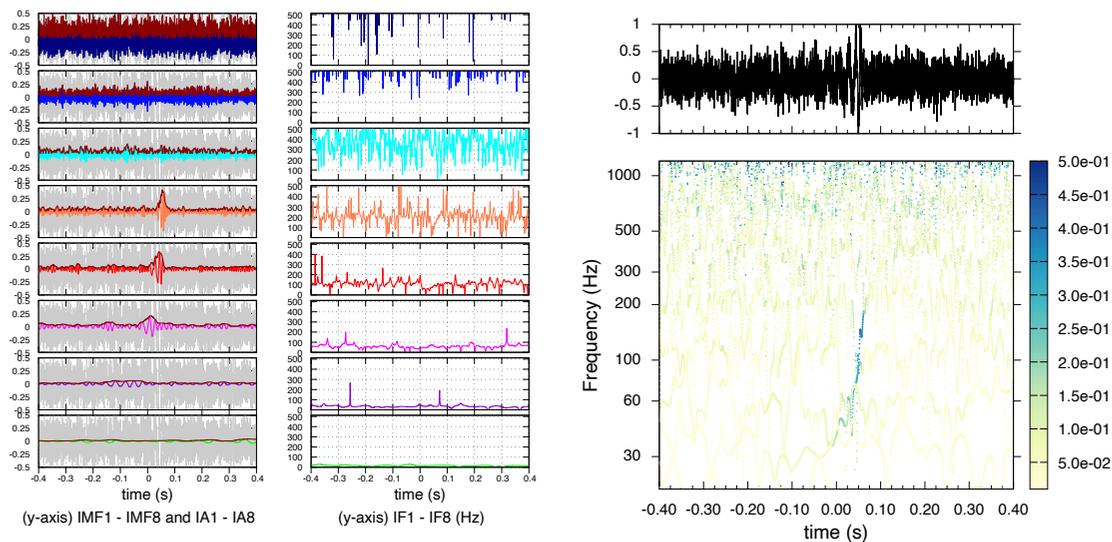
(c) GW190521\_074359-v2 にホワイトニングを行なったデータ



(d) GW190521\_074359-v2 のホワイトニングしたデータ (図 4.1c) を 2 秒間に切り取ったデータ。横軸は時刻であり、0 は GPS 時刻 1242459857 である。

図 4.1: 重力波データとホワイトニング後のデータ

図 4.1d Hilbert-Huang transform を行なって得られた結果を図 4.2 に示した。図 4.2a の左側の図は Ensemble EMD して得られた IMF であり、灰色の実線は Ensemble EMD する前の信号であり、茶色の実線はそれぞれの IMF の瞬時振幅である。図 4.2a の右側の図は左側の IMF から得られた瞬時周波数である。図 4.2b はホワイトニングした重力波と、瞬時周波数を瞬時振幅の大きさで色をつけた時間-周波数図である。時間-周波数図より、ブラックホール連星合体の合体直前あたりのチャープ信号を抽出できていることがわかる。図 4.2a より、チャープ波形は IMF3-6 に分かれて得られている。



- (a) ホワイトニングした GW190521\_074359-v2 に Hilbert-Huang transform を行なって得られた IMFs。横軸は時刻であり、0 は GPS 時刻 1242459857 である。
- (b) ホワイトニングした GW190521\_074359-v2 に Hilbert-Huang transform を行なって得られた時間-周波数図。横軸は時刻であり、0 は GPS 時刻 1242459857 である。

図 4.2: ホワイトニングした GW190521\_074359-v2 に Hilbert-Huang transform を行なって得られた IMF、瞬時振幅、瞬時周波数と時間-周波数図

Ensemble EMD ではブラックホール連星合体のチャープ波形のような周波数の時間変動が大きい信号は、複数の IMF に分かれる傾向がある。ここからさらに分裂したチャープ波形を再構成するために時間-周波数領域でのクラスタリングを用いた。クラスタリング手法は Son et al. [2021] にて提案された重力波イベント検出アルゴリズムを用いる。図 4.3 は時間-周波数領域における瞬時振幅が大きい領域をクラスターとし、クラスターの時間幅と周波数幅を箱として表した。箱が重なっているクラスターを統合して、チャープ波形を再構成した結果が図 4.4 である。それぞれの IMF の瞬時振幅が大きい領域を重ね合わせることで、チャープ波形を再構成することができた。再構成したチャープ波形は図 4.4 の上段であり、再構成したチャープ波形に対して Hilbert スペクトル解析を行って得られた瞬時周波数は図 4.4 の下段である。色は瞬時振幅の値を表している。チャープ波形を 1 つのデータとして取得できた、同様に瞬時周波数を 1 つのデータとして得ることができた。

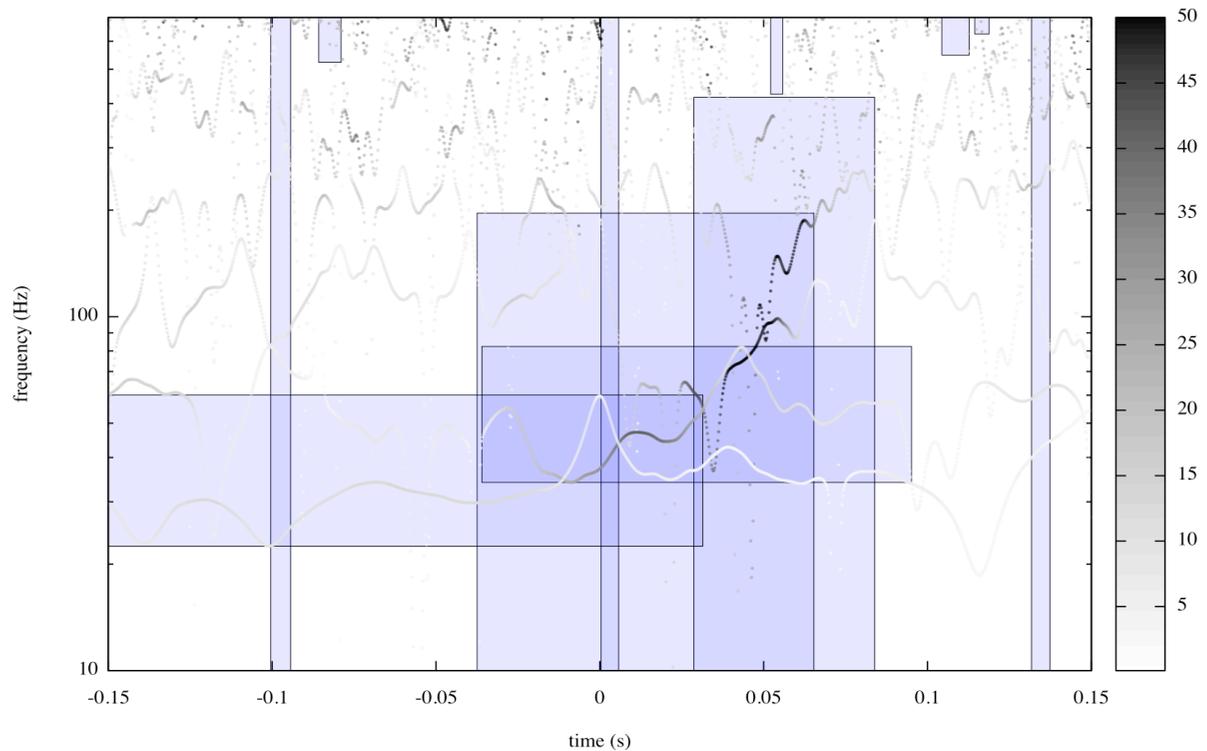


図 4.3: 図 4.2b と同じ時間-周波数図に瞬時振幅の大きさを基準に作ったクラスターを重ね合わせた図

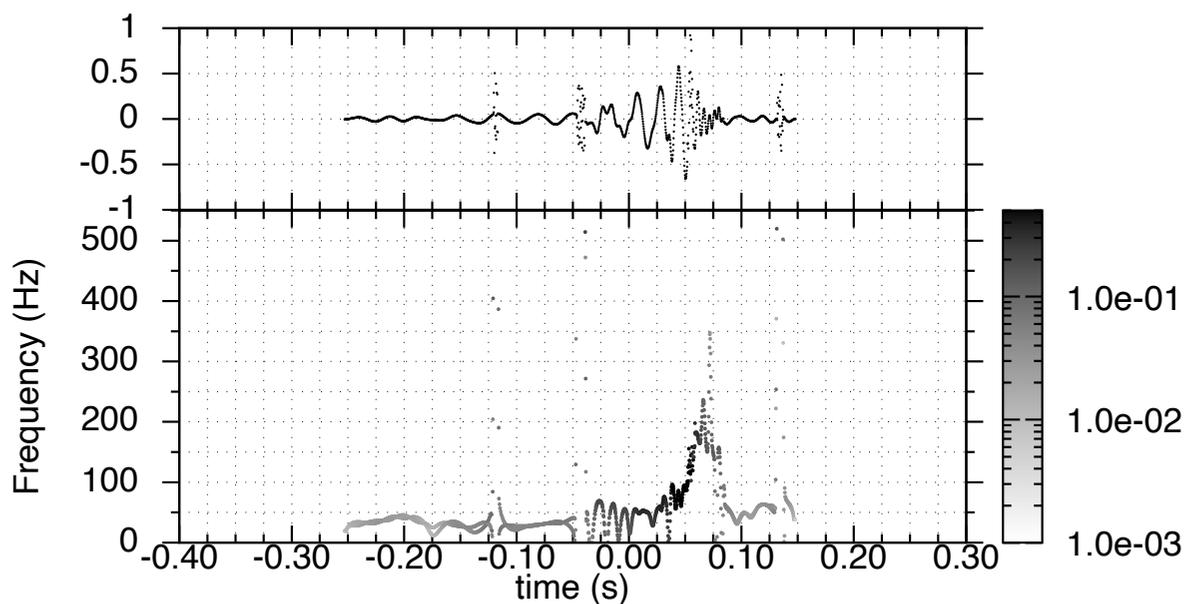


図 4.4: 再構成した重力波 GW190521\_074359-v2。上段は図 4.3 において重なっているクラスターを足し合わせた時系列データであり、下段は再構成したデータに Hilbert スペクトル解析を行って得られた瞬時周波数である。

チャープ波形の再構成では、 $-0.12, -0.04, 0.06, 0.14$  秒付近に高周波な雑音が含まれていることがわかる。これらの雑音は瞬時周波数にも同時刻に雑音として現れている。これらの雑音は、IMF1 や IMF2 に現れる非常に短い時間で大きい瞬時振幅の値をもつ領域であり、図 4.3 の縦に長細い四角形がそれらに該当する。雑音を除去する手法として、再構成したチャープ波形に対して Hilbert-Huang transform を行うことで高周波数成分を取り除くことを試みた。<sup>\*1</sup>結果を図 4.5 に示した。図 4.5a は

<sup>\*1</sup> 図 4.4 の上の図に現れているような雑音除去に Hilbert-Huang transform を用いる方法は、重力波データ解析ではない他分野で用いられている。

図 4.4 の上の図 (図 4.5a では灰色の実線で図示) に対して Hilbert-Huang transform を行って得られた IMF の一覧である。取り除きたい成分を IMF1 へ抽出することに成功した。チャープ波形は図 4.2a と同じように複数の IMF に分裂したため、雑音成分以外の IMF を重ね合わせてチャープ波形を再構成した。図 4.5b は、図 4.5a の IMF1 以外を重ね合わせたデータ (上の段の黒色実線) と、それに対して Hilbert スペクトル解析 を行って得られた瞬時周波数である。色は、同時刻の瞬時振幅の値である。図 4.4 と比べて、時間-周波数領域での雑音が軽減されており、かつ、1 つの瞬時周波数のデータとして得ることに成功した。

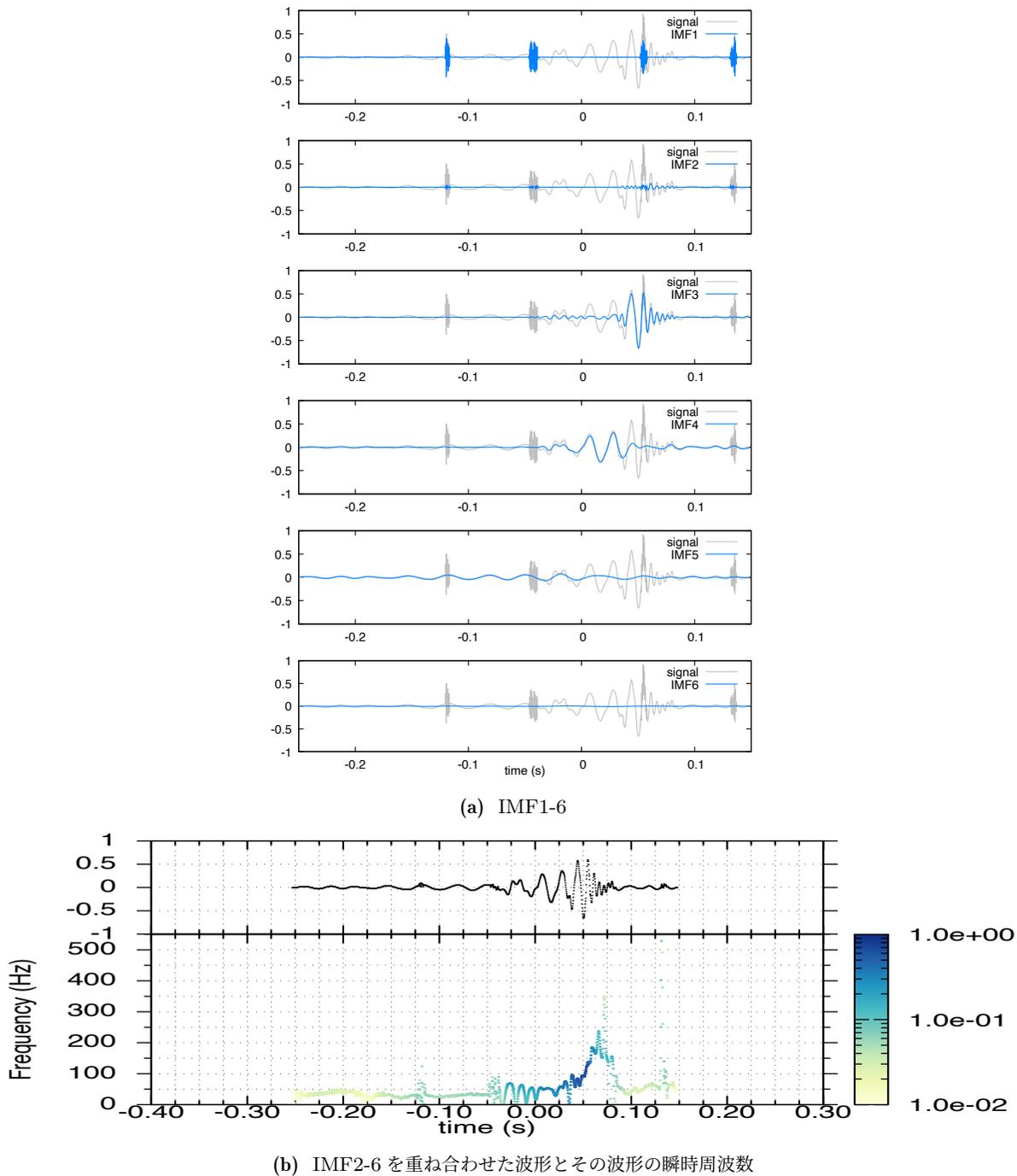


図 4.5: Hilbert-Huang transform を用いたチャープ波形の雑音除去。

チャープ波形の瞬時周波数を得ることができたため、次の式を用いてチャープ質量の推定を行った。

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{5}{256(-(t-t_0))} \right)^{3/8} \left( \frac{GM}{c^3} \right)^{-5/8} \quad (4.1.1)$$

式 (4.1.1) はポストニュートンの最低近似の式である (Maggiore [2007])。この式を用いて非線形最小二乗法を用いて瞬時振幅の 2 乗の重みでフィッティングした結果を図 4.6 に示し、推定したチャープ質量の値を表 4.6 に示した。青色の点で描画されたデータはフィットに用いた瞬時周波数である。赤色の実線は推定されたチャープ質量を式 4.1.1 に代入して得られた曲線である。橙色の実線は LIGO-Virgo によって推定されたチャープ質量を式 4.1.1 に代入して得られた曲線である。推定結果の違いの原因として、解析手法の違いが考えられる。Hilbert-Huang transform では重力波波形の仮定はせずに、瞬時周波数を取り出してからポストニュートンの最低近似でフィッティングしている。これに対して、LIGO-Virgo による手法では、事前にポストニュートンの高次の項を含んだ重力波波形を数多く用意して、最適な重力波波形を探している。また、瞬時振幅が小さいところは瞬時周波数の誤差が大きいことから、その時刻の瞬時周波数の重みを小さくした。すなわち、inspiral 期ではなく、合体直前の瞬時周波数の値が特に効いている。一方で、LIGO-Virgo による手法では、inspiral 期は推定によく効いている。このような理由から、本研究と LIGO-Virgo によるチャープ質量の推定量の差異があると考えられる。

表 4.1: 推定したチャープ質量の比較。推定量の範囲は本研究はフィッティングから得られた 90% 信頼区間であり、LIGO-Virgo による結果 (LIGO-Virgo-KAGRA [2023b]) はベイズ統計学に基づいたパラメータ推定における 90% 信用区間である。

