

超流動⁴Heにおける量子渦の非バルクの効果に
支配されたダイナミクスの理論的研究
(Theoretical study of dynamics of quantized vortices governed
by non-bulk effects in superfluid ⁴He)

理学研究科
数物系専攻

令和5年度

中川 朋
(Nakagawa Tomo)

要旨

超流動ヘリウム4は代表的なボース量子流体であり、そこで実現する量子渦が系の物性に強く関わっている。量子渦研究は、境界などの効果があまり効かないバルク系が主となり、行われてきた。近年では、実験技術の向上もあり、微小な構造をもった物体の制御ができるようになり、それをを用いた量子渦研究が行われてきている。ここでは、境界へのピンニングや不純物のトラップなど非バルク的な効果で優位であると考えられている。本学位論文では、実験系をモデル化し、数値シミュレーションを用いて解析する。内容は大きく分けて2つであり、「プレート状MEMS共振器中の量子渦ダイナミクス」と「帯電粒子をトラップした量子渦のダイナミクス」である。

プレート状MEMS共振器中の量子渦ダイナミクス

MEMSは、Micro Mechanical Electro Systemsの略であり、非常に小さく軽い電気機械デバイスを指しており、受ける力に非常にセンシティブに反応する。このようなデバイスが、近年超流動ヘリウム4研究に用いられており、新たな観測事実が提供されている。Barquistらはプレート状のMEMS共振器を用意し、超流動ヘリウム4中にて剪断モードで振動させ、その応答を調べ、振動の異常減衰など興味深い観測結果をあげた。

我々はこの背景には、プレートと基板の間に挟まれて存在する量子渦と量子渦のピンニングが関わっていると考え、2つの平行な固体境界間に量子渦が存在する系を考え、固体境界への量子渦のピンニングを臨界角モデルと半球型ピンニングサイトモデルという2種類のモデルで記述した。このモデルを用いて、系の量子渦のダイナミクスの記述と実験事実の説明を試みた。量子渦がプレートにピンニングされている時、プレートの駆動とともに渦も動かされる。その結果として、プレートの振動数がKelvin波のモードと一致していれば、量子渦にKelvin波が励起されることが確認できた。また、複数渦が存在していることや外部からの渦の注入も考慮に入れることで実験系での乱流の形成に関して調べた。その結果、ピンニングが効いている時、乱流の形成が阻害されることがわかった。実験の観測事実に関しては、渦からプレートに与えられる張力を計算することで考察した。プレートの振動によるKelvin波励起で減衰力が生じることがわかり、振動の異常減衰を定性的に説明し、他の実験事実にも説明を与えた。

帯電粒子をトラップした量子渦のダイナミクス

Minowaらは、近年超流動ヘリウム4内にシリコン微粒子を生成し、それらが量子渦にトラップされることを利用して、量子渦の可視化に成功した。これは金属粒子で量子渦を可視化した唯一の例である。系に電場を印加することにより、この系で生成されたシリコン微粒子は一部帯電しているらしいことが、実験的に確かめられた。彼らは量子渦にその

帯電粒子がトラップされている時に系に振動電場を印加すると Kelvin 波のような構造が励起されることを発見した。

我々は、量子渦にトラップされた帯電粒子のダイナミクスをモデル化することで、Kelvin 波励起の様子を調べた。量子渦に帯電粒子が1つトラップされている時、振動電場とともに Kelvin 波が確かに励起されることが、その分散関係などを調べることでわかった。また、その励起の程度には強い有限サイズ効果があり、系が小さいほど実験でつかわれる振動電場の振動数に対応した Kelvin 波モードが少なくなり、Kelvin 波が励起されにくくなることがわかった。一方、単に帯電粒子が1つトラップされている状況だけでは、Kelvin 波の振幅が実験で見られているものと比べて格段に小さくなった。そのため、粒子の帯電量などの面から考察し、振幅が大きくなる要素を抽出することで原因を探った。

Abstract

Superfluid ^4He is a typical Bose quantum fluid, and quantized vortices that exist in superfluid ^4He are related to physical properties of the system. Studies on quantized vortices have been conducted on bulk systems where the local effects, such as boundary conditions and surface roughness of boundaries, do not work well. Recently, objects with microstructure are controlled in superfluid ^4He by improvement of experimental techniques. The objects are applied to quantized vortex studies. In the studies, non-bulk effects, such as vortex pinning to boundaries and impurity trapping to vortices, are often dominant. In this thesis, the experimental systems are modeled and analyzed using numerical simulation. There are two main topics: "Dynamics of quantized vortices in a plate-shaped microelectromechanical oscillator" and "Dynamics of quantized vortices trapping charged particles."

Dynamics of quantized vortices in a plate-shaped microelectromechanical oscillator

MEMS stands for Micro-Mechanical-Electro Systems, and is devices in micrometer dimensions and low mass. Thus, MEMS is very sensitive. Such devices are applied to superfluid ^4He experiments, and new observation results have been found. Barquist *et al.* prepared plate-shaped MEMS resonators, and oscillated them in a shear mode. They observed their response, and found interesting results, such as anomalous damping.

We considered that the damping is related to vortices between the plate and a substrate and vortex pinning. We assumed systems with vortices between two parallel solid boundaries, modeled the vortex pinning by two methods: Critical angle model and Hemispherical pinning site model. Utilizing these models, we attempted to describe the vortex dynamics and reveal the experimental facts. When quantized vortices pinned to the plate, the vortices are moved along with the plate drive. As a result, it was confirmed that Kelvin waves are excited in the quantized vortex if the frequency of the plate coincides with the mode of the Kelvin wave. We also investigated the formation of turbulence in the experimental system by taking into account the presence of multiple vortices and the injection of vortices from outside. The results showed that the formation of turbulence was inhibited when the pinning was present. The observed facts of the experiment were discussed by calculating the tension worked on the plate from the eddies. It was found that the Kelvin wave excitation due to plate oscillation produces a damping force, which qualitatively explains the anomalous damping of the oscillations and provides an explanation for the other experimental facts.

Dynamics of quantized vortices trapping charged particles

Minowa *et al.* recently produced silicon particles in superfluid ^4He and used their trapping in quantized vortices to visualize quantum vortices. This is the only example of visualizing quantized vortices with metallic particles. By applying an electric field to the system, it was experimentally confirmed that the silicon particles produced in this system were partially charged. They found that applying an oscillating electric field to the system when the charged particles are trapped in a quantized vortex excites a Kelvin wave-like structure.

We investigated the Kelvin wave excitation by modeling the dynamics of a charged particle trapped in quantized vortices. We found that when a single charged particle is trapped in a quantized vortex, the Kelvin wave is indeed excited along with the oscillating electric field by studying its dispersion relation and so on. It is also found that there is a strong finite-size effect on the degree of excitation, and that the smaller the system is, the fewer the Kelvin modes corresponding to the frequency of the oscillating electric field used in the experiment are, and the Kelvin waves are less likely to be excited. On the other hand, in the situation where only one charged particle is trapped, the amplitude of the Kelvin wave is much smaller than that seen in the experiment. Therefore, we searched for the cause by considering aspects such as the amount of charged particles and extracting the factors that cause the amplitude to increase.

参考論文

1. Tomo Nakagawa, Makoto Tsubota, Keegan Gunther and Yoonseok Lee "Dynamics of pinned quantized vortices in superfluid 4He in a microelectromechanical oscillator", Phys. Rev. B. **108** 144110 (2023)
2. Tomo Nakagawa and Makoto Tsubota, "Dynamics of Pinned Vortices between Oscillating Plates: Quantum turbulence in MEMS resonator", JPS Conf. Proc. **38** 011003 (2023)
3. Yosuke Minowa, Shota Aoyagi, Sosuke Inui, Tomo Nakagawa, Gamu Asaka and Makoto Tsubota, Masaaki Ashida, "Visualization of quantized vortex reconnection as enabled by laser ablation", Sci. Adv. **8** eabn1143 (2022)
4. Tomo Nakagawa, Sosuke Inui and Makoto Tsubota, "Internal structure of localized quantized vortex tangles" Phys. Rev. B **104** 094510 (2021)
5. Sosuke Inui, Tomo Nakagawa and Makoto Tsubota, "Bathtub vortex in superfluid 4He " Phys. Rev. B **102** 224511 (2020)
6. Tomo Nakagawa, Sosuke Inui, Makoto Tsubota and Hideo Yano, "Statistical laws and self-similarity of vortex rings emitted from a localized vortex tangle in superfluid 4He " Phys. Rev. B **101** 184515 (2020)

目次

第 1 章 導入	11
1.1 超流動ヘリウム 4	11
1.2 Bose-Einstein 凝縮	12
1.3 超流動ヘリウム 4 の素励起	12
1.4 2 流体モデル	13
1.5 量子渦	14
1.5.1 量子渦の観測	16
1.5.2 量子渦のダイナミクス	17
1.6 量子乱流	20
1.6.1 Bulk 系から Local 系へ	21
1.6.2 乱流の統計則	22
1.7 Kelvin 波	25
1.7.1 分散関係	25
1.7.2 Kelvin 波カスケード	31
1.8 量子渦糸モデルの数値計算スキーム	31
1.8.1 Biot-Savart 項の計算	31
1.8.2 境界条件	33
1.8.3 点の補完・消去	34
1.8.4 再結合	35
1.9 本研究について	35
第 2 章 プレート状 MEMS 共振器中の量子渦ダイナミクス	37
2.1 序章	37
2.2 一連の現象の原因	41
2.3 ピニングモデル	43
2.3.1 臨界角モデル	43
2.3.2 半球型ピニングサイトモデル	45
2.4 系のモデル化	45
2.5 渦のダイナミクス	46
2.5.1 単一渦の場合	46
2.5.2 振幅スペクトル	53
2.5.3 複数渦の場合	54
2.6 渦からプレートにかかる力	59
2.6.1 単一渦の場合の力	59
2.6.2 複数渦の場合の力	62
2.7 結論と展望	65

第 3 章	帯電粒子をトラップした量子渦のダイナミクス	71
3.1	序章	71
3.2	モデル化	74
3.2.1	粒子ダイナミクスのモデル化	74
3.2.2	系のモデル化	75
3.3	Kelvin 波励起	75
3.4	粒子トラップによる影響	79
3.5	有限サイズ効果	80
3.6	粒子軌道	83
3.7	Kelvin 波の振幅	84
3.7.1	熱対向流	84
3.7.2	有限サイズ効果	85
3.7.3	帯電量	85
3.7.4	複数粒子の帯電	86
3.7.5	様々な要因の混合を経て	89
3.8	結論	89
第 4 章	結論	91
付 録 A	相互摩擦の計算	93
付 録 B	ボックスカウント法及び乱流の間欠性モデル	94
付 録 C	球面の境界条件の計算	96
付 録 D	“張力” について	98

第1章 導入

量子流体とは低温になることにより構成粒子の熱的ドブロイ波長が系の代表的な長さスケール(平均粒子間距離など)を上回り、量子力学的な特徴がマクロに現れた流体である。そこでは、量子統計が優位になり我々の身の回りの流体とは大きく異なる物性がみられ、低温物理学を中心に 20 世紀前半から研究されてきた [1]。

量子流体は様々な系で実現する。超流動ヘリウム 4、超伝導体中の電子、超流動ヘリウム 3、冷却原子気体、励起子も量子流体を構成する。さらには、宇宙物理学においても中性子星の内部構造やダークマターも量子流体として記述できると言われており、量子流体は幅広い分野から注目を集めている。超流動ヘリウム 4 は量子流体の代表的な例であり、液体ヘリウム 4 を温度 2.17 K 以下まで冷却した時に発現する。量子流体では、量子渦という循環流が実現し、系の物性に深く関わっているとされている。しかしながら、量子渦のダイナミクスは非常に複雑であるため、解析が難しく、数値シミュレーションが一つの強力な研究ツールとなっている。

近年の超流動ヘリウム 4 の実験では、実験技術の向上により、量子渦のピンニング現象や不純物など無視されることの多かった微小な構造が影響していると思われる現象が観測されており、新たな物理が開拓されてきている。本研究ではそのような系の量子渦のダイナミクスに着目し、数値シミュレーションを主として議論を行っていく。本章では、超流動ヘリウム 4 やその量子渦に関する導入、及び、研究状況について説明し、第 2 章以降では実際に行った研究を紹介する。