	チャープ質量
本研究による推定量	$39.7^{+0.7}_{-0.6}$
LIGO-Virgo による推定量	$32.8^{+3.2}_{-2.5}$

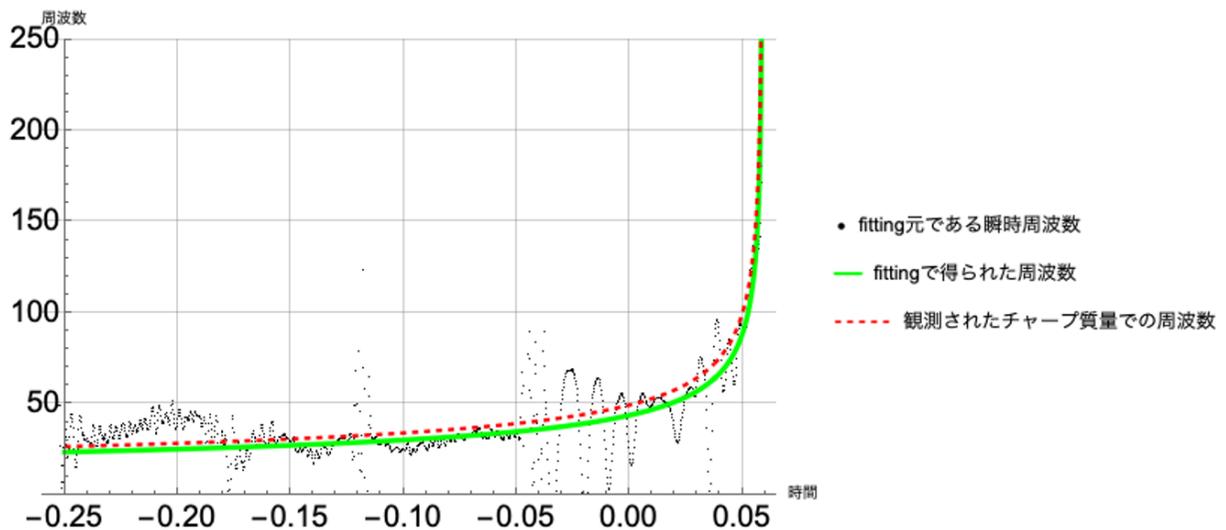


図 4.6: 再構成した GW190521\_074359-v2 の瞬時周波数とフィッティング曲線

## 4.2 リングダウン重力波の分離

これまでの章で扱った重力波の波形は、波のサイクル数が十分多いものであった。この章では、コンパクト天体連星合体後のブラックホールが生成されるときに放射される重力波のような、急激に振幅が減衰し、サイクルの数が少ない波の分解に焦点をあてる。Hilbert-Huang transform のモード分解は経験的なものであり、数学的にどのような波形が可能かを確認することは容易ではない。ここでは雑音を含まない簡単な試験波形を用意し、Hilbert-Huang transform を用いて ringdown phase のような波形から複数のモードを分解することが可能かどうかを確認する。

試験波形の生成は先行研究 Atsuta [2017] に倣った。合体後に生成されるカー・ブラックホールは準固有振動を持つことが予言されており、放射される重力波は次のような減衰正弦波の形で記述される。(Echeverria [1989], Berti et al. [2006])

$$h_{lmn}(t) = A_{lmn} \exp(-t/\tau_{lmn}) \sin(2\pi f_{lmn}t + \phi_0) \quad (4.2.1)$$

$$(4.2.2)$$

$l, m$  は球面調和関数の添字であり高調波を表し、 $n$  は倍音を表す。 $A_{lmn}$  は振幅、 $\tau_{lmn}$  は減衰時間、 $f_{lmn}$  は準固有振動の周波数、 $\phi_0$  は初期位相を表す。 $f_{\text{Re}} = f_{lmn}$  を準固有振動の実部とすると、虚部  $f_{\text{Im}}$  は  $2\pi f_{\text{Im}} = \frac{1}{\tau}$  である。周波数と減衰時間は次のような規格化した物理量を用いて表される。

$$f_{lmn} = \frac{F_{lmn}}{2\pi M} \quad (4.2.3)$$

$$\tau_{lmn} = \frac{Q_{lmn}}{\pi F_{lmn}} \quad (4.2.4)$$

$M$  は規格化されたブラックホールの質量  $M_{\text{BH}}$ 、 $F_{lmn}$ 、 $Q_{lmn}$  は無次元化された周波数と  $Q$  値であり、次のような近似式で記述される。Berti et al. [2006]

$$F_{lmn} = M\omega_{lmn} = f_1 + f_2(1-j)^{f_3}, \quad (4.2.5)$$

$$Q_{lmn} = \pi f_{lmn} \tau_{lmn} = q_1 + q_2(1-j)^{q_3}, \quad (4.2.6)$$

$$M = \frac{M_{\text{BH}} G}{c^3}, \quad (4.2.7)$$

$$j = \frac{cJ}{GM_{\text{BH}}^2} \quad (4.2.8)$$

$j$ , ( $0 \geq j \geq 1$ ) は無次元化されたブラックホールの角運動量、 $J$  はブラックホールの角運動量、 $G$  は万有引力定数、 $c$  は光速  $M$  は万有引力定数および光束で規格化されたブラックホールの質量。 $f_i, q_i$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) はフィッティングによって推定された値であり、具体的な数値は表 4.2。

表 4.2: フィッティング係数表 Berti et al. [2006]

$(l, m, n)$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
210	0.6000	-0.2339	0.4175	-0.3000	2.3561	-0.2277
220	1.5251	-1.1568	0.1292	0.7000	1.4187	-0.4990
330	1.8956	-1.3043	0.1818	0.9000	2.3430	-0.4810
440	2.3000	-1.5056	0.2244	1.1929	3.1191	-0.4825

モードごとの振幅の比率は合体前の連星の質量比によって変化することが知られている。質量比を次のように定義と、

$$q = \frac{m_1}{m_2}, (m_1 > m_2) \quad (4.2.9)$$

$$\nu = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}, \quad 0 \leq \nu \leq 0.25 (m_1 = m_2) \quad (4.2.10)$$

$$= \frac{q}{(1+q)^2} \quad (4.2.11)$$

振幅比は Gossan et al. [2012] で行われたフィッティングから

$$A_{22} = 0.864\nu \quad (4.2.12)$$

$$A_{21} = 0.52(1 - 4\nu)^{0.71} A_{22} \quad (4.2.13)$$

$$A_{33} = 0.44(1 - 4\nu)^{0.45} A_{22} \quad (4.2.14)$$

$$A_{44} = (5.4(\nu - 0.22)^2 + 0.44)A_{22} \quad (4.2.15)$$

となる。 $n = 0$ 。式 (4.2.12) の関係を示した図を引用したものが図 4.7。ここでは、 $A_{22} = 1$  とした。

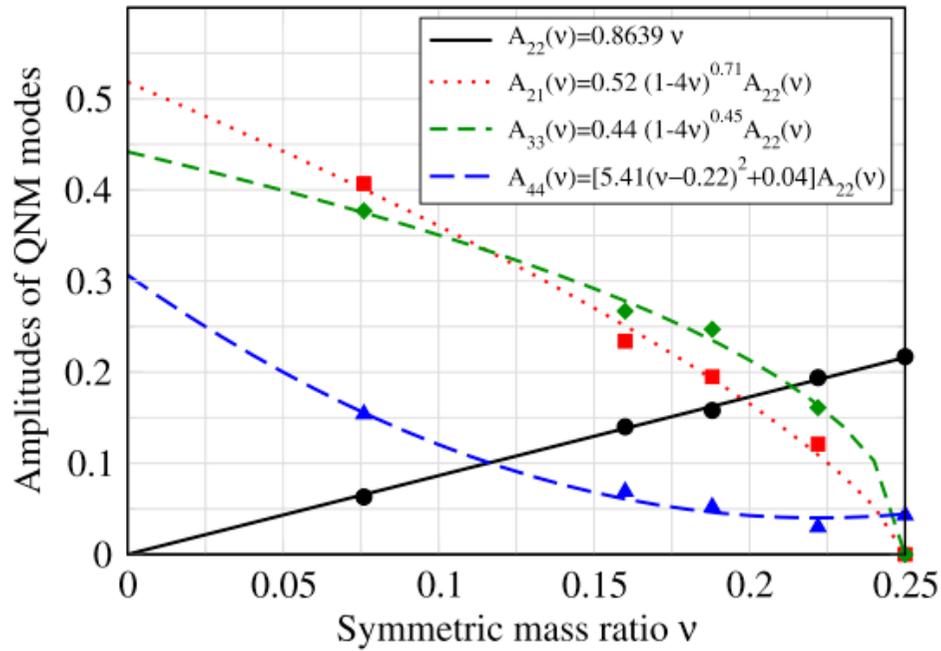


図 4.7: 合体後に励起される準固有振動のモードの振幅比と合体前の連星の質量比に対するフィッティング結果。Gossan et al. [2012] より引用。

ここでは、ringdown phase の波形 (式 4.2.1) とニュートン力学で記述された inspiral phase の波形  $h_{\text{chirp}}$  を位相が 0 の時刻で繋げて試験波形を生成した。inspiral phase の波形は Shinkai [2018] から

$$h_{\text{chirp}}(t) = \frac{GM_c}{c^2 d \omega(t)^{1/4}} \sin(-2\omega(t)^{5/8}) \quad (4.2.16)$$

$$\omega(t) = \frac{c^3(t_c - t)}{5GM_c} \quad (4.2.17)$$

とした。 $t_c$  は合体時刻、 $M_c = (m_1 m_2)^{3/5} (m_1 + m_2)^{-1/5}$  はチャープ質量、 $d = 10 \text{ kpc}$  は距離である。サンプリング周波数は 16384 Hz とし、ringdown phase の振幅には  $\frac{M_{\text{BH}} G}{dc^2}$  を掛けてから、 $(l, m, n) = (2, 1, 0), (2, 2, 0), (3, 3, 0), (4, 4, 0)$  モードを重ね合わせた (Berti et al. [2006])。Hilbert-Huang transform は波形モデルを用いない解析手法であり、Hilbert-Huang transform のモード分離性能を確認する上では簡易化された波形で十分である。内容をさらに発展させてパラメータ推定や系統誤差の推定等を行う際には、一般相対性理論に基づいた波形を用いることが望ましい。連星の質量は  $35M_\odot, 30M_\odot$  とし、合体後のブラックホールの質量は  $63M_\odot$ 、スピンは 0.69 とした。生成した波形が図 4.8 である。

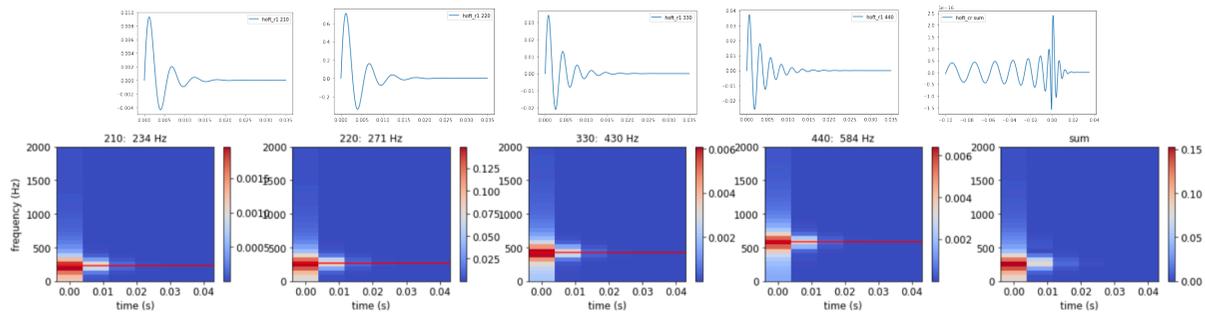


図 4.8: 解析した波形質量は  $m_1 = 35.6M_\odot$ ,  $m_2 = 30.6M_\odot$ , final mass =  $63.1M_\odot$ , final spin = 0.69,  $m_2/m_1 = 0.86$ ,  $\nu \sim 0.25$

生成した試験波形を Ensemble EMD を用いて Hilbert-Huang transform し、準固有振動からの重力波を分離できるかどうか確認した。結果が図 4.9 である。IMF3 が  $(l, m, n) = (3, 3, 0)$  の周波数である 430Hz 付近にピークをもち、IMF4 が基本モード付近にピークをもって分離されていることがわかる。ここから、Hilbert-Huang transform を用いて高次モードを分離できる可能性を示した。

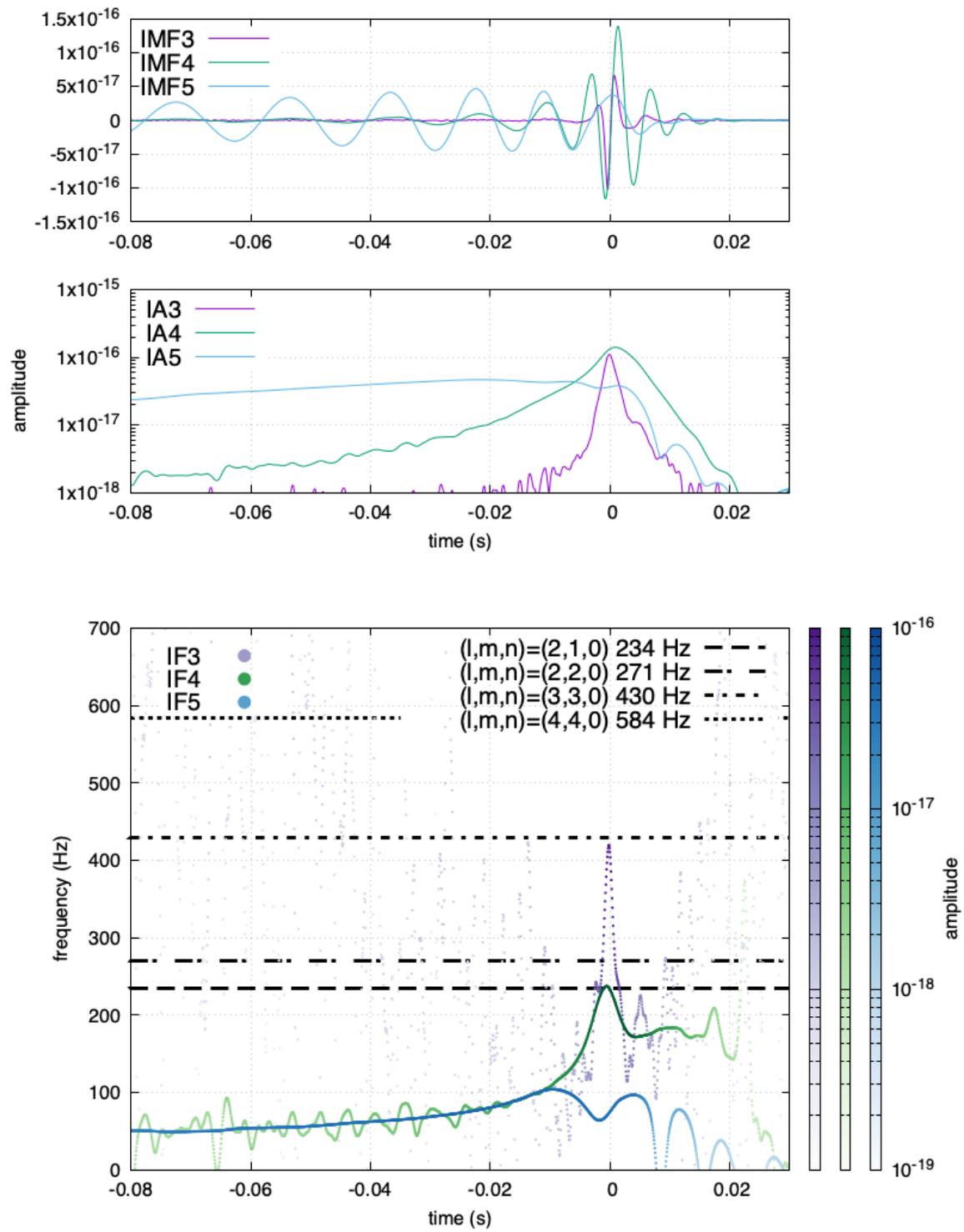


図 4.9: IMF3-5 とその瞬時振幅と瞬時周波数。 $\{\epsilon, N, \sigma_{\text{eemd}}\} = \{0.7, 10^5, 10\}$  1 番下の図の水平な破線は、周波数の真の値である。

## 第5章

# 議論と結論

本研究では、重力崩壊型超新星爆発やブラックホール連星合体のような突発に発生する重力波源からの重力波に対して、時間-周波数分解能が高い時間-周波数解析手法の一種である Hilbert-Huang transform を用いたデータ解析手法の研究を行なった。本研究の最終目標は、重力波の波形モデルを用いずに重力波検出器の信号から天体現象を起源とする重力波を抽出し、重力波源の物理的な情報を得ることである。重力波の波形モデルを用いない解析手法は、重力波源で起こる物理現象についての理論的な説明が研究途上である場合や、乱流などが発生することで波形が確率的に変化する場合など、波形モデルを用意できない重力波に対して必須である。また、波形モデルが用意できる重力波源に対しても、異なる解析手法から得られた結果が無矛盾であることを確認する役割を担える。

天体現象の観測媒体としての重力波は今後の天文学の発展に大きな意味をもつ。例えば、電磁波観測が難しい天体現象の観測が可能となり、重力波の高い透過性によって源の情報を保持する特徴によって、直接的に物理量を推定できるようになった。現在までに 90 個のコンパクト天体連星合体からの重力波が観測されており、2023 年の春には 4 度目の国際共同観測運転 (Observing runs: O4)、2027 年には O5 と実施されることが宣言されており、今後も多くの重力波イベントが観測されると期待されている。さらに、現在稼働している重力波検出器よりも高い性能をもつ検出器の建設の計画されている。多くのブラックホール連星合体からの重力波イベントが観測され、連星の質量が推定されたことによって、質量分布を推定することができる。(Abbott et al. [2019b, 2021c,a]) 重力波が推定した質量は、それまで想定されていた質量分布とは異なる形をとっており、新たな恒星進化モデルが必要となった。そしてそれらのモデルを検証するには、さらに多くの重力波イベントが必要となる。波形モデルを用いずにチャープ質量を推定することは相補的な検証であり、波形モデルが不十分、もしくは一般相対理論が予言する特徴と異なる重力波を検出する可能性を持っている。異なる複数の検出アルゴリズムを用いて、それらの結果が一致していることが結果の信憑性に繋がる。現在の重力波観測グループでも複数の異なる重力波解析手法を用いているが、Hilbert-Huang transform はそれらと異なる原理をもったアルゴリズムであり、瞬時周波数を定義しているという面で独創的な利点をもつ。本研究ではブラックホール連星合体からの inspiral phase から merger phase にかけてのチャープ信号のような、短時間で急激に周波数が増加する重力波を抽出することができた。その際、複数の固有モード関数に分かれて得られるが、それらを再構成する手法を提案した。さらに、ブラックホール連星合体からの重力波は複数の固有モード関数に分かれるが、時間-周波数空間でクラスタリングする方法を応用し、一つの信号として再構成した。ここから得られた瞬時周波数からチャープ信号をフィッティングにより推定し、瞬時周波数を用いて質量を推定できる可能性を示した。

リングダウンは周波数と減衰率という 2 つの重要な物理量をもつ。しかし、リングダウンは時間が非常に短いため、その時間に合わせて時間分解能を高くすると変わりに周波数分解能が低くなる。すると周波数の推定の不定性が大きくなり、高次モードの分離も容易ではなくなる。一方で、周波数分解能を高くすると、時間分解能が低くなるため、減衰率の推定の不定性が大きくなる。また、

時間-周波数図を画像として得る解析手法では、周波数の時間変動などを間接的に得ることになる。Hilbert-Huang transform は、瞬時周波数を定義した時間-周波数解析手法であるため、分解能のトレードオフの關係に縛られず、かつ信号から直接的に周波数の時間変動を推定することが可能であるため、リングダウンの物理量の推定に有用な可能性がある。本研究では、理論から予言された重力波波形を用いて、Hilbert-Huang transform を用いて高次モードを分離することが可能であることを示した。

本研究では新たに、重力崩壊型超新星爆発からの重力波に対しての有用性を確認した。重力崩壊型超新星爆発からの重力波は観測されていないため、重力崩壊型超新星爆発の数値シミュレーションから得られた重力波を用いた。それにより、重力崩壊型超新星爆発の爆発に重要な役割を担っている可能性が示唆されている、星のコア内部で発生する流体现象の一種である定在降着衝撃波不安定性 (standing accretion shock instability: SASI) によって誘発されると考えられている重力波のモードを抽出することに成功した。今回解析した爆発前の星のコア内部から放射される重力波は、対流によって原始中性子星が振動すること (g-mode) によって放射される重力波が存在し、短時間で約 1kHz もの周波数モードをもつ。一方、SASI が誘発する重力波は約 100 – 200Hz の周波数モードをもつため、先行研究では時間-周波数の分解能のトレードオフの關係から、時間変動がぼやけてしまう。本研究では先行研究とは異なる原理をもつ Hilbert-Huang transform を用いて、g-mode からの周波数モードと SASI が誘発した周波数モードの両方を先行研究よりも高い時間-周波数分解能で解析することが可能であることを初めて示した。さらに、Hilbert-Huang transform で定義される瞬時周波数を解析することで、それぞれの重力波の周波数モードの抽出と、時間変動の有無を推定する方法を提案した。Hilbert-Huang transform ではヒルベルトスペクトル解析を適用するために信号を経験的に分解しているため、信号の形状が変わる Hilbert-Huang transform の解析パラメータの最適値が変動する。誤差を定量的に評価するため、同じ確率分布から生成したホワイトガウス雑音と試験波形を重ね合わせた信号を多数用意し、時間変動の系統的な誤差を推定した。

本研究では、3つの波形を用いて、Hilbert-Huang transform が突発天体からの重力波に対して汎用的な解析手法であることを示した。今後の重力波データ解析において、Hilbert-Huang transform を用いた手法のさらなる発展が期待できると考えられる。

表 5.1: 本研究で解析した波形の特徴のまとめ

重力波の種類	シミュレーションから 求められた 重力崩壊型超新星爆発 Kuroda et al. [2016]	ブラックホール連星合体 の合体前	理論的に予言された ブラックホール連星合体 の合体後
典型的特徴	周波数差が大きく、 一方は周波数が急激に上昇し、 一方は周波数の変動が乏しい、 異なる時間変動をする 2つのモードが 重なり合っている波	周波数が急激に上昇する 1つのモードをもつ波	非常に短い時間で減衰する 大きい振幅比で 重なり合っている波
着目したモードの 時間スケール	~ 350 ms	~ 100 ms	$\lesssim 1$ ms
Hilbert-Huang 変換 を行って 抽出したモード	<b>SASI-mode, g-mode</b>	inspiral から merger	準固有振動の高次モード
関連する物理量	状態方程式、 原始中性子星の質量、半径	チャープ質量	ブラックホールの 質量、スピン
物理学への 関連事項	爆発メカニズム	ブラックホール連星の形成	一般相対性理論の検証



## 付録 A

# 中央絶対偏差と標準偏差の比

ここでは Rousseeuw and Croux [1993], Akinshin [2022] に従う。

平均  $\mu$  が 0、分散  $\sigma$  が 1 の標準正規分布の確率密度関数は次のように表される。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad (\text{A.0.1})$$

標準正規分布に従う確率変数を  $Z$  とする。確率変数  $Z$  が  $x$  以下の値をとる確率を表す累積分布関数を  $\Phi(x)$  とする。

$$\Phi(x) = P(Z \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad (\text{A.0.2})$$

$a$  を任意の実数とすると、標準正規分布が偶関数なことから

$$P(Z \leq -a) = \int_{-\infty}^{-a} f(t) dt = \int_{\infty}^a f(t) dt = P(Z \geq a) \quad (\text{A.0.3})$$

となり、

$$P(Z \geq -a) = P(Z \leq -(-a)) = P(Z \leq a) \quad (\text{A.0.4})$$

かつ、

$$P(Z \geq a) = 1 - P(Z \leq a) = 1 - \Phi(a) \quad (\text{A.0.5})$$

である。任意の実数  $a, b$  について  $a \geq b$  のとき

$$P(a \leq Z \leq b) = P(Z \leq b) - P(Z \leq a) = \Phi(b) - \Phi(a) \quad (\text{A.0.6})$$

正規分布に従う確率変数  $X$  に対する中央絶対偏差と標準偏差の比例係数  $\gamma$  を導出する。

$$\sigma = \gamma \text{MAD}(X) \quad (\text{A.0.7})$$

$\text{MAD}(X)$  は  $|X - \text{median}[X]|$  の中央値であり、正規分布のとき平均値  $\mu$  と中央値  $\text{median}[X]$  は同じであるため、

$$P(|X - \mu| \leq \text{MAD}(X)) = \frac{1}{2} \quad (\text{A.0.8})$$

となる。  $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$  として  $\sigma > 0$  なので

$$|X - \mu| \leq \text{MAD}(X) \Leftrightarrow \frac{|X - \mu|}{\sigma} \leq \frac{\text{MAD}(X)}{\sigma} \Leftrightarrow |Z| \leq \frac{\text{MAD}(X)}{\sigma} \quad (\text{A.0.9})$$

よって

$$\Phi(\text{MAD}(X)/\sigma) - \Phi(-\text{MAD}(X)/\sigma) = \frac{1}{2} \quad (\text{A.0.10})$$

$$\Phi(\text{MAD}(X)/\sigma) - \{1 - \Phi(\text{MAD}(X)/\sigma)\} = \frac{1}{2} \quad (\text{A.0.11})$$

$$\Phi(\text{MAD}(X)/\sigma) = \frac{3}{4} \quad (\text{A.0.12})$$

$$\text{MAD}(X)/\sigma = \Phi(3/4)^{-1} \sim 0.67449 \quad (\text{A.0.13})$$

と、正規分布のときの中央絶対偏差と標準偏差の比が導出された。 $\Phi(x)^{-1}$  は累積分布関数の逆関数である。よって、 $\sigma = \frac{1}{\Phi(3/4)^{-1}} \text{MAD}(X) \sim 1.48 \text{MAD}(X)$  より、 $\gamma \sim 1.48$  となる。

## 付録 B

# Gravitational-wave Transient Catalog に掲載されたイベントの時間-周波数図

### B.1 抽出したチャープ波形と瞬時周波数

ここでは 4.1 で説明した解析手法を、gravitational-transient catalog(GWTC)Abbott et al. [2016, 2021b,d,a] に掲載された confident イベントに対して用いた結果を示す。confident イベントとは、 $p_{\text{astro}} > 0.5$  である重力波イベントのことを指す。 $p_{\text{astro}}$  とは、信号が重力波ではなくノイズである確率を、1 から引いた値である。

重力波の confident イベントに対して HHT を適用し、IMF を再構築した結果が図 B.1-B.2 である。

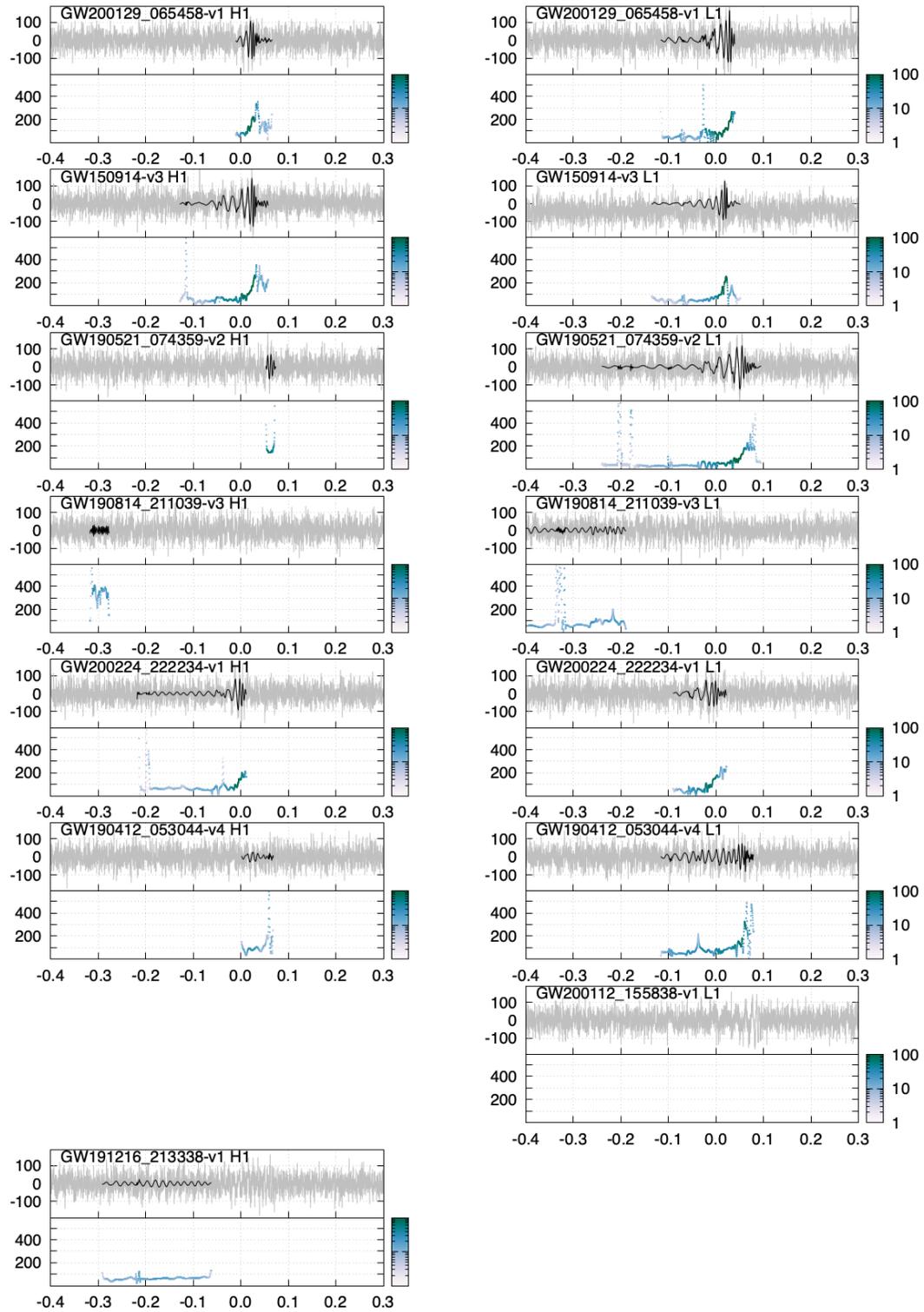


図 B.1: ホワイトニングした観測信号に Hilbert-Huang transform を用いた後にクラスタリングによって再構成した重力波波形。上図の灰色の実線はホワイトニングした重力波信号である。上図の黒色の実線は灰色の実線の波形に Hilbert-Huang transform を用いた後にクラスタリングによって再構成した重力波波形である。下図は上図の黒色の実線を HSA して得た瞬時周波数であり、色は同時刻の瞬時振幅の値である。ホワイトニングした重力波を Hilbert-Huang transform を用いた際のパラメータは  $\{\epsilon, N_{\text{eemd}}, \sigma_{\text{eemd}}\} = \{10^{-4}, 10^4, 1\}$  であり、ノイズ除去のためにもう一度 Hilbert-Huang transform を用いた際のパラメータは  $\{\epsilon, N_{\text{eemd}}, \sigma_{\text{eemd}}\} = \{10^{-1}, 10^4, 10\}$  である。空欄は検出器が動いていなかった都合から観測データがないということ。0 秒は LIGO-Virgo による重力波解析用ライブラリ pycbc の定義に基づいたそれぞれのイベントの合体時刻である。