1.1 超流動ヘリウム 4

ヘリウムは、現代に至るまで低温物理学のコアとなっている物質である。1908 年、Kamerling Onnes が気体ヘリウム 4 を温度 4.2 K 以下まで冷却すると液化することを発見し、1911 年にはそれを用いて水銀の超伝導を発見した。現代においては、液体ヘリウムは不活性性と沸点の低さから冷媒として広く用いられている。1938 年には、Kapitza によって 2.17 K 以下で液体ヘリウム 4 が粘性を消失する状態、超流動状態に転移することが発見された¹[2]。粘性がないことは、流れに対するエネルギーの散逸がないことを意味する。例えば、環状の管にて流体を駆動すると、普通の流体であれば、粘性による散逸で流れが止まるが、超流体では永久に流れ続ける。

そのような超流動状態では、非粘性流の他に 2 つ大きな特徴がある。1 つが、長距離相関から生まれる秩序変数、凝縮体波動関数である。凝縮波動関数は一般に $\sqrt{n_0}e^{i\theta}$ で表される。ここで n_0 と θ はそれぞれ凝縮体密度と位相である。直感的な理解としては、系の温度が下がることにより、系を構成する粒子の多くが低エネルギー状態を占有し (Bose-Einstein condensate)、それぞれの熱的ドブロイ波長が伸びてコヒーレントに重なること

¹Kamerling Onnes も冷却の過程で見たいらしい。

により、系全体が巨視的な波動のような特徴を持つようになると考えられる。

もう一つが、量子渦の出現であり、本研究のメインテーマである。量子渦は循環が離散化された回転流のことである。超流体でない通常の流体では、渦の循環は連続的で任意な値をとり、粘性によって散逸される不安定なものである。一方超流動では、離散的な循環を持つ量子渦が安定して存在している。この量子渦が超流動体の物性に強い影響を及ぼしていると考えられており、超流動ヘリウムの研究では1つのメジャーな研究課題である。

1.2 Bose-Einstein 凝縮

陽子2つ、中性子2つ、電子2つからなるヘリウム4はスピン0の Bose 粒子であり、Bose-Einstein 統計に従うため、十分に低い温度では巨視的な数の粒子が、最低エネルギー状態に凝縮する。これを Bose-Einstein 凝縮と呼ぶ。一般的に十分低い温度で起こる超流動状態はこの Bose-Einstein 凝縮と密接に関係していると考えられている²。相互作用のない理想 Bose 気体では、転移温度 $T_B = (2\pi\hbar^2/mk_B)(N/2.612V)^{2/3}$ 以下で Bose-Einstein 凝縮を引き起こすとされている (k_B はボルツマン定数)。一方、実在系の粒子は互いに相互作用をし、超流動ヘリウム4はいわゆる強相関係である。先ほどの式にヘリウム4のパラメータを代入しても温度は3.1 K ほどで実際の転移温度2.17 K を正確には予言しない。また、ヘリウム4は0 K に近づけても10%程度しか最低エネルギー状態に凝縮しないことが知られている [3]。それでも、ヘリウム4は超流動の特徴を示してくれている。

このようなとき、系は凝縮体密度 n_0 及び位相 θ という2つのパラメータで表される秩序関数

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{n_0(\mathbf{r}, t)}e^{i\theta(\mathbf{r}, t)} \quad (1.1)$$

で記述される。この秩序関数は相互作用が十分弱い冷却原子気体などの系では非線形 Schrödinger 方程式の一種である Gross-Pitaevskii 方程式

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V + g|\Psi|^2 \right) \Psi \quad (1.2)$$

に従う。ここで V はポテンシャル、 g は相互作用の係数である。しかし、液体ヘリウム4は非常に相互作用が強いため、この Gross-Pitaevskii 方程式ではダイナミクスを正確には記述できない³。そのため、量子渦系モデルなど別のアプローチからの数値研究が主流である。

1.3 超流動ヘリウム4の素励起

超流動ヘリウム4のような相互作用がある系では、しばしば素励起描像が用いられる。素励起は一般に準粒子という形で表され、Landau は比熱の温度依存性からフォノンとロトンという準粒子を用いて励起スペクトルを提唱した。図1.1のように、波数が低い領域はフォノンによる分散関係 $\omega = ck$ ($c \approx 238$ m/s は音速) が、波数が高くなると $k \approx 1.9 \text{ \AA}^{-1}$ における極小がロトンにより現れる。このスペクトルはのちに中性子散乱の実験で確かめられている [6]。

²厳密には、超流動状態であることは Bose-Einstein 凝縮が起こっていることの必要条件でも十分条件でもない。

³近年では、長距離相互作用を取り入れて記述しようとする試みもある [4, 5]