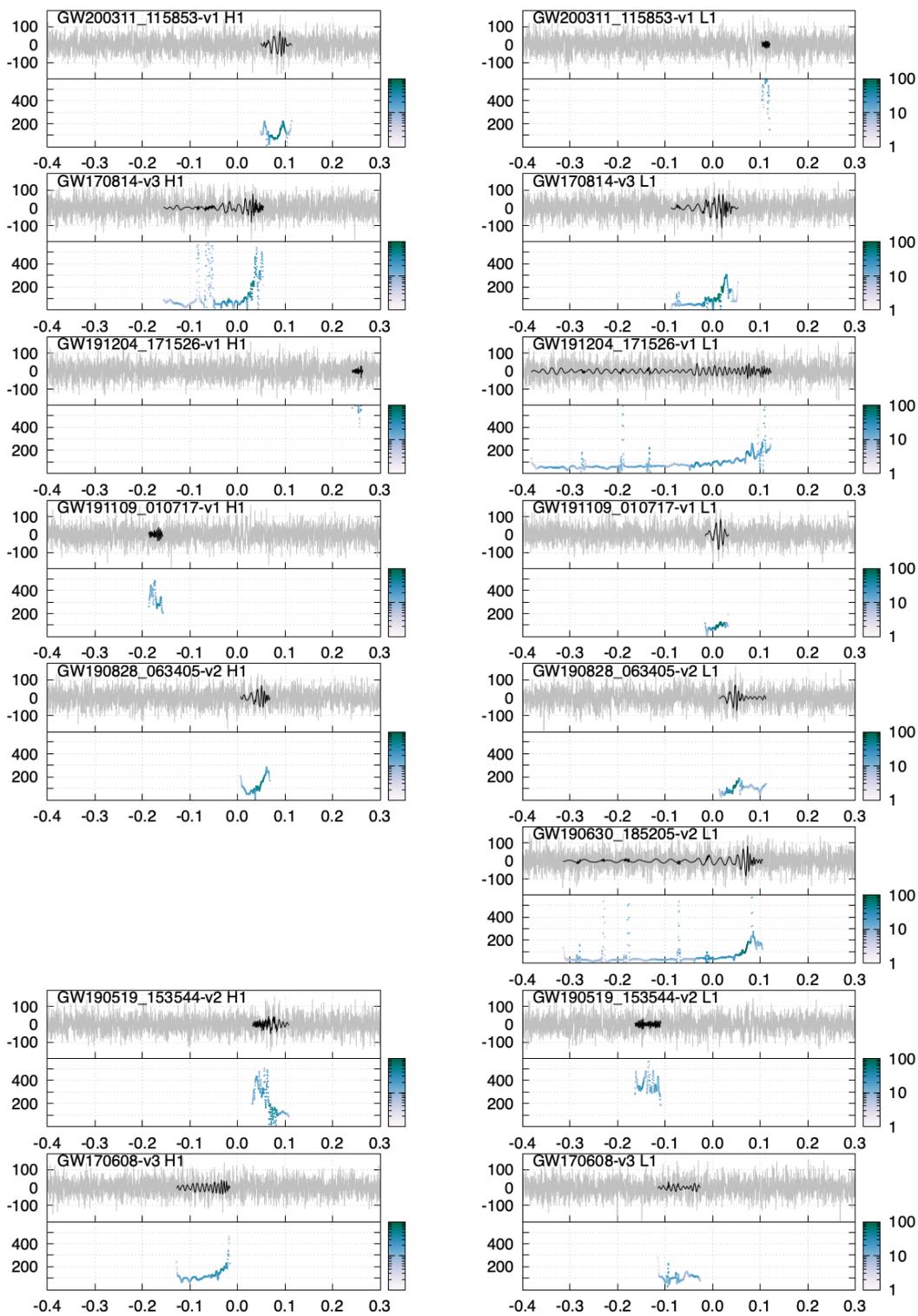


図 B.2: 図 B.1 と同じ。

## B.2 stacked Hilbert-Huang transform を用いた画像

LIGO-Virgo によって観測された重力波イベントに適用した時間-周波数図が図 B.3。

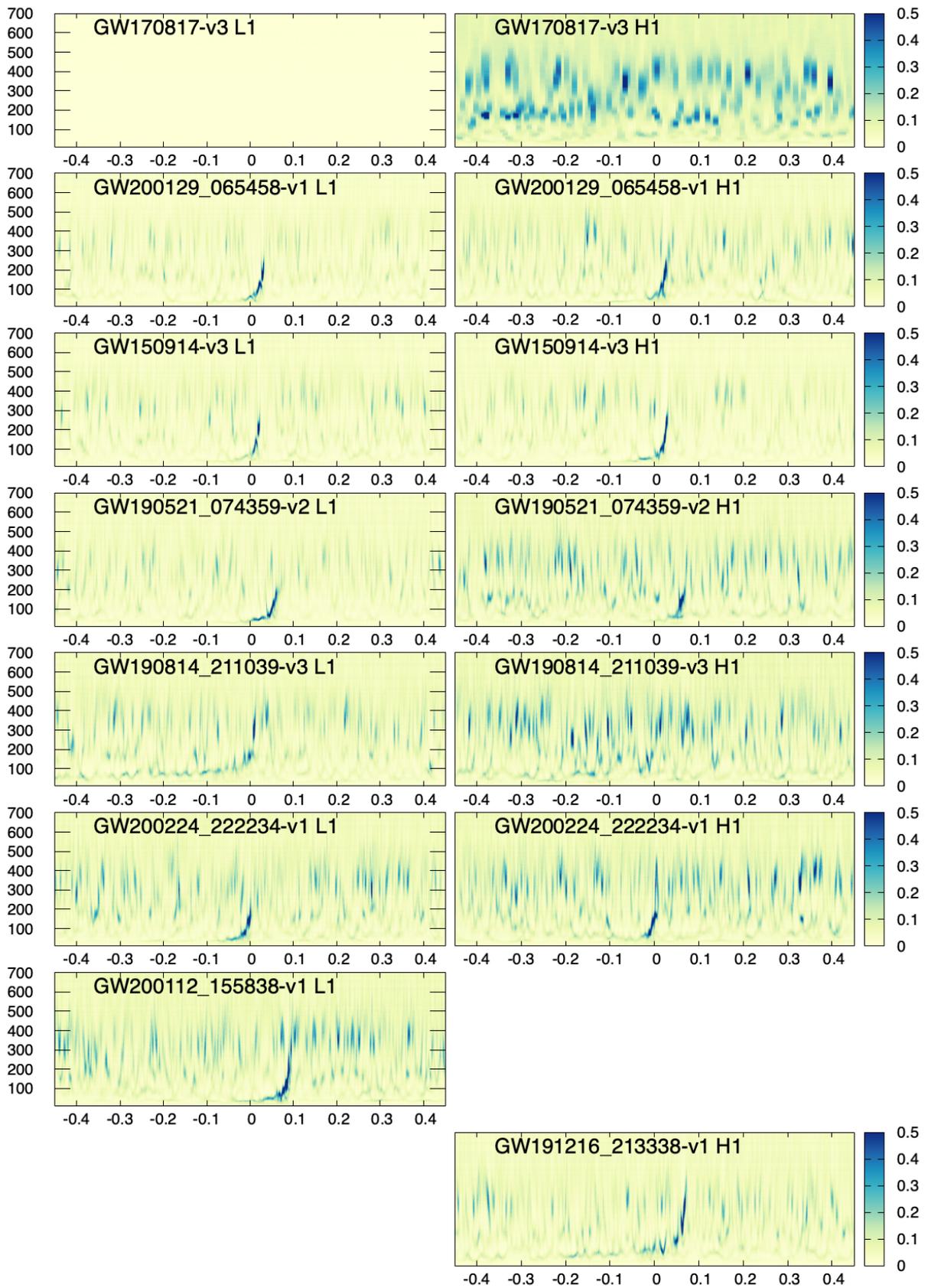


図 B.3: 重力波カタログイベントの時間周波数図。イベントはホワイトニングした後に 30Hz から 450Hz のバンドパスフィルターをかけたものに、閾値 0.1 で EMD したものを 5000 個 stack したものの。グリッドは縦軸、横軸とも 1000 個。縦軸は周波数で横軸は時刻である。0 秒は LIGO-Virgo による重力波解析用ライブラリ pycbc の定義に基づいたそれぞれのイベントの合体時刻である。カラーバーは足し合わされた振幅を最大値 1 で規格化したもの。左右一方の空欄は検出器が動いていなかったためデータがないことを表している。左右両方の空欄は SNR が小さいため今回は解析していない重力波イベントである。