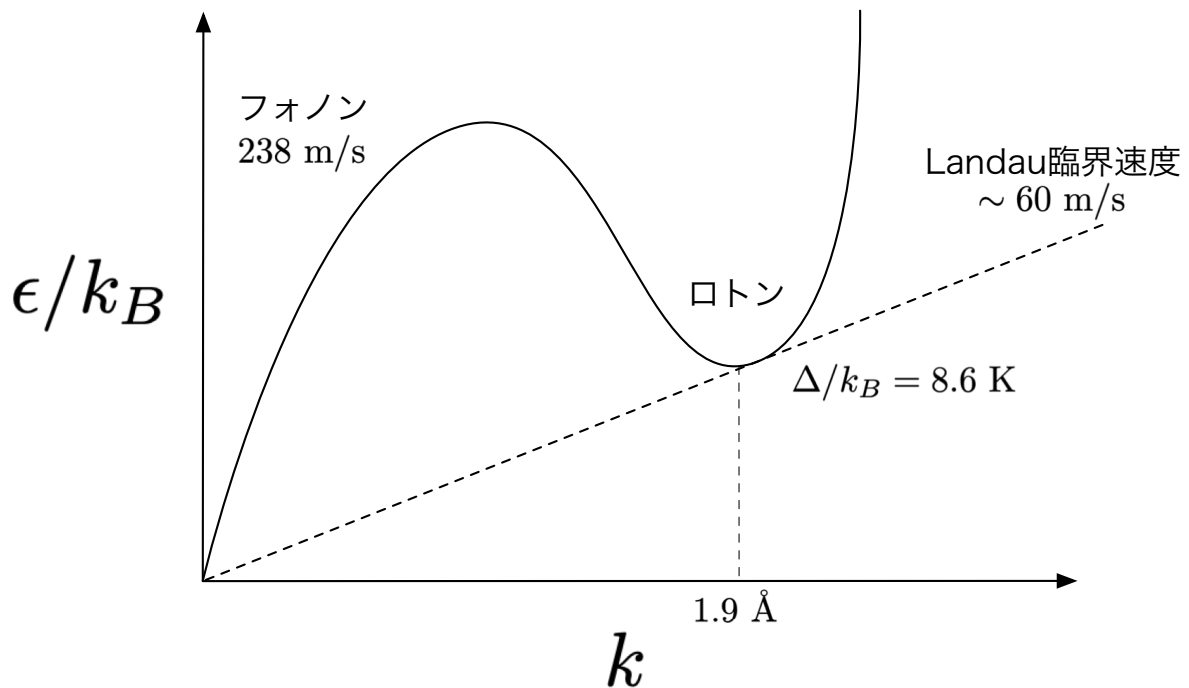


図 1.1: ヘリウムの素励起の分散関係の概念図

この素励起描像から超流動ヘリウム4が不安定になる Landau 臨界速度を求めることができる。管の中で超流動ヘリウムが速度 v_s で流れているとする。このときのエネルギーを ϵ' とする。次に流体が静止している座標系を考える (管が $-v_s$ で動いている)。このとき運動量 \mathbf{p} を持つ素励起のエネルギーは $\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}_s$ 変化して

$$\epsilon' = \epsilon + \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}_s \quad (1.3)$$

このとき、 $\epsilon' < 0$ であれば準粒子が存在することで系のエネルギーを減少させるため、無数に準粒子が生成され、超流動が不安定になる。このときの最小の超流動速度 v_c は

$$v_c = \min \frac{\epsilon(p)}{p} \approx 60 \text{ m/s} \quad (1.4)$$

となる。これは原点から、ロトンの極小に引いた接線の傾きに対応している。この傾きを越えた時に、ロトン付近の素励起が現れ、超流動が崩壊する。

1.4 2 流体モデル

流体の粘性を測定する方法はいくつもあり、超流動ヘリウム4にも様々な方法が適用されてきている。Wilhelm らは毛細管を通る流体の速度で粘性を観測した [7]。毛細管での平均流速は $d^2 \Delta P / 8 \eta l$ という形で表せる。ここで d 、 l 、 η はそれぞれ毛細管の半径、長さ、流体の粘性である。また ΔP は l 離れた場所の圧力差である。つまり、この実験では圧力差 ΔP と流速を測定することで粘性が計算できる。彼らは転移温度以上では有限の粘性を観測したが、転移温度以下では圧力差に依存しない流れを観測し、粘性が無くなることがわかった。一方、Burton らによる回転粘性計実験では異なる結果が得られた [8]。彼らは2重の円筒容器の間に液体ヘリウムを満たし、内側の円筒を回転させることで受けたトル

クから粘性を測定した。古典的な流体では当然ながら測定方法による粘性の違いはあってはならない。しかし、超流動ヘリウム4では、やはり転移温度以上では粘性が有限であったが、転移温度以下でも有限の粘性が測定された。

この結果を経て、Landau や Tizsa は有限温度の超流動ヘリウムでは粘性がない超流動成分と粘性のある常流動状態が混在している2流体モデルを考案した [9, 10]。このモデルでは、超流動ヘリウム4の物理は現象論的に最低エネルギー状態に凝縮した成分である超流動成分と、素励起による常流動成分の2成分の混合流体であると仮定している。 $T > 1$ Kでは、準粒子の密度が大きくなり、流体力学的な描像が適用でき、それが常流動を形成している。この描像が正しいとすると、毛細管による粘性測定では、超流動成分が毛細管を粘性なしで流れているため粘性が測定されず、回転粘性計では、常流動の粘性応力が働くため、粘性が測定されていたことになる。液体ヘリウム4は温度2.17 Kにて超流動ヘリウムに転移し、その内の超流動成分の密度 ρ_s は温度が下がるにつれて増加し、常流動成分は ρ_n は減少する。この時、密度の和 $\rho = \rho_s + \rho_n$ はおよそ一定を保っており、 145 kg/m^3 ほどである。この密度の割合の温度変化は実際に Andronikashvili によって複数の円盤をつけたねじれファイバーを用いて測定された。円盤の間隔は常流体の侵入長に比べて小さいため、常流体はファイバーのねじれとともに動く。この時の慣性モーメントを測定することで、常流体の割合がわかる。

次章で導入される量子渦が存在しない時、超流動速度場 \mathbf{v}_s 、常流動速度場 \mathbf{v}_n は、

$$\rho_s \left[\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + (\mathbf{v}_s \cdot \nabla) \mathbf{v}_s \right] = -\frac{\rho_s}{\rho} \nabla P + \rho_s s \nabla T + \frac{\rho_n \rho_s}{2\rho} \nabla (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) \quad (1.5)$$

$$\rho_n \left[\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t} + (\mathbf{v}_n \cdot \nabla) \mathbf{v}_n \right] = -\frac{\rho_n}{\rho} \nabla P - \rho_n s \nabla T - \frac{\rho_n \rho_s}{2\rho} \nabla (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) + \eta_m \nabla^2 \mathbf{v}_n \quad (1.6)$$

で記述される。 s は常流体のエントロピー密度、 P 、 T は圧力と温度である。量子渦が存在する時には、それを介してこれらの間に相互摩擦が働き、その式は HVBK (Hall-Vinen-Bekharevich-Khalatnikov) 方程式と呼ばれる。

1.5 量子渦

先にも示したように、超流動のダイナミクスは凝縮体波動関数 $\Psi = \sqrt{n_0} e^{i\theta}$ により支配されている。これにより、超流動の運ぶ運動量密度 \mathbf{j} は

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2i} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) = m n_0 \mathbf{v}_s \quad (1.7)$$

となる。ここで \hbar 、 m 、 \mathbf{v}_s はそれぞれ、ディラック定数 (プランク定数 h を 2π で割ったもの)、ヘリウム4原子の質量、超流動速度である。これより、超流動速度 \mathbf{v}_s は

$$\mathbf{v}_s = \frac{\hbar}{m} \nabla \theta \quad (1.8)$$

と、位相の勾配で記述される。この時、超流動体で満たされた単連結領域を考えると渦度 $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ は $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}_s = (\hbar/m) \nabla \times \nabla \theta = 0$ より渦なし流れである。この時循環 $\Gamma = \oint_C \nabla \times \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$ ももちろんゼロである。しかしながら、超流動体が排除された多重連結