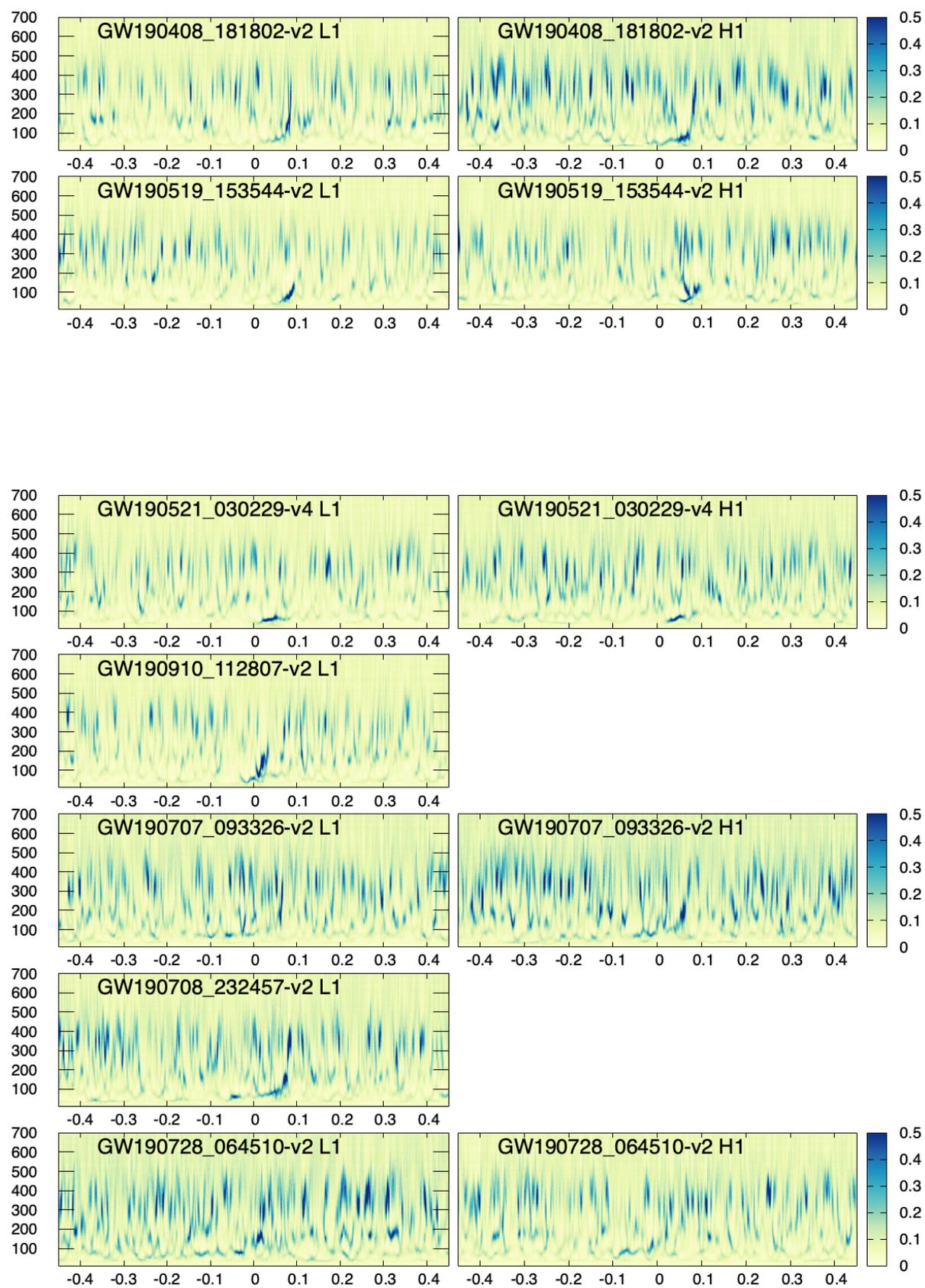


図 B.4: 図 B.3 と同じ

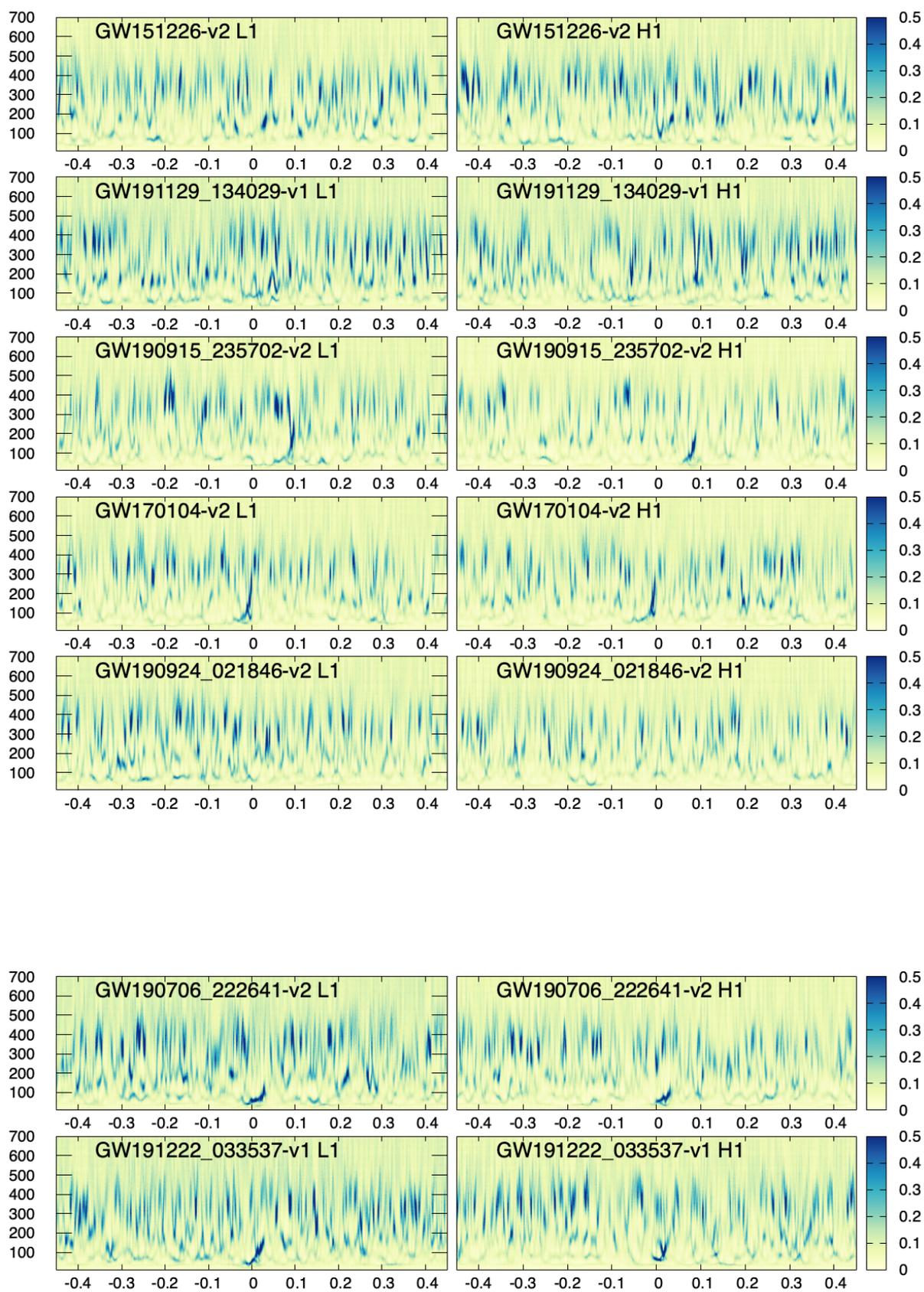


図 B.5: 図 B.3 と同じ

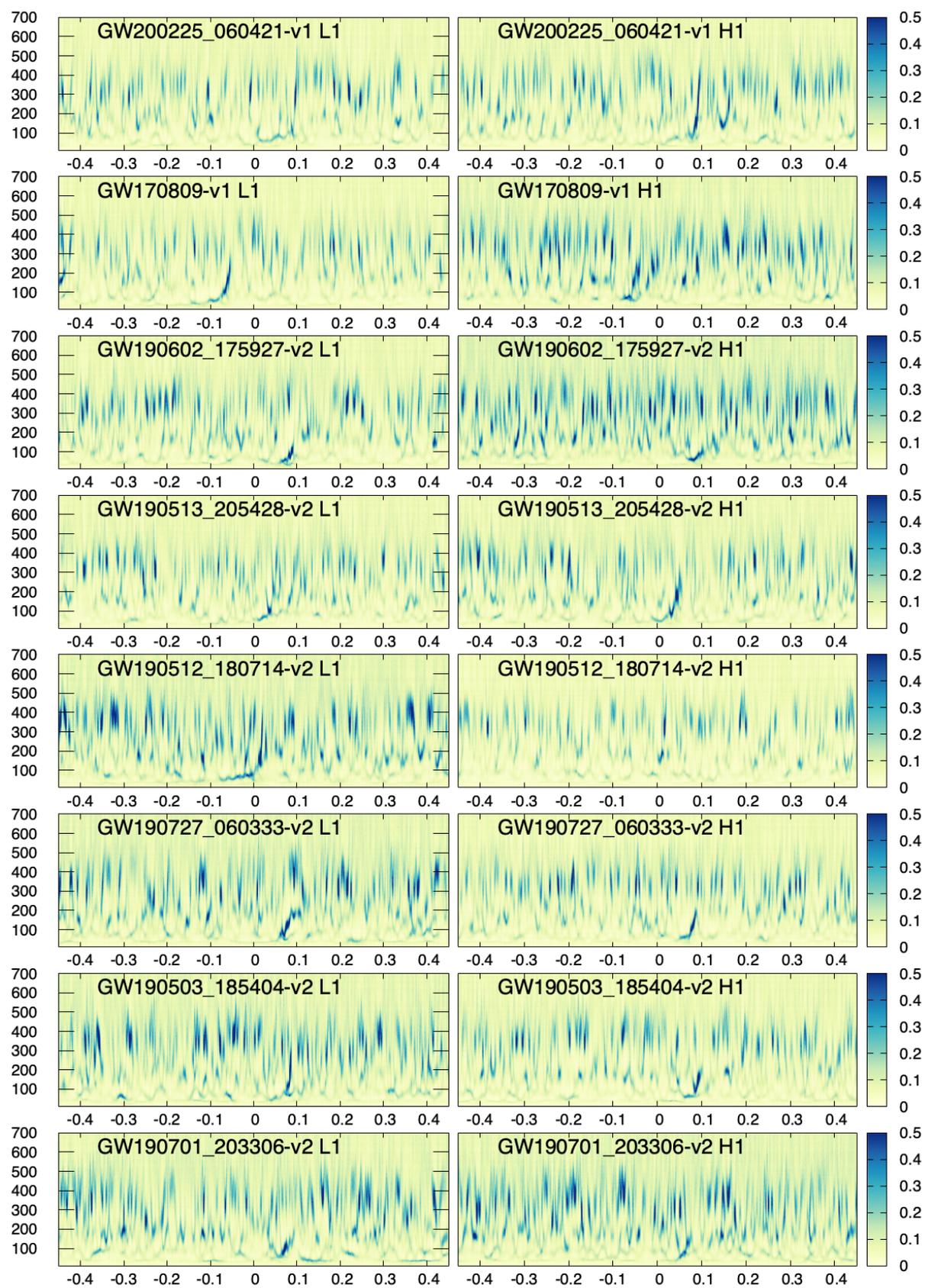


図 B.6: 図 B.3 と同じ

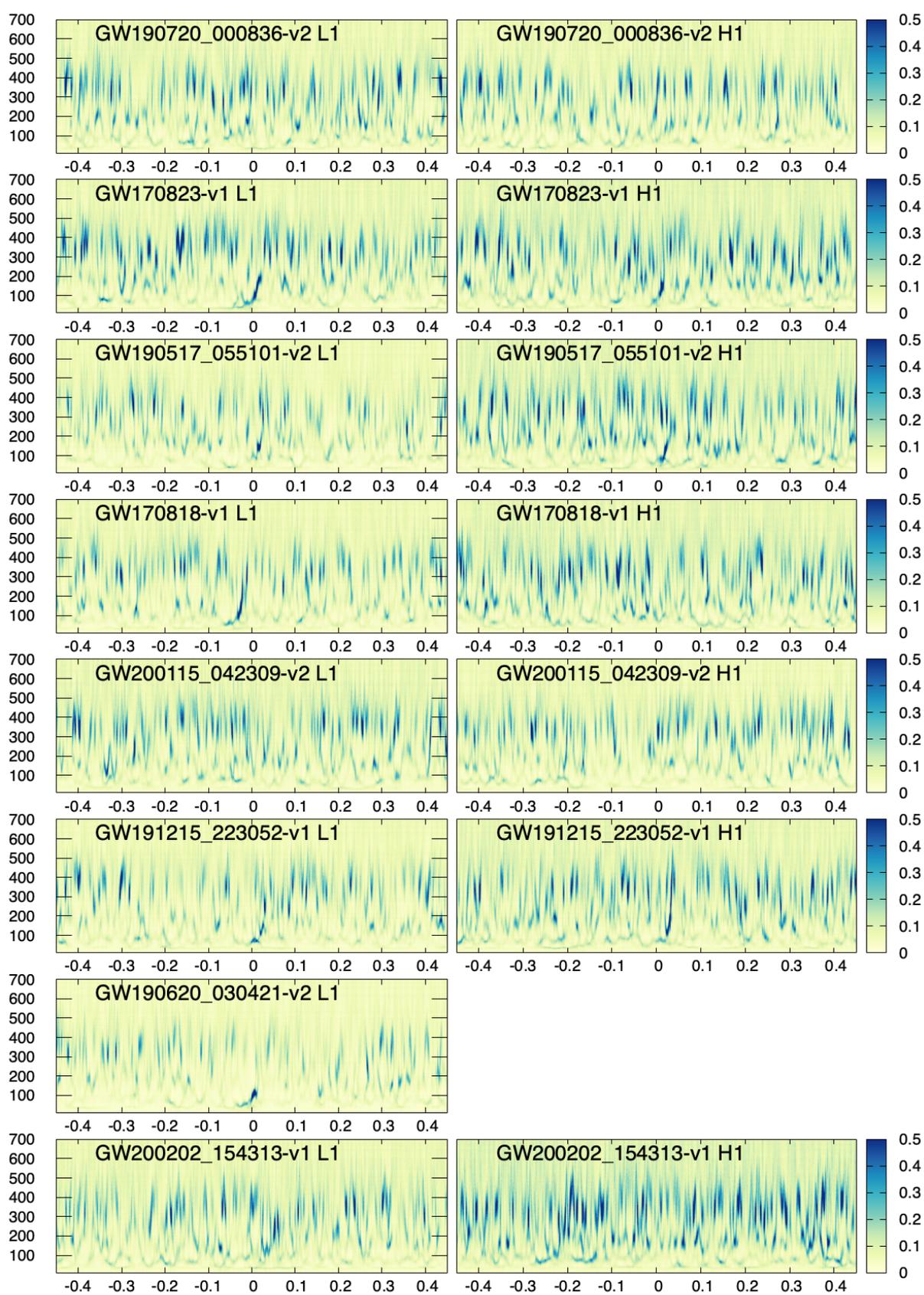


図 B.7: 図 B.3 と同じ

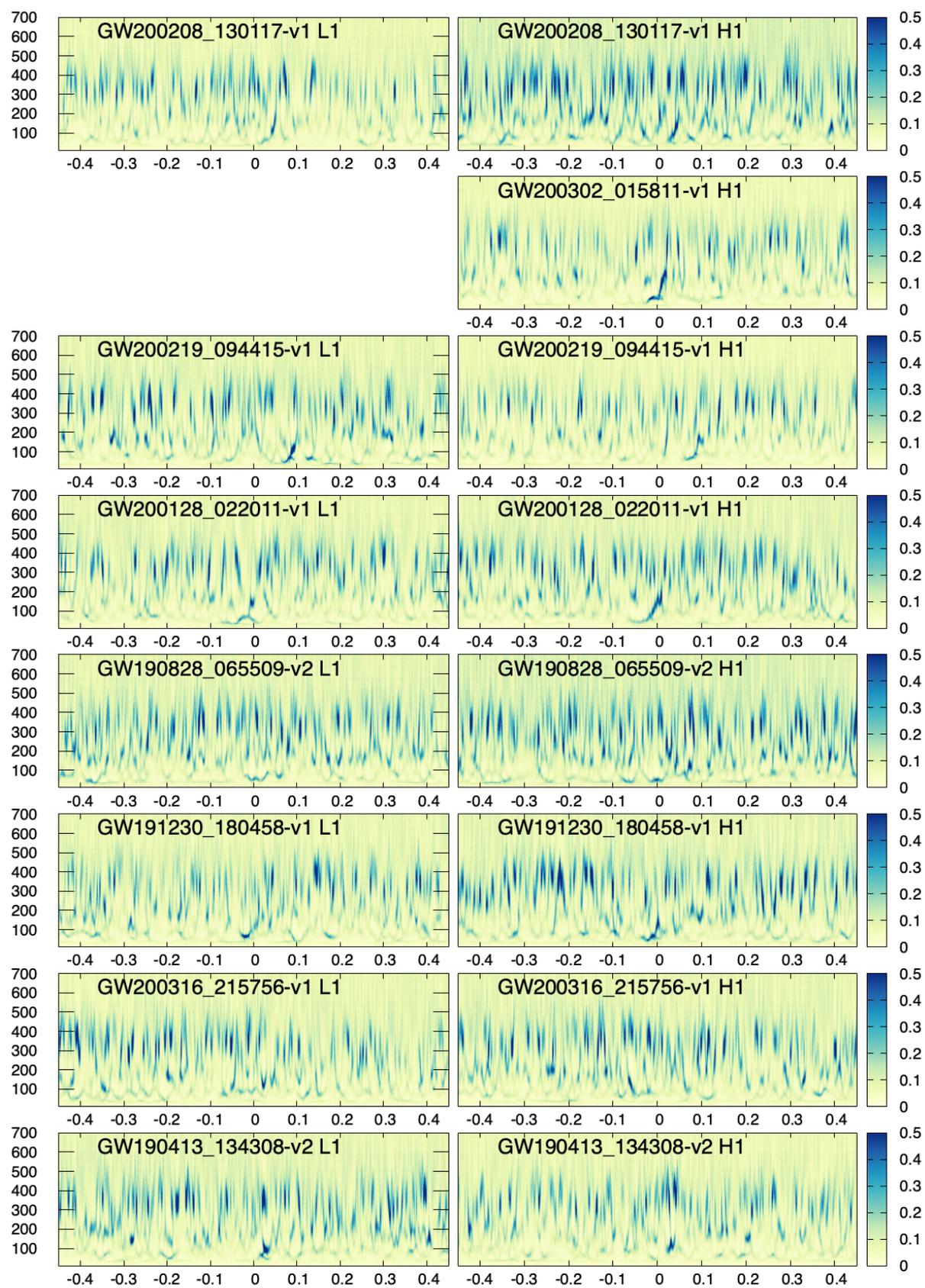


図 B.8: 図 B.3 と同じ

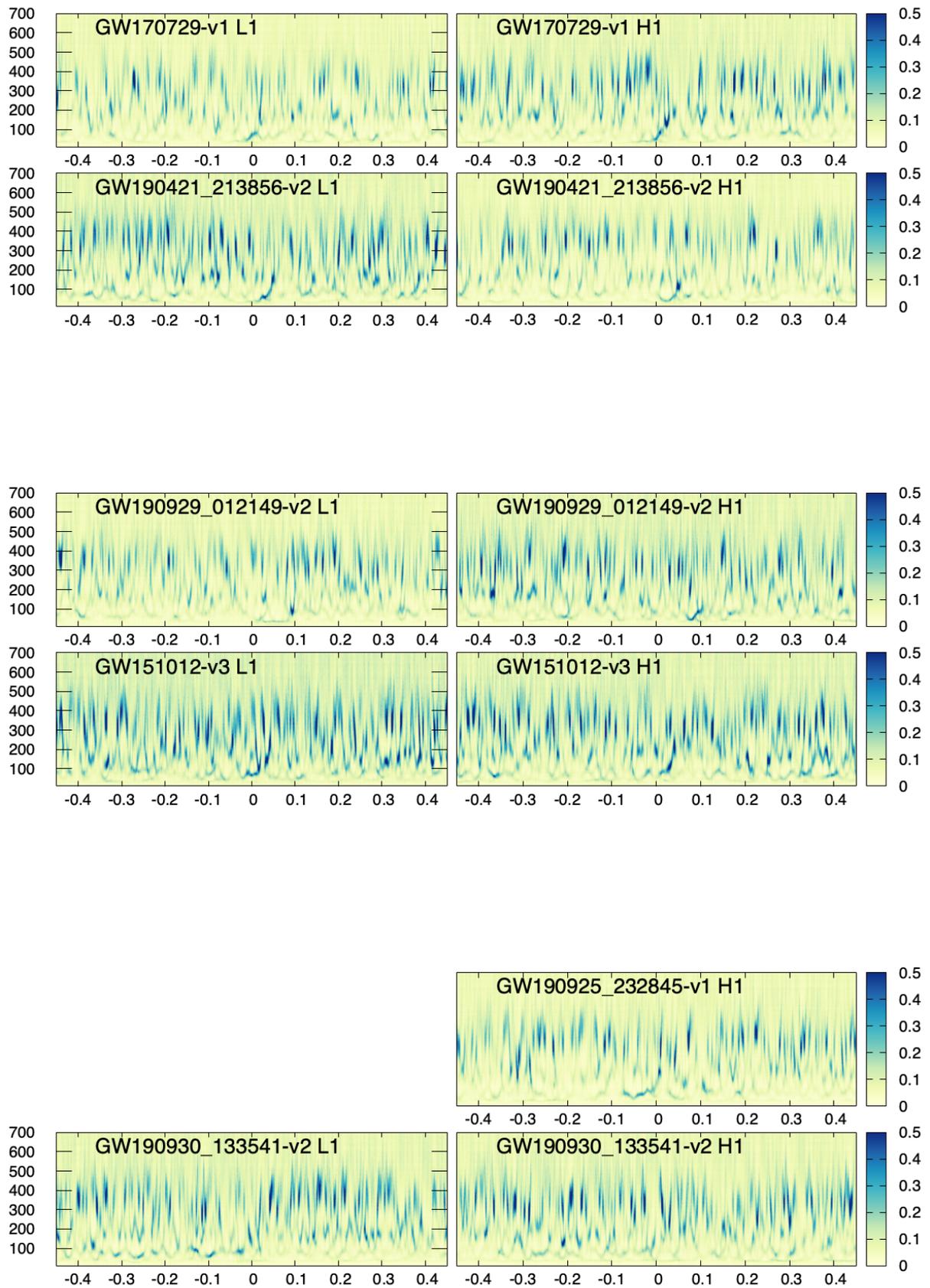


図 B.9: 図 B.3 と同じ

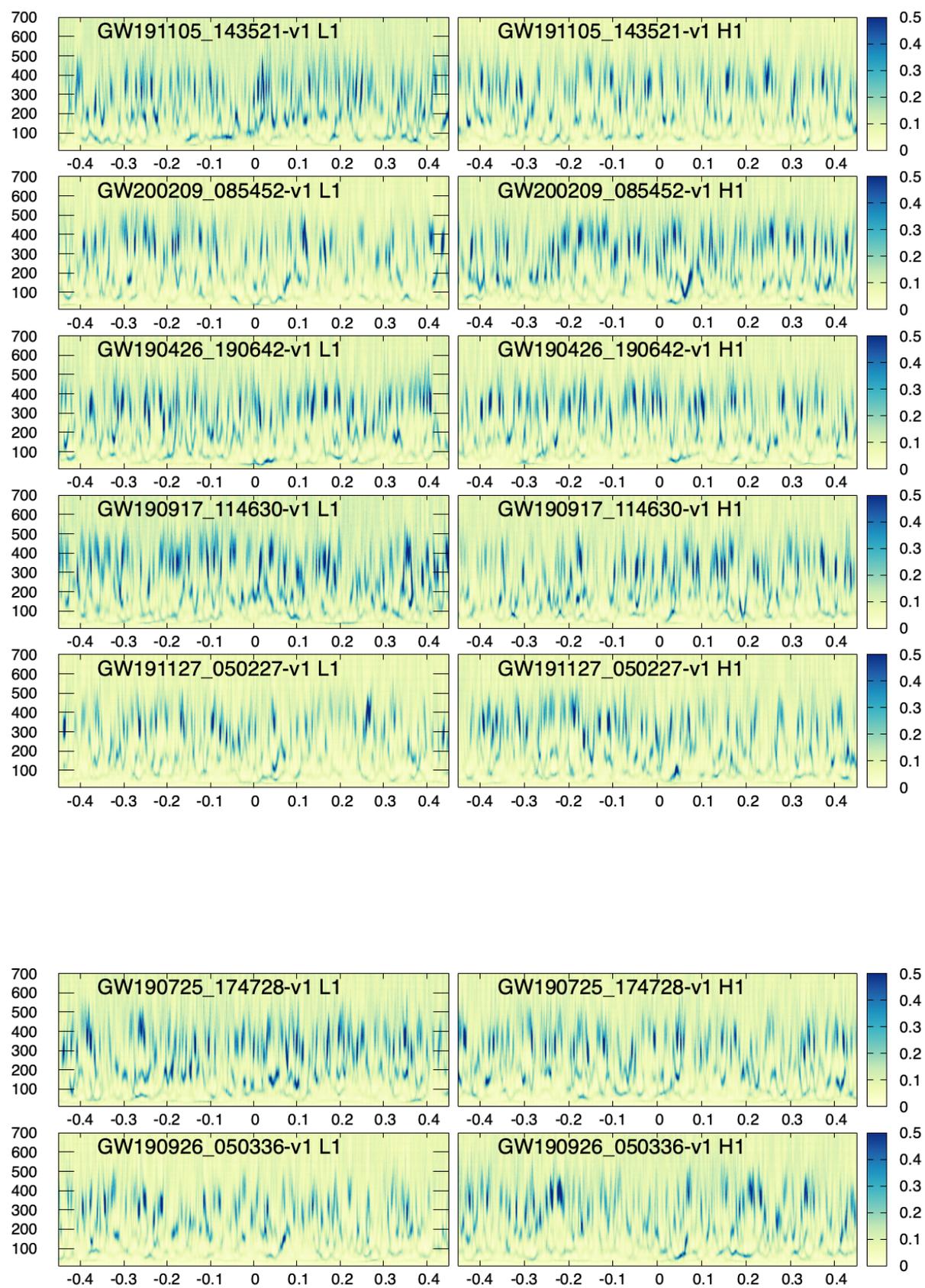


図 B.10: 図 B.3 と同じ

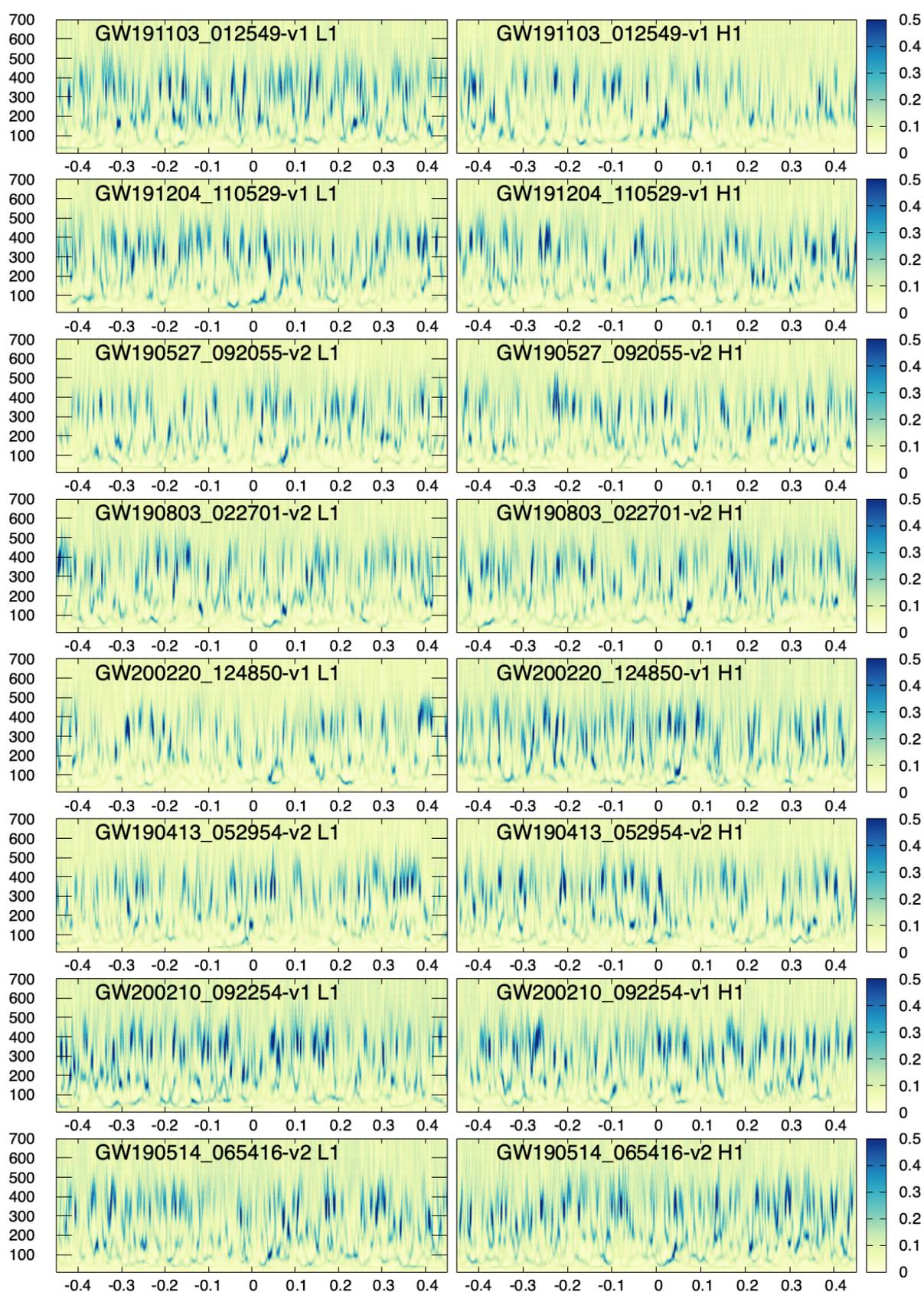


図 B.11: 図 B.3 と同じ

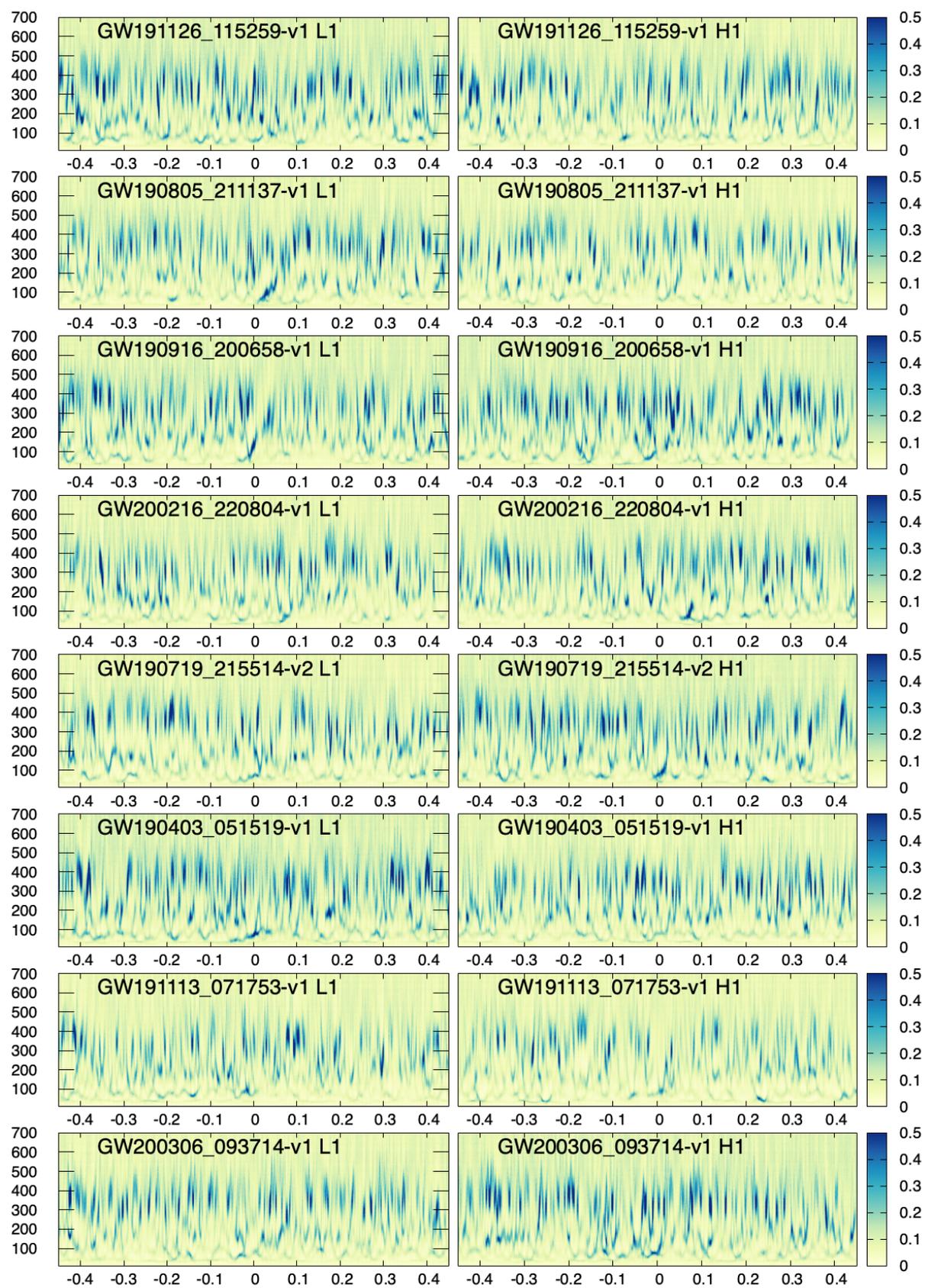


図 B.12: 図 B.3 と同じ

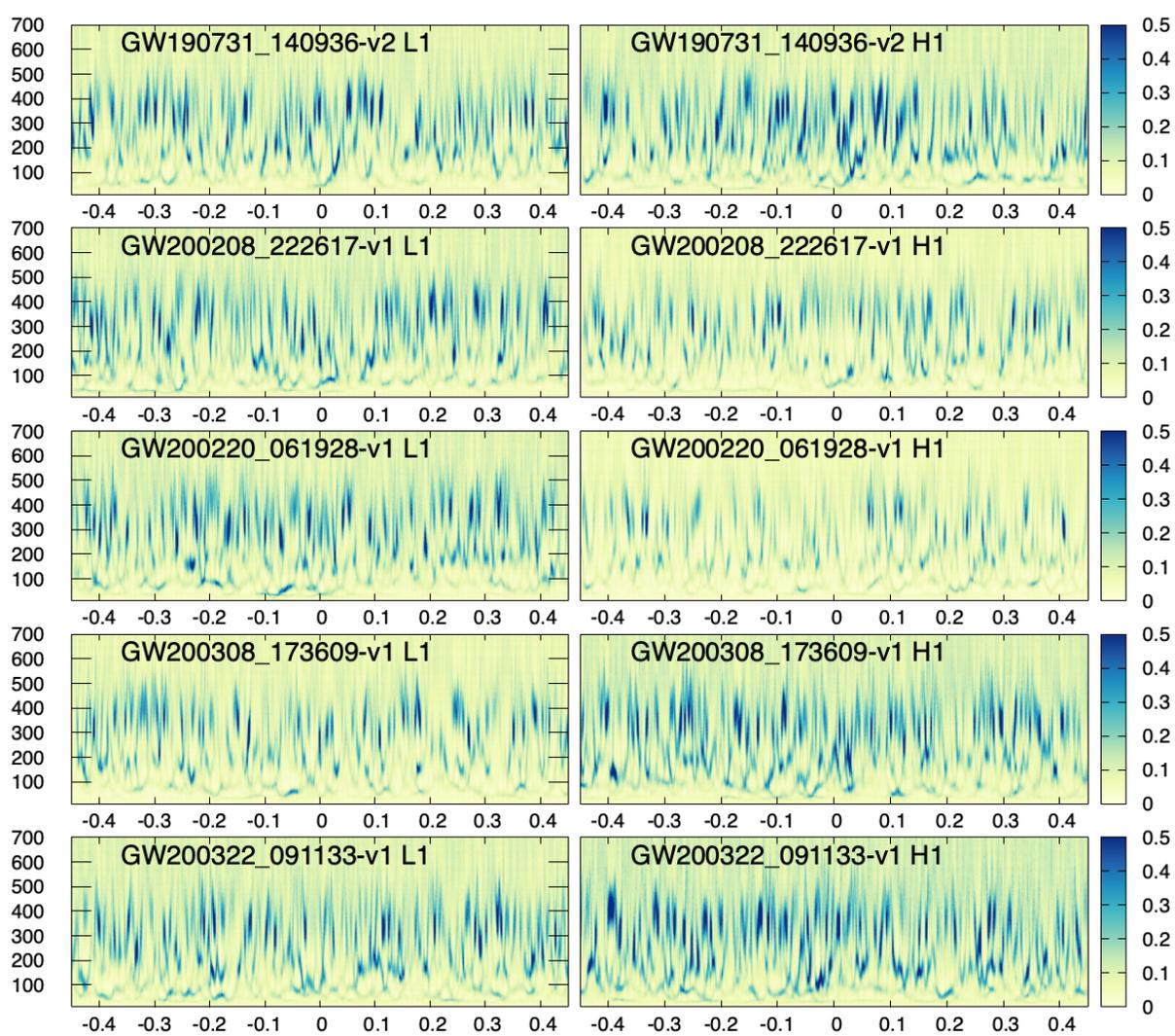


図 B.13: 図 B.3 と同じ

## 参考文献

- J Aasi, B P Abbott et al., and LIGO Science Collaboration. Advanced LIGO. Classical and Quantum Gravity, 32(7):074001, apr 2015. ISSN 0264-9381. doi: 10.1088/0264-9381/32/7/074001. URL <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0264-9381/32/7/074001>.
- B. P. Abbott, R. Abbott et al., LIGO Scientific Collaboration, and Virgo Collaboration. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. Physical Review Letters, 116(6):061102, feb 2016. ISSN 0031-9007. doi: 10.1103/PhysRevLett.116.061102. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.061102><https://www.gw-openscience.org/eventapi/html/GWTC-1-confident/GW150914/v3>.
- B. P. Abbott, R. Abbott et al., and LIGO Scientific Collaboration. Exploring the sensitivity of next generation gravitational wave detectors. Classical and Quantum Gravity, 34(4):044001, feb 2017. ISSN 0264-9381. doi: 10.1088/1361-6382/aa51f4. URL <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6382/aa51f4>.
- B. P. Abbott, R. Abbott et al., LIGO Science Collaboration, and Virgo Collaboration. GWTC-1: A Gravitational-Wave Transient Catalog of Compact Binary Mergers Observed by LIGO and Virgo during the First and Second Observing Runs. Physical Review X, 9(3):031040, sep 2019a. ISSN 2160-3308. doi: 10.1103/PhysRevX.9.031040. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.9.031040><https://www.gw-openscience.org/catalog/>.
- B. P. Abbott, R. Abbott et al., LIGO Scientific Collaboration, and Virgo Collaboration. Binary Black Hole Population Properties Inferred from the First and Second Observing Runs of Advanced LIGO and Advanced Virgo. The Astrophysical Journal, 882(2):L24, sep 2019b. ISSN 2041-8213. doi: 10.3847/2041-8213/ab3800. URL <https://iopscience.iop.org/article/10.3847/2041-8213/ab3800>.
- B P Abbott, R Abbott et al., LIGO Science Collaboration, and Virgo Collaboration. A guide to LIGO–Virgo detector noise and extraction of transient gravitational-wave signals. Classical and Quantum Gravity, 37(5):055002, mar 2020. ISSN 0264-9381. doi: 10.1088/1361-6382/ab685e. URL <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6382/ab685e>.
- R. Abbott, T. D. Abbott et al., LIGO Science Collaboration, Virgo Collaboration, and KAGRA Collaboration. The population of merging compact binaries inferred using gravitational waves through GWTC-3. nov 2021a. doi: 10.48550/arxiv.2111.03634. URL <http://arxiv.org/abs/2111.03634>.
- R. Abbott, T. D. Abbott et al., LIGO Scientific Collaboration, and Virgo Collaboration. GWTC-2: Compact Binary Coalescences Observed by LIGO and Virgo during the First Half of the Third Observing Run. Physical Review X, 11(2):021053, jun 2021b. ISSN 2160-3308. doi: 10.1103/PhysRevX.11.021053. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.11.021053><https://www.gw-openscience.org/GWTC-2/>.
- R. Abbott, T. D. Abbott et al., LIGO Scientific Collaboration, and Virgo Collaboration. Pop-

- ulation Properties of Compact Objects from the Second LIGO–Virgo Gravitational-Wave Transient Catalog. *The Astrophysical Journal Letters*, 913(1):L7, may 2021c. ISSN 2041-8205. doi: 10.3847/2041-8213/abe949. URL <https://iopscience.iop.org/article/10.3847/2041-8213/abe949>.
- R. Abbott, T. D. Abbott et al., LIGO Scientific Collaboration, and Virgo Collaboration. GWTC-2.1: Deep Extended Catalog of Compact Binary Coalescences Observed by LIGO and Virgo During the First Half of the Third Observing Run. aug 2021d. URL <https://arxiv.org/abs/2108.01045>.
- R. Abbott, T. D. Abbott et al., LIGO Scientific Collaboration, Virgo Collaboration, and KAGRA Collaboration. GWTC-3: Compact Binary Coalescences Observed by LIGO and Virgo During the Second Part of the Third Observing Run. nov 2021e. doi: 10.48550/arxiv.2111.03606. URL <http://arxiv.org/abs/2111.03606><https://www.gw-openscience.org/GWTC-3/>.
- R. Abbott, H. Abe et al., LIGO Scientific Collaboration, Virgo Collaboration, and KAGRA Collaboration. First joint observation by the underground gravitational-wave detector KAGRA with GEO 600. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, 2022(6):063F01, apr 2022. ISSN 2050-3911. doi: 10.48550/arxiv.2203.01270. URL <https://arxiv.org/abs/2203.01270><https://doi.org/10.1093/ptep/ptac073>.
- Ernazar Abdikamalov, Giulia Pagliaroli, and David Radice. Gravitational Waves from Core-Collapse Supernovae. pages 1–37. Springer Singapore, Singapore, 2020. ISBN 978-981-15-4702-7. doi: 10.1007/978-981-15-4702-7\_21-1. URL [https://doi.org/10.1007/978-981-15-4702-7\\_21-1](https://doi.org/10.1007/978-981-15-4702-7_21-1).