領域 (超流動体以外の物体が存在していたり、単純に超流動体が満たされていない領域が存在する) の場合はその限りではない。この時、循環は

$$\begin{aligned}\Gamma &= \oint_C \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{l} = \frac{\hbar}{m} \oint_C \nabla\theta \cdot d\mathbf{l} \\ &= \frac{\hbar}{m} \times 2\pi n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$= \kappa n \quad (1.10)$$

となる。ここで、 θ の一価性を用いた。一般的に超流動ヘリウム 4 中では量子渦は回転の中心のみ超流体が排除されることで実現している。ここで $\kappa \equiv h/m$ は循環量子と呼ばれ、量子渦を特徴付ける重要な量である。超流動ヘリウム 4 では、この循環量子の値は $\kappa \approx 9.97 \times 10^{-8} \text{ m}^2/\text{s}$ である。

量子渦のエネルギーを簡単に見積もる。循環 Γ を持つ量子渦が一本、半径 R の円筒容器の中心に存在しているとする。エネルギー密度は超流動の密度と速度場を ρ_s 、 \mathbf{v}_s とそれぞれおくと、 $\rho_s v_s^2/2$ と表される。これより単位長さあたりのエネルギー ϵ は、中心から距離 r での超流動速度が $\Gamma/2\pi r$ となることに注意すると

$$\epsilon = \int \frac{1}{2} \rho_s v_s^2 = \frac{\rho_s}{2} \int_a^R \left(\frac{\Gamma}{2\pi r} \right)^2 2\pi r dr = \frac{\rho_s \Gamma^2}{4\pi} \ln \left(\frac{R}{a} \right) \quad (1.11)$$

と計算できる。ここで a は渦芯の大きさである。この単位長さあたりのエネルギーは力の次元を持ち、渦による張力と等価である。これから、量子渦のエネルギーは $\epsilon \propto \Gamma^2 \propto n^2$ となることがわかる。つまり、 n が大きい渦がエネルギーが高く、より n の小さい渦が複数存在した方がエネルギーが低く安定である。よって、 $n = 1$ の渦が安定的に存在すると考えられる。

超流動体は非粘性流体であるため、Kelvin の渦定理が成立する。Kelvin の渦定理とは、非粘性流体が、ポテンシャル流によって駆動され、密度が圧力のみ関数になるバロトロピー流体 (液体ヘリウムは一般的に非圧縮性流体であるためこれに当てはまる) の場合、流体粒子とともに動く循環が保存される定理である。簡単な導出を見ておく。循環 Γ の物質微分をとる。

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_C \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot d\mathbf{l} + \oint_C \mathbf{v} \cdot \frac{Dd\mathbf{l}}{Dt} \quad (1.12)$$

それぞれの項について考える。第一項の $D\mathbf{v}/Dt$ はポテンシャル Ω で駆動された Euler 方程式 $D\mathbf{v}/Dt = -(1/\rho)\nabla P - \nabla\Omega$ より

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P - \nabla\Omega \quad (1.13)$$

となる。ここで P は圧力である。第 2 項は $Dd\mathbf{l}/Dt = d(D\mathbf{l}/Dt) = d\mathbf{v}$ なので、

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_C \left(-\frac{1}{\rho}\nabla P - \nabla\Omega \right) \cdot d\mathbf{l} + \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} \quad (1.14)$$

$$= -\oint_C \frac{1}{\rho} dP - \oint_C d\Omega + \oint_C d\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \quad (1.15)$$

$$= 0 \quad (1.16)$$

となる。ここで、 ρ 、 P 、 Ω 、 \mathbf{v} が全て一価であることを用いている。この定理からわかることは、非粘性流体中では渦は不生不滅であり、流れ場にしがたって「凍ったように動く」

ことである。この時、互いに接近した2本の渦が繋ぎ換わる現象、再結合が封じられる。しかしながら、超流動で満たされない領域があるためか、数値的及び実験的に確かに量子渦で再結合が起きていることが観測されている。

1.5.1 量子渦の観測

超流動ヘリウム4中での量子渦の観測は1961年 Vinen が初めて成功した [11]。円筒容器の中心に細いワイヤーを張り、2重連結領域を作り出した。超流動転移前の液体ヘリウムをワイヤーを張った部分を軸に容器ごと回転させた後、冷却し、中心に量子渦を作り出した。それに加え、Vinen は静磁場中に交流電流をワイヤーに流すことでローレンツ力でワイヤーを振動させた。ワイヤー周りに回転がなければ、ワイヤーは右に回るモードと左に回るモードが縮退している。もし、回転流があれば、ワイヤーに Magnus 力が加わり、その縮退がとけ、 $\rho_s \kappa / \pi M$ の振動数の差が生まれ、円偏波となる。ここで M はワイヤーの単位長さあたりの質量とワイヤーによって排除された流体の質量の半分の和である。これにより、確かに循環 h/m_4 (m_4 はヘリウム4原子の質量) に強いピークを持つことが確認された。

循環の観測からさらに進展し、量子渦は Maryland 大学の Bewley らによって2006年に可視化された [12]。彼らは転移前の液体ヘリウムに水素ガスを注入し、ミスト状の固体粒子群を生成した。この状態では粒子は散らばった状態であるが、超流動転移後は粒子が線のように繋がった構造が見られた。これは、超流動転移するとともに系に量子渦が現れ、その周りの強い回転のおかげで粒子が Bernoulli 圧力⁴により渦の芯付近にトラップされているためであると考えられる。また、系を容器ごと回転させると、粒子が回転軸と平行に並び、格子を形成した。これは、量子渦が規則的に並んだ Abrikosov 格子である。実際にこれが Feynman 則⁵と一致していたことから、線上に並んだ粒子は量子渦上にトラップされたものであると断定された。彼らはさらに、実際に量子渦が再結合する様子を撮影することにも成功した。量子渦を特徴付ける量 κ から次元解析的に再結合した渦の間の距離 $d(t)$ は時間変化し、

$$d(t) = \sqrt{\kappa(t - t_0)} \quad (1.17)$$

に従うと予想した。ここで t_0 は渦が再結合した時間である。実際に実験から得られたデータを $\alpha(t - t_0)^\beta$ でフィッティングすると、 $\beta = 0.45 \pm 0.07$ 、 $\alpha \approx 2.3\sqrt{\kappa}$ と式 (1.17) と近い値が得られている。

可視化実験はこの後 Florida 州立大学 [13]、大阪大学 [14] などでも行われている。大阪大学のグループはレーザー光をシリコンにあてシリコンの微粒子を生成する技術を用いて、超流動ヘリウム4中に生成した。シリコン粒子は水素粒子と同様に量子渦にトラップされ、再結合も観測された。シリコン粒子は水素粒子より密度や反射係数が高く、これから様々な観測が行われていくと予想される。この実験に関しては第3章にて詳しく述べる。

⁴Bernoulli の定理から圧力 P は流速 v に対して2次関数的に減少する。

⁵渦の面密度 n_v が格子の回転速度 Ω に対して $n_v = \frac{2\Omega}{\kappa}$ となる法則。

1.5.2 量子渦のダイナミクス

0 Kにおけるダイナミクス

この章では、量子渦の運動を考える。まず、温度 0 K(常流体なし)、境界なし、外場なしのシンプルな場合を考える。非圧縮性 $\nabla \cdot \mathbf{v}_s = 0$ 及び渦度の定義 $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}_s$ を用いると、 $\nabla \times \boldsymbol{\omega} = -\nabla^2 \mathbf{v}_s$ という形の Poisson 方程式になる。よって、渦が作る超流動速度場 \mathbf{v}_s は Biot-Savart の法則により与えられ、

$$\mathbf{v}_s(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \times (\mathbf{r} - \mathbf{x})}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|^3} d\mathbf{x} \quad (1.18)$$

で計算できる。超流動ヘリウム 4 の渦芯は 0.1 nm ほどの微細な構造を持つ。これは実験系の典型的なスケールに比べて十分小さいため、1次元的に渦芯が局在しているように仮定するモデル、量子渦糸モデルが良く適用できる。渦度は局在していて、デルタ関数的に $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) = \kappa \int_L \mathbf{s}'(\xi) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{s}(\xi)) d\xi$ (ここで $\mathbf{s}(\xi)$ は量子渦の位置をパラメータ ξ で表示したものであり、 $\mathbf{s}' = d\mathbf{s}/d\xi$ で渦度の向きの単位ベクトル) とかけるとすると、

$$\mathbf{v}_s(\mathbf{r}, t) = \frac{\kappa}{4\pi} \int_L \frac{\mathbf{s}' \times [\mathbf{r} - \mathbf{s}(\xi)]}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(\xi)|^3} d\xi \quad (1.19)$$

となる。Kelvin の渦定理により、量子渦は他の寄与がなければこの自身が作る速度場によってのみ運動する。

ここで、簡単なケースを考える。無限に長い直線渦を考えると、親指の向きを渦度の向き、その他の指の向きが流れの向きを表す右ネジの法則で流れが表される。さらに反平行(渦度の向きが逆)な 2本の直線渦があったとすると、お互いが作る速度場により両者は同じ方向に平行に進む(図 1.3(a))。その速さは距離 r とすると、 $\kappa/2\pi r$ である。一方で、平行な 2本の直線渦がある場合は、それらは 2点の重心を中心として速度 $\kappa/2\pi r$ で回転する(図 1.3(b))。

次に渦が円状になった渦輪を考える。量子渦は一般に $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}_s) = 0$ より境界に当たって途切れるか、閉じる形になっている。閉じた円状の渦輪の運動を考えるために式 (1.19) に対して自己誘導近似を導入する。渦のある点 $\mathbf{s}(\xi_0)$ を考える。この点の周りで距離 R ほどの積分を考え、展開すると

$$\mathbf{v}_{s,local} = \frac{\kappa}{4\pi} \int_a^R \frac{\mathbf{s}'(\xi_0) \times [\mathbf{s}(\xi_0) - \mathbf{s}(\xi)]}{|\mathbf{s}(\xi_0) - \mathbf{s}(\xi)|^3} d\xi \quad (1.20)$$

$$\approx \frac{\kappa}{4\pi} \int_a^R \frac{\mathbf{s}'(\xi_0) \times \left[(\xi - \xi_0) \mathbf{s}' + \frac{(\xi - \xi_0)^2}{2} \mathbf{s}'' \right]}{|\mathbf{s}(\xi_0) - \mathbf{s}(\xi)|^3} d\xi \quad (1.21)$$

$$\approx \frac{\kappa}{8\pi} \int_a^R \frac{d\xi}{\xi - \xi_0} \mathbf{s}' \times \mathbf{s}'' = \beta_{ind} \mathbf{s}' \times \mathbf{s}'' \quad (1.22)$$

とかける。 \mathbf{s}'' は曲率半径 R_0 の逆数 $1/R_0$ の大きさを持つので、半径 R_0 の渦輪はその大きさに反比例した速度 β_{ind}/R で進んでいく(それぞれのベクトルの概念図は図 1.2 に示されている)。進行方向は右手の親指以外の指を渦輪の巻き方向に向けた時の親指の向きである(図 1.3(c))。

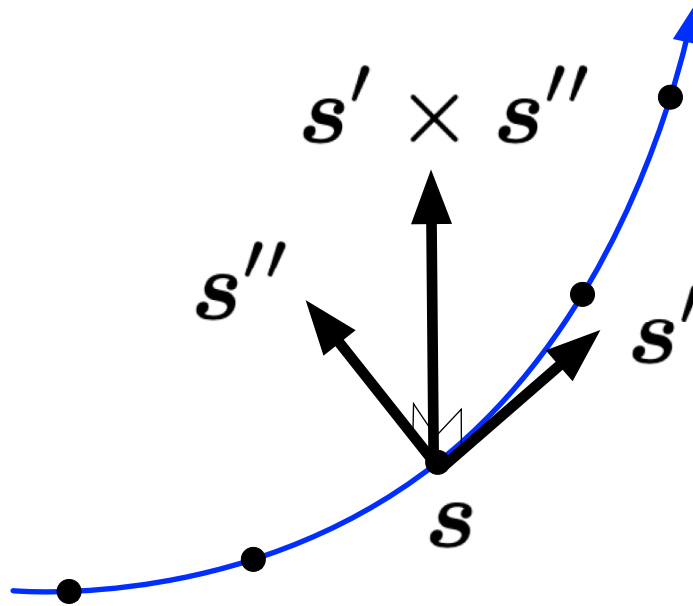
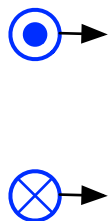
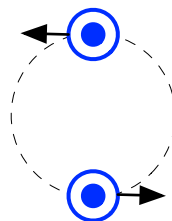