- F Acernese, M Agathos et al., and Virgo Collaboration. Advanced Virgo: a second-generation interferometric gravitational wave detector. *Classical and Quantum Gravity*, 32(2):024001, jan 2015. ISSN 0264-9381. doi: 10.1088/0264-9381/32/2/024001. URL <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0264-9381/32/2/024001>.
- A Akhshi, H Alimohammadi, S Baghran, S Rahvar, M Reza Rahimi Tabar, and H Arfaei. A template-free approach for waveform extraction of gravitational wave events. *Scientific Reports*, 11(1):20507, 2021. ISSN 2045-2322. doi: 10.1038/s41598-021-98821-z. URL <https://doi.org/10.1038/s41598-021-98821-z>.
- Andrey Akinshin. Finite-sample bias-correction factors for the median absolute deviation based on the Harrell-Davis quantile estimator and its trimmed modification. jul 2022. doi: 10.48550/arxiv.2207.12005. URL <https://arxiv.org/abs/2207.12005>.
- T Akutsu, M Ando et al., and KAGRA Collaboration. Overview of KAGRA: KAGRA science. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, 2021(5), may 2021a. ISSN 2050-3911. doi: 10.1093/ptep/ptaa120. URL <https://academic.oup.com/ptep/article/doi/10.1093/ptep/ptaa120/5891669>.
- T Akutsu, M Ando et al., and KAGRA Collaboration. Overview of KAGRA: Detector design and construction history. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, 2021(5):24, may 2021b. ISSN 2050-3911. doi: 10.1093/ptep/ptaa125. URL <https://academic.oup.com/ptep/article/doi/10.1093/ptep/ptaa125/5893487>.
- Bruce Allen, Warren G. Anderson, Patrick R. Brady, Duncan A. Brown, and Jolien D. E. Creighton. FINDCHIRP: An algorithm for detection of gravitational waves from inspiraling compact binaries. *Physical Review D*, 85(12):122006, jun 2012. ISSN 1550-7998. doi: 10.1103/PhysRevD.85.122006. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.85.122006>.

- H Andresen, B Müller, E Müller, and H.-Th. Janka. Gravitational wave signals from 3D neutrino hydrodynamics simulations of core-collapse supernovae. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 468(2):2032–2051, jun 2017. ISSN 0035-8711. doi: 10.1093/mnras/stx618. URL <https://doi.org/10.1093/mnras/stx618>.
- P. Astone, P. Cerdá-Durán, I. Di Palma, M. Drago, F. Muciaccia, C. Palomba, and F. Ricci. New method to observe gravitational waves emitted by core collapse supernovae. Physical Review D, 98(12):122002, dec 2018. ISSN 2470-0010. doi: 10.1103/PhysRevD.98.122002. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.98.122002>.
- Sho Atsuta. ブラックホールリングダウンからの重力波における高調波を含めた解析. 2017. URL [https://www.gravity.phys.titech.ac.jp/doc/thesis/master\\_atsuta.pdf](https://www.gravity.phys.titech.ac.jp/doc/thesis/master_atsuta.pdf).
- Benjamin Aylott, John G Baker, William D Boggs, Michael Boyle, Patrick R Brady, Duncan A Brown, Bernd Brügmann, Luisa T Buchman, Alessandra Buonanno, Laura Cadonati, Jordan Camp, Manuela Campanelli, Joan Centrella, Shourov Chatterji, Nelson Christensen, Tony Chu, Peter Diener, Nils Dorband, Zachariah B Etienne, Joshua Faber, Stephen Fairhurst, Benjamin Farr, Sebastian Fischetti, Gianluca Guidi, Lisa M Goggin, Mark Hannam, Frank Herrmann, Ian Hinder, Sascha Husa, Vicky Kalogera, Drew Keppel, Lawrence E. Kidder, Bernard J Kelly, Badri Krishnan, Pablo Laguna, Carlos O Lousto, Ilya Mandel, Pedro Marronetti, Richard Matzner, Sean T McWilliams, Keith D Matthews, R Adam Mercer, Satyanarayan R P Mohapatra, Abdul H Mroué, Hiroyuki Nakano, Evan Ochsner, Yi Pan, Larne Pekowsky, Harald P Pfeiffer, Denis Pollney, Frans Pretorius, Vivien Raymond, Christian Reisswig, Luciano Rezzolla, Oliver Rinne, Craig Robinson, Christian Röver, Lucía Santamaría, Bangalore Sathyaprakash, Mark A Scheel, Erik Schnetter, Jennifer Seiler, Stuart L Shapiro, Deirdre Shoemaker, Ulrich Sperhake, Alexander Stroeer, Riccardo Sturani, Wolfgang Tichy, Yuk Tung Liu, Marc van der Sluys, James R van Meter, Ruslan Vaulin, Alberto Vecchio, John Veitch, Andrea Viceré, John T Whelan, and Yosef Zlochower. Testing gravitational-wave searches with numerical relativity waveforms: results from the first Numerical INjection Analysis (NINJA) project. Classical and Quantum Gravity, 26(16):165008, aug 2009. ISSN 0264-9381. doi: 10.1088/0264-9381/26/16/165008. URL <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0264-9381/26/16/165008>.
- Emanuele Berti, Vitor Cardoso, and Clifford M. Will. Gravitational-wave spectroscopy of massive black holes with the space interferometer LISA. Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology, 73(6):064030, mar 2006. ISSN 15507998. doi: 10.1103/PhysRevD.73.064030. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.73.064030>.
- Stefano Bianchi, Alessandro Longo, Guillermo Valdes, Gabriela Gonz, Gabriela González, and Wolfgang Plastino. An automated pipeline for scattered light noise characterization. Classical and Quantum Gravity, 39(19):1–16, oct 2022. ISSN 0264-9381. doi: 10.1088/1361-6382/ac88b0. URL <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6382/ac88b0>.
- John M. Blondin, Anthony Mezzacappa, and Christine DeMarino. Stability of Standing Accretion Shocks, with an Eye toward Core - Collapse Supernovae. The Astrophysical Journal, 584(2):971–980, feb 2003. ISSN 0004-637X. doi: 10.1086/345812. URL <https://iopscience.iop.org/article/10.1086/345812>.
- A Burrows and D Vartanyan. Core-collapse supernova explosion theory. Nature, 589(7840):29–39, 2021. ISSN 1476-4687. doi: 10.1038/s41586-020-03059-w. URL <https://doi.org/10.1038/s41586-020-03059-w>.

- JORDAN CAMP, ALEXANDER STROEER, JOHN CANNIZZO, and ROBERT SCHOFIELD. SEARCHING FOR GRAVITATIONAL WAVES WITH THE HILBERT–HUANG TRANSFORM. *Advances in Adaptive Data Analysis*, 01(04):643–666, oct 2009. ISSN 1793-5369. doi: 10.1142/S1793536909000254. URL <https://doi.org/10.1142/S1793536909000254>.
- Jordan B. Camp, John Cannizzo, and Kenji Numata. Application of the Hilbert-Huang transform to the search for gravitational waves. *Physical Review D*, 75(6):061101, mar 2007. ISSN 1550-7998. doi: 10.1103/PhysRevD.75.061101. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.75.061101>.
- Alejandro Casallas-Lagos, Claudia Moreno, Javier M. Antelis, and Michele Zanolin. A METHODOLOGY TO ESTIMATE THE G-MODE SLOPE FROM A CCSNE GRAVITATIONAL WAVE. Technical report, 2021. URL [https://dcc.ligo.org/DocDB/0178/G2101855/003/Final\\_Version.pdf](https://dcc.ligo.org/DocDB/0178/G2101855/003/Final_Version.pdf).
- Man Leong Chan, Ik Siang Heng, and Chris Messenger. Detection and classification of supernova gravitational wave signals: A deep learning approach. *Physical Review D*, 102(4):043022, aug 2020. ISSN 2470-0010. doi: 10.1103/PhysRevD.102.043022. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.102.043022>.
- Leon Cohen. *Time-frequency analysis*, volume 778. Prentice hall New Jersey, 1995.
- K L Dooley, J R Leong, T Adams, C Affeldt, A Bisht, C Bogan, J Degallaix, C Gräf, S Hild, J Hough, A Khalaidovski, N Lastzka, J Lough, H Lück, D Macleod, L Nuttall, M Prijatelj, R Schnabel, E Schreiber, J Slutsky, B Sorazu, K A Strain, H Vahlbruch, M Wąs, B Willke, H Wittel, K Danzmann, and H Grote. GEO 600 and the GEO-HF upgrade program: successes and challenges. *Classical and Quantum Gravity*, 33(7):075009, apr 2016. ISSN 0264-9381. doi: 10.1088/0264-9381/33/7/075009. URL <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0264-9381/33/7/075009>.
- Fernando Echeverria. Gravitational-wave measurements of the mass and angular momentum of a black hole. *Physical Review D*, 40(10):3194–3203, nov 1989. ISSN 05562821. doi: 10.1103/PhysRevD.40.3194. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.40.3194>.
- Thierry Foglizzo, Rémi Kazeroni, Jérôme Guilet, Frédéric Masset, Matthias González, Brendan K. Krueger, Jérôme Novak, Micaela Oertel, Jérôme Margueron, Julien Faure, Noël Martin, Patrick Blottiau, Bruno Peres, and Gilles Durand. The Explosion Mechanism of Core-Collapse Supernovae: Progress in Supernova Theory and Experiments. *Publications of the Astronomical Society of Australia*, 32:e009, mar 2015. ISSN 1323-3580. doi: 10.1017/pasa.2015.9. URL [https://www.cambridge.org/core/product/identifier/S1323358015000090/type/journal\\_article](https://www.cambridge.org/core/product/identifier/S1323358015000090/type/journal_article).
- M G Frei, R L Davidchack, and I Osorio. Least squares acceleration filtering for the estimation of signal derivatives and sharpness at extrema [and application to biological signals]. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 46(8):971–977, 1999. ISSN 1558-2531 VO - 46. doi: 10.1109/10.775407. URL <https://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?arnumber=775407>.
- S. Gossan, J. Veitch, and B. S. Sathyaprakash. Bayesian model selection for testing the no-hair theorem with black hole ringdowns. *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, 85(12):124056, jun 2012. ISSN 15507998. doi: 10.1103/PhysRevD.85.124056. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.85.124056>.
- S. E. Gossan, P. Sutton, A. Stuver, M. Zanolin, K. Gill, and C. D. Ott. Observing gravitational

- waves from core-collapse supernovae in the advanced detector era. *Physical Review D*, 93(4):042002, feb 2016. ISSN 2470-0010. doi: 10.1103/PhysRevD.93.042002. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.93.042002>.
- Chin-Ping Hu, Lupin Chun-Che Lin, Kuo-Chuan Pan, Kwan-Lok Li, Chien-Chang Yen, Albert K. H. Kong, and C. Y. Hui. A Comprehensive Analysis of the Gravitational Wave Events with the Stacked Hilbert-Huang Transform: From Compact Binary Coalescence to Supernova. *The Astrophysical Journal*, 935(2):127, jul 2022. ISSN 0004-637X. doi: 10.3847/1538-4357/ac8165. URL <https://iopscience.iop.org/article/10.3847/1538-4357/ac8165><http://arxiv.org/abs/2207.06714>.
- Norden E Huang, Steven R Long, and Zheng Shen. The Mechanism for Frequency Downshift in Nonlinear Wave Evolution. volume 32, pages 59–117C. Elsevier, 1996. ISBN 0065-2156. doi: [https://doi.org/10.1016/S0065-2156\(08\)70076-0](https://doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70076-0). URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0065215608700760>.
- Norden E Huang, Zheng Shen, Steven R Long, Manli C Wu, Hsing H Shih, Quanan Zheng, Nai-Chyuan Yen, Chi Chao Tung, and Henry H Liu. The Empirical Mode Decomposition and the Hilbert Spectrum for Nonlinear and Non-Stationary Time Series Analysis. *Proceedings: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 454(1971):903–995, apr 1998. ISSN 13645021. URL <http://www.jstor.org/stable/53161>.
- Norden E Huang, Zheng Shen, and Steven R Long. A NEW VIEW OF NONLINEAR WATER WAVES: The Hilbert Spectrum. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 31(1):417–457, jan 1999. ISSN 0066-4189. doi: 10.1146/annurev.fluid.31.1.417. URL <https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.31.1.417>.
- Norden E Huang, Man-Li C Wu, Steven R Long, Samuel S P Shen, Wendong Qu, Per Gloersen, and Kuang L Fan. A confidence limit for the empirical mode decomposition and Hilbert spectral analysis. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 459(2037):2317–2345, sep 2003. doi: 10.1098/rspa.2003.1123. URL <https://doi.org/10.1098/rspa.2003.1123>.
- Alberto Iess, Elena Cuoco, Filip Morawski, and Jade Powell. Core-Collapse supernova gravitational-wave search and deep learning classification. *Machine Learning: Science and Technology*, 1(2):025014, jun 2020. ISSN 2632-2153. doi: 10.1088/2632-2153/ab7d31. URL <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/2632-2153/ab7d31>.
- Collaboration IndIGO. LIGO-India, Proposal of the Consortium for Indian Initiative in Gravitational-wave Observations (IndIGO). Technical report, 2011. URL <https://dcc.ligo.org/LIGO-M1100296/public>.
- D Jia, K Yanagisawa, M Hasegawa, S Hirobayashi, H Tagoshi, T Narikawa, N Uchikata, and H Takahashi. Time–frequency-based non-harmonic analysis to reduce line-noise impact for LIGO observation system. *Astronomy and Computing*, 25:238–246, 2018. ISSN 2213-1337. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ascom.2018.10.003>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2213133718300052>.
- J.D. ナイチンゲール J. フォスター. 一般相対論入門. 吉岡書店, 1991. 原哲也 訳 原タイトル: A short course in general relativity.
- Masato Kaneyama. Hilbert-Huang 変換を用いたバースト的重力波の解析. PhD thesis, 新潟大学大学院, 2015. URL <https://ci.nii.ac.jp/naid/500000960963.bib>.
- Masato Kaneyama, Ken-ichi Oohara, Hirotaka Takahashi, Yuta Hiranuma, Takashi Wakamatsu,

- and Jordan B. Camp. TOWARDS CONSTRUCTING AN ALERT SYSTEM WITH THE HILBERT-HUANG TRANSFORM : SEARCH FOR SIGNALS IN NOISY DATA. ICIC express letters. Part B, Applications : an international journal of research and surveys, 5 (1):285–292, dec 2014. ISSN 2185-2766. URL <http://id.ndl.go.jp/bib/025192672>.
- Masato Kaneyama, Ken-ichi Oohara, Yukitsugu Sasaki, Hirotaka Takahashi, and Jordan B. Camp. ON COMPLETENESS AND ORTHOGONALITY OF INTRINSIC MODE FUNCTIONS TO SEARCH FOR GRAVITATIONAL WAVES. ICIC express letters. Part B, Applications : an international journal of research and surveys, 6(2):343–349, dec 2015. URL <http://id.ndl.go.jp/bib/026091308>.
- Masato Kaneyama, Ken-ichi Oohara, Hirotaka Takahashi, Yuichiro Sekiguchi, Hideyuki Tagoshi, and Masaru Shibata. Analysis of gravitational waves from binary neutron star merger by Hilbert-Huang transform. Physical Review D, 93(12):123010, jun 2016. ISSN 2470-0010. doi: 10.1103/PhysRevD.93.123010. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.93.123010>.
- Masato Kaneyama, Ken-ichi Oohara, Takashi Wakamatsu, Hirotaka Takahashi, and Jordan B. Camp. Research on burst gravitational waves with the Hilbert-Huang transform. In The Fourteenth Marcel Grossmann Meeting, pages 3138–3143. WORLD SCIENTIFIC, may 2017. ISBN 978-981-322-659-3. doi: doi:10.1142/9789813226609\_0398. URL [https://doi.org/10.1142/9789813226609\\_0398](https://doi.org/10.1142/9789813226609_0398).
- Hajime Kawahara, Takami Kuroda, Tomoya Takiwaki, Kazuhiro Hayama, and Kei Kotake. A Linear and Quadratic Time–Frequency Analysis of Gravitational Waves from Core-collapse Supernovae. The Astrophysical Journal, 867(2):126, nov 2018. ISSN 1538-4357. doi: 10.3847/1538-4357/aae57b. URL <https://iopscience.iop.org/article/10.3847/1538-4357/aae57b>.
- S Klimenko, I Yakushin, A Mercer, and G Mitselmakher. A coherent method for detection of gravitational wave bursts. Classical and Quantum Gravity, 25 (11):114029, jun 2008. ISSN 0264-9381. doi: 10.1088/0264-9381/25/11/114029. URL <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0264-9381/25/11/114029><https://dcc.ligo.org/public/0006/P070093/000/P070093-P.pdf>.
- S. Klimenko, G. Vedovato, M. Drago, F. Salemi, V. Tiwari, G. A. Prodi, C. Lazzaro, K. Ackley, S. Tiwari, C. F. Da Silva, and G. Mitselmakher. Method for detection and reconstruction of gravitational wave transients with networks of advanced detectors. Physical Review D, 93(4):042004, feb 2016. ISSN 2470-0010. doi: 10.1103/PhysRevD.93.042004. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.93.042004>.
- Kei Kotake. Multiple physical elements to determine the gravitational-wave signatures of core-collapse supernovae. Comptes Rendus Physique, 14(4):318–351, 2013. ISSN 1631-0705. doi: <https://doi.org/10.1016/j.crhy.2013.01.008>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1631070513000091>.
- Kei Kotake and Hidenobu Suzuki. 重力崩壊型超新星爆発の物理. Technical report, 2014. URL <https://bridge.kek.jp/lecture/03-kotake/LectureNote.pdf>.
- Kei Kotake, Katsuhiko Sato, and Keitaro Takahashi. Explosion mechanism, neutrino burst and gravitational wave in core-collapse supernovae. Reports on Progress in Physics, 69(4): 971–1143, apr 2006. ISSN 0034-4885. doi: 10.1088/0034-4885/69/4/R03. URL <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0034-4885/69/4/R03>.

- Takami Kuroda, Kei Kotake, and Tomoya Takiwaki. a New Gravitational-Wave Signature From Standing Accretion Shock Instability in Supernovae. The Astrophysical Journal, 829(1):L14, sep 2016. ISSN 20418213. doi: 10.3847/2041-8205/829/1/L14. URL <https://iopscience.iop.org/article/10.3847/2041-8205/829/1/L14>.
- Takami Kuroda, Kei Kotake, Kazuhiro Hayama, and Tomoya Takiwaki. Correlated Signatures of Gravitational-wave and Neutrino Emission in Three-dimensional General-relativistic Core-collapse Supernova Simulations. The Astrophysical Journal, 851(1):62, dec 2017. ISSN 1538-4357. doi: 10.3847/1538-4357/aa988d. URL <https://iopscience.iop.org/article/10.3847/1538-4357/aa988d>.
- Collaboration LIGO-Virgo-KAGRA. LIGO, VIRGO AND KAGRA OBSERVING RUN PLANS, 2023a. URL <https://observing.docs.ligo.org/plan/>.
- Collaboration LIGO-Virgo-KAGRA. Gravitational Wave Open Science Center, 2023b. URL <https://www.gw-openscience.org>.
- J. Logue, C. D. Ott, I. S. Heng, P. Kalmus, and J. H. C. Scargill. Inferring core-collapse supernova physics with gravitational waves. Physical Review D, 86(4):044023, aug 2012. ISSN 1550-7998. doi: 10.1103/PhysRevD.86.044023. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.86.044023>.
- Alessandro Longo, Stefano Bianchi, Wolfango Plastino, Nicolas Arnaud, Antonino Chiummo, Irene Fiori, Bas Swinkels, and Michal Was. Scattered light noise characterisation at the Virgo interferometer with tvf-EMD adaptive algorithm. Classical and Quantum Gravity, 37(14):145011, jul 2020. ISSN 0264-9381. doi: 10.1088/1361-6382/ab9719. URL <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6382/ab9719>.
- M. López, I. Di Palma, M. Drago, P. Cerdá-Durán, and F. Ricci. Deep learning for core-collapse supernova detection. Physical Review D, 103(6):063011, mar 2021. ISSN 2470-0010. doi: 10.1103/PhysRevD.103.063011. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.103.063011>.
- Michele Maggiore. Gravitational Waves: Volume 1: Theory and Experiments. Oxford University Press, oct 2007. ISBN 9780198570745. doi: 10.1093/acprof:oso/9780198570745.001.0001. URL <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198570745.001.0001>.
- Michele Maggiore. Gravitational waves: Volume 1: Theory and experiments, volume 1. Oxford university press, 2008.
- J W C McNabb, M Ashley, L S Finn, E Rotthoff, A Stuver, T Summerscales, P Sutton, M Tibbits, K Thorne, and K Zaleski. Overview of the BlockNormal event trigger generator. Classical and Quantum Gravity, 21(20):S1705–S1710, oct 2004. ISSN 0264-9381. doi: 10.1088/0264-9381/21/20/013. URL <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0264-9381/21/20/013>.
- Anthony Mezzacappa, Pedro Marronetti, Ryan E. Landfield, Eric J. Lentz, Konstantin N. Yakunin, Stephen W. Bruenn, W. Raphael Hix, O. E. Bronson Messer, Eirik Endeve, John M. Blondin, and J. Austin Harris. Gravitational-wave signal of a core-collapse supernova explosion of a 15  $M_{\odot}$  star. Physical Review D, 102(2):023027, jul 2020. ISSN 2470-0010. doi: 10.1103/PhysRevD.102.023027. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.102.023027>.
- Viktoriya Morozova, David Radice, Adam Burrows, and David Vartanyan. The Gravitational Wave Signal from Core-collapse Supernovae. The Astrophysical