図 1.2: 渦上の点 s に対する接線ベクトル s' 、法線ベクトル s'' 及び $s' \times s''$ の概念図

(a) 反平行な渦



(b) 平行な渦



(c) 渦輪

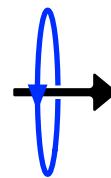


図 1.3: (a) 反平行な渦、(b) 平行な渦及び (c) 渦輪のそれぞれの運動の概念図

T[K]	α	α'	T[K]	α	α'
1.0	0.006	0.003	1.7	0.127	0.012
1.1	0.012	0.006	1.8	0.161	0.008
1.2	0.023	0.011	1.9	0.21	0.009
1.3	0.036	0.014	2.0	0.29	0.011
1.4	0.052	0.017	2.05	0.36	0.003
1.5	0.073	0.018	2.10	0.50	-0.030
1.6	0.098	0.016	2.15	1.09	-0.27

表 1.1: 相互摩擦パラメータの値 [17]

有限温度におけるダイナミクス

一方、有限温度の場合、2流体モデルの描像が適用されて、量子渦は常流動成分と相互作用する。この時、渦の回転による Magnus 力 \mathbf{f}_M 及び量子渦とその周辺の常流体との相互摩擦力⁶ \mathbf{f}_D が渦に働き、

$$\mathbf{f}_M = \rho_s \kappa \mathbf{s}' \times \left(\frac{d\mathbf{s}}{dt} - \mathbf{v}_s \right) \quad (1.23)$$

$$\mathbf{f}_D = -\gamma_0 \left(\frac{d\mathbf{s}}{dt} - \mathbf{v}_n \right) - \gamma'_0 \mathbf{s}' \times \left(\frac{d\mathbf{s}}{dt} - \mathbf{v}_n \right) \quad (1.24)$$

と表される [15, 16]。ここで γ_0 及び γ'_0 は相互摩擦係数である。すると、運動方程式は

$$m_{eff} \frac{d^2 \mathbf{s}}{dt^2} = \mathbf{f}_M + \mathbf{f}_D \quad (1.25)$$

となる。ここで有効質量 $m_{eff} \sim \rho_s a^2$ なので、十分小さいと考えてよい。このとき式 (1.23) より $d\mathbf{s}/dt = \mathbf{v}_s + \mathbf{s}' \times \mathbf{f}_D / \rho_s \kappa$ となるので、計算すると運動方程式は

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{v}_s + \alpha \mathbf{s}' \times (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) - \alpha' \mathbf{s}' \times [\mathbf{s}' \times (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)] \quad (1.26)$$

とかける [15, 17]。ここで係数 α 及び α' は

$$\alpha = \frac{\rho_s \kappa \gamma_0}{\gamma_0^2 + (\rho_s \kappa - \gamma'_0)^2} \quad (1.27)$$

$$\alpha' = \frac{\gamma_0^2 - \gamma'_0 (\rho_s \kappa - \gamma'_0)}{\gamma_0^2 + (\rho_s \kappa - \gamma'_0)^2} \quad (1.28)$$

である。これらのパラメータは温度に依存し、値は表に示されている⁷。

これに、外部流 $\mathbf{v}_{s,a}$ 及び境界による速度場 $\mathbf{v}_{s,b}$ が加わってくるので、一般に、

$$\frac{d\mathbf{s}_0}{dt} = \mathbf{v}_{s,BS} + \mathbf{v}_{s,b} + \mathbf{v}_{s,a} \quad (1.29)$$

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \frac{d\mathbf{s}_0}{dt} + \alpha \mathbf{s}' \times \left(\mathbf{v}_n - \frac{d\mathbf{s}_0}{dt} \right) - \alpha' \mathbf{s}' \times \left[\mathbf{s}' \times \left(\mathbf{v}_n - \frac{d\mathbf{s}_0}{dt} \right) \right] \quad (1.30)$$

⁶渦の進む方向及び進む方向と渦の両方に垂直な成分を現象論的なパラメータで記述している。

⁷この計算は少しややこしいので、付録 A に示している。

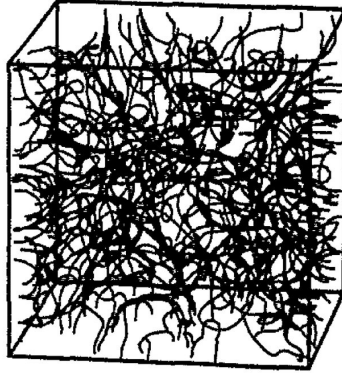


図 1.4: 量子乱流の概念図。それぞれの線が量子渦の芯を表し、複雑に絡み合っている。

という運動方程式に従う。有限温度における渦の運動も考えてみる。簡単のため、 α' の項を無視する。外部流や境界の影響がない時、平行な渦は Biot-Savart による並進に加え、 $\alpha\kappa/2\pi r$ にて引き寄せ合う。反平行な場合はこれとは逆で斥力が働く。渦輪についても考える。渦輪の半径を R とすると、

$$\frac{dR}{dt} \approx \alpha \left(v_n - v_{s,a} - v_{s,b} - \frac{\beta_{\text{ind}}}{R} \right) \quad (1.31)$$

となる。境界の影響や流れ場がない時、この微分方程式は $R = \sqrt{R_0^2 - 2\alpha\beta_{\text{ind}}}$ という解を持つ (R_0 は渦輪の初期半径)。よって渦輪は相互摩擦により縮められる。渦の寿命 T_{Ring} と、消えるまでに進む距離 d_{Ring} はそれぞれ

$$T_{\text{Ring}} = R_0^2/2\alpha\beta_{\text{ind}} \quad (1.32)$$

$$d_{\text{Ring}} = R_0/\alpha \quad (1.33)$$

となる。一般には、流れ場があるので、相互摩擦の影響で渦輪を膨張させる事もあることには注意が必要である。

1.6 量子乱流

乱流は流体の強く乱れた流れを指し、我々の身の回りの流体の流れはほとんど乱流と言っても過言でないほどありふれた現象である。その一方で、乱流はその複雑性から、完全な理解は困難を極めており、古典物理の未解決問題の 1 つとされている。実際、乱流と密接に関係しているとされている Navier-Stokes 方程式の一般解と解のなめらかさはクレイ数学研究所のミレニアム懸賞金問題の未解決問題となっている [18]。