- Journal*, 861(1):10, jun 2018. ISSN 1538-4357. doi: 10.3847/1538-4357/aac5f1. URL <https://iopscience.iop.org/article/10.3847/1538-4357/aac5f1><https://iopscience.iop.org/article/10.3847/2041-8213/ab191a>.
- Bernhard Müller, Hans-Thomas Janka, and Andreas Marek. A NEW MULTI-DIMENSIONAL GENERAL RELATIVISTIC NEUTRINO HYDRODYNAMICS CODE OF CORE-COLLAPSE SUPERNOVAE. III. GRAVITATIONAL WAVE SIGNALS FROM SUPERNOVA EXPLOSION MODELS. *The Astrophysical Journal*, 766(1):43, mar 2013. ISSN 0004-637X. doi: 10.1088/0004-637X/766/1/43. URL <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0004-637X/766/1/43>.
- Hiroyuki Nakano, Tatsuya Narikawa, Ken-ichi Oohara, Kazuki Sakai, Hisa-aki Shinkai, Hirotaka Takahashi, Takahiro Tanaka, Nami Uchikata, Shun Yamamoto, and Takahiro S. Yamamoto. Comparison of various methods to extract ringdown frequency from gravitational wave data. *Physical Review D*, 99(12):124032, jun 2019. ISSN 2470-0010. doi: 10.1103/PhysRevD.99.124032. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.99.124032>.
- Jade Powell, Sarah E. Gossan, Joshua Logue, and Ik Siong Heng. Inferring the core-collapse supernova explosion mechanism with gravitational waves. *Physical Review D*, 94(12):123012, dec 2016. ISSN 2470-0010. doi: 10.1103/PhysRevD.94.123012. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.94.123012>.
- Jade Powell, Marek Szczepanczyk, and Ik Siong Heng. Inferring the core-collapse supernova explosion mechanism with three-dimensional gravitational-wave simulations. *Physical Review D*, 96(12):123013, dec 2017. ISSN 2470-0010. doi: 10.1103/PhysRevD.96.123013. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.96.123013>.
- Jade Powell, Bernhard Müller, and Alexander Heger. The final core collapse of pulsational pair instability supernovae. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 503(2):2108–2122, may 2021. ISSN 0035-8711. doi: 10.1093/mnras/stab614. URL <https://doi.org/10.1093/mnras/stab614>.
- M Punturo, M Abernathy, F Acernese, B Allen, N Andersson, K Arun, F Barone, B Barr, M Barsuglia, M Beker, N Beveridge, S Birindelli, S Bose, L Bosi, S Braccini, C Bradaschia, T Bulik, E Calloni, G Cella, E Chassande Mottin, S Chelkowski, A Chincarini, J Clark, E Coccia, C Colacino, J Colas, A Cumming, L Cunningham, E Cuoco, S Danilishin, K Danzmann, G De Luca, R De Salvo, T Dent, R De Rosa, L Di Fiore, A Di Virgilio, M Doets, V Fafone, P Falferi, R Flaminio, J Franc, F Frasconi, A Freise, P Fulda, J Gair, G Gemme, A Gennai, A Giazotto, K Glampedakis, M Granata, H Grote, G Guidi, G Hammond, M Hannam, J Harms, D Heinert, M Hendry, I Heng, E Hennes, S Hild, J Hough, S Husa, S Huttner, G Jones, F Khalili, K Kokeyama, K Kokkotas, B Krishnan, M Lorenzini, H Lück, E Majorana, I Mandel, V Mandic, I Martin, C Michel, Y Minenkov, N Morgado, S Mosca, B Mours, H Müller–Ebhardt, P Murray, R Nawrodt, J Nelson, R Oshaughnessy, C D Ott, C Palomba, A Paoli, G Parguez, A Pasqualetti, R Passaquieti, D Passuello, L Pinard, R Poggiani, P Popolizio, M Prato, P Puppato, D Rabeling, P Rapagnani, J Read, T Regimbau, H Rehbein, S Reid, L Rezzolla, F Ricci, F Richard, A Rocchi, S Rowan, A Rüdigger, B Sassolas, B Sathyaprakash, R Schnabel, C Schwarz, P Seidel, A Sintes, K Somiya, F Speirits, K Strain, S Strigin, P Sutton, S Tarabrin, A Thüring, J van den Brand, C van Leewen, M van Veggel, C van den Broeck, A Vecchio, J Veitch, F Vetrano, A Vicere, S Vyatchanin, B Willke, G Woan, P Wolfango, and K Yamamoto. The Einstein Tele-

- scope: a third-generation gravitational wave observatory. *Classical and Quantum Gravity*, 27(19):194002, oct 2010. ISSN 0264-9381. doi: 10.1088/0264-9381/27/19/194002. URL <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0264-9381/27/19/194002>.
- Rich Abbott, Thomas D. Abbott et al., LIGO Scientific Collaboration, and Virgo Collaboration. Open data from the first and second observing runs of Advanced LIGO and Advanced Virgo. *SoftwareX*, 13:100658, 2021. ISSN 2352-7110. doi: <https://doi.org/10.1016/j.softx.2021.100658>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2352711021000030>.
- Vincent Roma, Jade Powell, Ik Siong Heng, and Raymond Frey. Astrophysics with core-collapse supernova gravitational wave signals in the next generation of gravitational wave detectors. *Physical Review D*, 99(6):063018, mar 2019. ISSN 2470-0010. doi: 10.1103/PhysRevD.99.063018. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.99.063018>.
- Peter J Rousseeuw and Christophe Croux. Alternatives to the Median Absolute Deviation. *Journal of the American Statistical Association*, 88(424):1273–1283, dec 1993. ISSN 0162-1459. doi: 10.1080/01621459.1993.10476408. URL <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/01621459.1993.10476408>.
- Kazuki Sakai. 重力波データ解析への Hilbert-Huang 変換の応用. PhD thesis, 長岡技術科学大学大学院, 2018. URL [https://nagaokaut.repo.nii.ac.jp/?action=pages\\_view\\_main&active\\_action=repository\\_view\\_main\\_item\\_detail&item\\_id=207&item\\_no=1&page\\_id=27&block\\_id=47](https://nagaokaut.repo.nii.ac.jp/?action=pages_view_main&active_action=repository_view_main_item_detail&item_id=207&item_no=1&page_id=27&block_id=47).
- Kazuki Sakai, Ken-ichi Oohara, Masato Kaneyama, and Hirotaka Takahashi. Amplitude-based detection method for gravitational wave bursts with the Hilbert-Huang Transform. jun 2016. doi: 10.48550/arxiv.1606.03583. URL <http://arxiv.org/abs/1606.03583>.
- Kazuki Sakai, Ken-ichi Oohara, Masato Kaneyama, and Hirotaka Takahashi. Analysis of the real gravitational wave data GW150914 with the Hilbert-Huang transform. *ICIC Express Letters*, 11(1):45–52, jan 2017a. doi: 10.24507/icicel.11.01.45. URL <https://doi.org/10.24507/icicel.11.01.45>.
- Kazuki Sakai, Ken Ichi Oohara, Hiroyuki Nakano, Masato Kaneyama, and Hirotaka Takahashi. Estimation of starting times of quasinormal modes in ringdown gravitational waves with the Hilbert-Huang transform. *Physical Review D*, 96(4):044047, aug 2017b. ISSN 24700029. doi: 10.1103/PhysRevD.96.044047. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.96.044047>.
- Kazuki Sakai, Masato Kaneyama, Ken-ichi Oohara, and Hirotaka Takahashi. Probability Distributions of Means of IA and IF for Gaussian Noise and Its Application to an Anomaly Detection. *Advances in Data Science and Adaptive Analysis*, 10(03):1850006, jun 2018. ISSN 2424-922X. doi: 10.1142/S2424922X18500067. URL <https://doi.org/10.1142/S2424922X18500067>.
- Jeffrey D. Scargle. Studies in Astronomical Time Series Analysis. V. Bayesian Blocks, a New Method to Analyze Structure in Photon Counting Data. *The Astrophysical Journal*, 504(1): 405–418, sep 1998. ISSN 0004-637X. doi: 10.1086/306064. URL <https://iopscience.iop.org/article/10.1086/306064>.
- BF Schutz. 相対論入門. 丸善, 1988. 江里口良治 二間瀬敏史 共訳.
- Shota Shibagaki, Takami Kuroda, Kei Kotake, and Tomoya Takiwaki. Characteristic time variability of gravitational-wave and neutrino signals from three-dimensional simulations of non-

- rotating and rapidly rotating stellar core collapse. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 502(2):3066–3084, apr 2021. ISSN 0035-8711. doi: 10.1093/mnras/stab228. URL <https://doi.org/10.1093/mnras/stab228>.
- H. Shinkai. ブラックホールと重力波. *数理科学*, (666):1–7, dec 2018. URL [https://www.oit.ac.jp/is/shinkai/Papers/1808\\_shinkai\\_BHGW.pdf](https://www.oit.ac.jp/is/shinkai/Papers/1808_shinkai_BHGW.pdf).
- B. W. Silverman. DENSITY ESTIMATION FOR STATISTICS AND DATA ANALYSIS. Chapman and Hall/CRC, 1986. doi: 10.3311/PPme.8017. URL [https://ned.ipac.caltech.edu/level5/March02/Silverman/Silver\\_contents.html](https://ned.ipac.caltech.edu/level5/March02/Silverman/Silver_contents.html)<https://ned.ipac.caltech.edu/level5/March02/Silverman/paper.pdf>.
- Edwin J. Son, Whansun Kim, Young-Min Kim, Jessica McIver, John J. Oh, and Sang Hoon Oh. Generating Event Triggers Based on Hilbert-Huang Transform and Its Application to Gravitational-Wave Data. oct 2018. doi: 10.48550/arxiv.1810.07555. URL <http://arxiv.org/abs/1810.07555>.
- Edwin J Son, Whansun Kim, Young-Min Kim, Jessica McIver, John J Oh, and Sang Hoon Oh. Time series anomaly detection for gravitational-wave detectors based on the Hilbert–Huang transform. *Journal of the Korean Physical Society*, 78(10):878–885, 2021. ISSN 1976-8524. doi: 10.1007/s40042-021-00094-2. URL <https://doi.org/10.1007/s40042-021-00094-2>.
- A Stroerer, L Blackburn, and J Camp. Comparison of signals from gravitational wave detectors with instantaneous time–frequency maps. *Classical and Quantum Gravity*, 28(15):155001, aug 2011. ISSN 0264-9381. doi: 10.1088/0264-9381/28/15/155001. URL <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0264-9381/28/15/155001>.
- Alexander Stroerer and Jordan Camp. NINJA data analysis with a detection pipeline based on the Hilbert–Huang transform. *Classical and Quantum Gravity*, 26(11):114012, jun 2009. ISSN 0264-9381. doi: 10.1088/0264-9381/26/11/114012. URL <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0264-9381/26/11/114012>.
- Alexander Stroerer, John K. Cannizzo, Jordan B. Camp, and Nicolas Gagarin. Methods for detection and characterization of signals in noisy data with the Hilbert-Huang transform. *Physical Review D*, 79(12):124022, jun 2009. ISSN 1550-7998. doi: 10.1103/PhysRevD.79.124022. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.79.124022>.
- Sofia Suvorova, Jade Powell, and Andrew Melatos. Reconstructing gravitational wave core-collapse supernova signals with dynamic time warping. *Physical Review D*, 99(12):123012, jun 2019. ISSN 2470-0010. doi: 10.1103/PhysRevD.99.123012. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.99.123012>.
- Hiroataka Takahashi, Ken-ichi Oohara, Masato Kaneyama, Yuta Hiranuma, and Jordan B. Camp. ON INVESTIGATING EMD PARAMETERS TO SEARCH FOR GRAVITATIONAL WAVES. *Advances in Adaptive Data Analysis*, 05(02):1350010, apr 2013. ISSN 1793-5369. doi: 10.1142/S1793536913500106. URL <https://doi.org/10.1142/S1793536913500106>.
- M. Takeda, Y. Hiranuma, N. Kanda, K. Kotake, T. Kuroda, R. Negishi, K. Oohara, K. Sakai, Y. Sakai, T. Sawada, H. Takahashi, S. Tsuchida, Y. Watanabe, and T. Yokozawa. Application of the Hilbert-Huang transform for analyzing standing-accretion-shock-instability induced gravitational waves in a core-collapse supernova. *Physical Review D*, 104(8):084063, oct 2021. ISSN 2470-0010. doi: 10.1103/PhysRevD.104.084063. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.104.084063>.
- Irene Tamborra, Florian Hanke, Bernhard Müller, Hans-Thomas Janka, and Georg Raffelt.

- Neutrino Signature of Supernova Hydrodynamical Instabilities in Three Dimensions. Physical Review Letters, 111(12):121104, sep 2013. ISSN 0031-9007. doi: 10.1103/PhysRevLett.111.121104. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.111.121104>.
- Guillermo Valdes, Brian O'Reilly, and Mario Diaz. A Hilbert–Huang transform method for scattering identification in LIGO. Classical and Quantum Gravity, 34(23):235009, dec 2017. ISSN 0264-9381. doi: 10.1088/1361-6382/aa8e6b. URL <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6382/aa8e6b>.
- David Vartanyan and Adam Burrows. Gravitational Waves from Neutrino Emission Asymmetries in Core-collapse Supernovae. The Astrophysical Journal, 901(2):108, sep 2020. ISSN 1538-4357. doi: 10.3847/1538-4357/abafac. URL <https://iopscience.iop.org/article/10.3847/1538-4357/abafac>.
- David Vartanyan, Adam Burrows, and David Radice. Temporal and angular variations of 3D core-collapse supernova emissions and their physical correlations. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 489(2):2227–2246, oct 2019. ISSN 0035-8711. doi: 10.1093/mnras/stz2307. URL <https://doi.org/10.1093/mnras/stz2307>.
- L. A. Wainstein and V. D. Zubakov. Extraction of Signals from Noise. Dover books on physics and mathematical physics (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ), 1962.
- ZHAOHUA WU and NORDEN E HUANG. ENSEMBLE EMPIRICAL MODE DECOMPOSITION: A NOISE-ASSISTED DATA ANALYSIS METHOD. Advances in Adaptive Data Analysis, 01(01):1–41, jan 2009. ISSN 1793-5369. doi: 10.1142/S1793536909000047. URL <https://doi.org/10.1142/S1793536909000047>.
- 佐々木節. 一般相対論. 産業図書, 1996.
- 須藤靖. 一般相対論入門. 日本評論社, 2005.
- 中村卓史, 三尾典克, and 大橋正健. 重力波をとらえる. 京都大学学術出版会, 1998.



# 謝辞

本論文の執筆にあたり、多くの方々のご助力を賜りました。この場を借りて深く感謝申し上げます。指導教員である神田展行教授にはこの3年間とても親身にご指導いただきました。重力波データ解析に関わる重力波源の理論から重力波検出器の原理、そして信号解析や統計学など、さらに研究発表の極意や文章添削、研究者としての心構えまで、幅広くご教授いただきました。自身の至らなさからご迷惑、ご心配をおかけすることが多かった3年間でしたが、辛抱強くご指導いただけて本当に感謝しております。伊藤洋介准教授には神田教授と共に多くのことをご指導いただきました。伊藤氏からの鋭い指摘のおかげで、本研究の目的や独自性について何度も見つめ直す機会を得ることができました。常定芳基教授には本研究について熱心に議論してくださり、タイトルについても親切に相談にのっていただきました。修士課程のときの指導教員であった放送大学の大原謙一教授には、博士課程でも多大なご支援を頂きました。大原教授の卓越したプログラミング技術、コンピュータに対する膨大な知識には非常に感銘を受け、自らの能力向上を志すきっかけとなりました。東京都市大学の髙橋弘毅教授には修士課程から5年間、対面やオンラインで指導いただきました。Hilbert-Huang transform に対する深い知識には非常に助けられました。研究内容や進路のことまで大変お世話になりました。長岡工業高等専門学校の酒井一樹助教には学会などで会うたびに議論に付き合ってくださいました。Hilbert-Huang transform について知見を深めることができました。新潟大学の平沼悠太氏にはプログラミング技術から最新の重力波研究事情について幅広くご教授いただきました。平沼氏との定期的なゼミのおかげでモチベーションの維持にもつながりました。東京大学の澤田崇広准教授には、同じ研究部屋だったこともあり多くの助力をいただきました。特に研究への厳しい姿勢は刺激を受けました。福井工業高等専門学校の土田怜助教には、修士課程の頃から親身にご指導いただきました。その方々に加え、福岡大学の固武慶教授、国立天文台助教の滝脇知也助教、ダムルシュタット工科大学の黒田仰生研究員氏、福岡大学の端山和大准教授、東京大学宇宙線研究所の横澤孝章氏、新潟大学修了の渡邊幸伸氏と根岸諒氏、東京都市大学の坂井佑輔氏には、共同研究において、研究の成果が迅速に出せないときも辛抱強く見守ってくださり時にはご助言を賜りました。また、修士課程の時に新潟大学の西亮一准教授と渡辺一也助教、東京大学宇宙線研究所の内瀧那美氏、学部4年次と修士課程に京都産業大学の二間瀬敏史教授にご指導いただいた経験は、本研究を行う上で糧となりました。新潟大学修了の日下公亨氏と豊島弥洋氏は、遠方ながらもオンラインで定期的にゼミを行なってくださいました。同研究室の修了生である大橋朋弥氏、小林佑一朗氏、藤本悠也氏、森末希氏、卒業生である守内一馬氏、関谷真由紀氏には、在学中に教科書の輪読や文献紹介ゼミで議論を交わしていただきました。同研究室の学振PDのMarco Meyer氏、学生の清田泰成氏、福永勇氏、覺依珠美氏、髙谷匡平氏、富田航汰氏、藤森匠氏、松山まほろ氏、岩永響生氏、川本竜生氏には、文献紹介ゼミ等で議論を交わしていただきました。研究に取り組む姿勢に日々刺激を受けることができました。同研究室の秘書である横田晴香氏にも、事務手続きや季節の行事を通して支援と細やかな気遣いをしてくださいました。最後に、大学院に進学することを理解してくださった家族に心からの感謝を申し上げます。