その中でも、量子乱流は超流動体の強く乱れた流れを指す。量子乱流は一般に量子渦が複雑に絡み合うことで構成され、量子渦タングルとも呼ばれる (図 1.4)。一方で、超流動体以外の乱流である古典乱流では、乱流の構成要素である渦は不安定なものであり、明確に定義することが難しい。そう言った意味で、渦が明確な量子乱流は要素還元的な記述ができ、古典流体よりも取り扱いが容易である。量子乱流は乱流の典型的なモデルとして期待できる。以下では、量子乱流の近年の研究を紹介する。

1.6.1 Bulk 系から Local 系へ

量子乱流研究は、境界の効果などに影響されにくい Bulk 系を主として研究が主に行われてきた。熱対向流がその代表例である。熱対向流とは超流動ヘリウム 4 中に熱源をおいた際に常流動と超流動が互いに逆方向に流れる現象である。ヒーターの熱はエントロピーを持つ常流体によって輸送され、常流体はヒーターから離れる方向に流れる。それと同時に超流体は運動量流束について $\mathbf{j} = \rho_s \mathbf{v}_s + \rho_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ が成立するように、常流体と逆向きに流れる。この時、量子渦は強くかき混ぜられ、量子乱流が生成される。この熱対向流の研究は長年行われてきており、実験的には Vinen が初めて観測し [19–22]、数値シミュレーションでは Schwarz[23] や Adachi[24] が周期境界条件を用いて量子乱流を記述している。一方で、近年は実験技術の向上もあり、境界や超流動ヘリウム中に浸された物質などの Local な効果が無視できないような物理が見られている。いくつか有名な例を挙げる。

振動物体による乱流生成

超流動ヘリウム中で物体を振動させ、局所的に量子乱流を作る試みは古くから行われている。初めて行われたとされているのが Jäger らによるもので、球状の永久磁石 (SmO_5) を超伝導電極で浮上させ、振動電場を与えて振動させた [25]。振動にかかる力を係数 λ を用いて $F = \lambda v$ と速度に線型であると仮定する。超流動ヘリウム中のフォトンやロトンといった準粒子の密度が高く 2 流体モデルで表せるような 1 K 以上の高温領域では、ストークスドラッグにより

$$\lambda_{St} = 6\pi\eta_n R \left(1 + \frac{R}{\delta}\right) \quad (1.34)$$

と表せる。ここで、 η_n 、 R 、 $\delta(= \sqrt{2\eta_n/\rho_n\omega})$ はそれぞれ常流動の粘性、球の半径、粘性侵入長である。一方、低温領域では常流動に流体力学的描像が働かなくなり、準粒子の弾性散乱による力が働く。この時係数は

$$\lambda_{ph} = \frac{2\pi^2(kT)^4}{45\hbar^3 c^4} \pi R^2 \text{ for phonons} \quad (1.35)$$

$$\lambda_r = \frac{\hbar k_0^4}{3\pi^2} \exp\left(-\frac{\Delta}{T}\right) \pi R^2 \text{ for rotons} \quad (1.36)$$

となる。ここで k 、 c 、 k_0 、 Δ はそれぞれ、Boltzman 定数、第一音波音速 (≈ 238 m/s)、ロトン波数及びロトンギャップである。

一方で、彼らは球の駆動力を上げていった。駆動力を上げると一般に振動速度はそれに応じて上昇していく。しかし、ある速度を超えると突然速度が大きく下がる実験結果が得られた。これは従来の流体力学の枠組みでは理解できないものであり、球の周りに局所的に量子乱流が発生し、渦の伸長に振動のエネルギーが使われているためであると考えられる。その後、ワイヤーやクォーツフォークなど様々な系で同様の測定が行われ [26–36]、量子乱流の生成と思われる速度低下が見られている。しかし、まだ速度低下の明確なメカニズムはわかっていない。

熱対向流における Hagen-Poiseuille 流と Tail-flatten 流

Florida 州立大学の Guo らの実験グループは、熱対向流が発生している管にフェムト秒レーザーを照射し、 He_2^* 粒子を生成した [37]。この He_2^* 粒子は常流動速度場にしたがって

運動し、13 秒ほどで光を放出し、崩壊する。これによって常流動の速度場が可視化できるようになった [38]。加える熱流が小さい時、常流動速度場は壁付近で 0 になり放物線上に分布する Hagen-Poiseuille 流を示す。これは通常の粘性流体でも見られる一般的な流れである。一方で、さらに熱流を大きくすると、Hagen-Poiseuille 流の壁面付近の速度が上昇し、平坦化する Tail-flatten 流が見られた。これは超流動ヘリウム 4 のみで見られている特有の現象である。熱流をもっと強くすると、最終的には流れ場が不規則になる乱流状態へと到達した。Hagen-Poiseuille 流を第一の層流とすると、ここで見られた Tail-flatten 流は未知の第二の層流と言える。Yui らは常流動速度場をモデル化して量子乱流の生成をシミュレーションしたり [39]、常流動と量子渦をカップリングした計算を導入することでこの研究に数値的にアプローチしている [40, 41]。

量子渦のピンング現象

量子渦のピンングは量子渦が系の不均質性によって固定される現象である。この現象は凝縮体物理では頻出の現象で、超伝導体では量子化された磁束が不純物にピンングされる。また、中性子星の内部構造における議論にも登場する。非常に高密度な中性子星内部では、中性子星超流体が実現しており、そこには量子渦がたくさん存在していると考えられている。回転する中性子は電磁波を放出することで回転エネルギーが放出されていくので観測されるパルスの頻度は時間と共に減少していく。しかし、ある時間で急激にパルスの頻度が増加し、鋭いピークを示す (パルサーグリッチ)。これに対して、Itoh と Anderson は中性子内部の量子渦のピンングが関連しているとしたモデルを提唱し、説明を与えた [42]。

超流動ヘリウム 4 の量子渦のピンングは一般的に系の壁の表面粗さによって生じると考えられている。代表的には壁の瘤にピンングされる描像があり、Schwarz により最初にモデル化され、数値的に研究された [17, 43–45]。また、超流動ヘリウム 4 の量子渦の芯はおおよそ 0.1 nm のごく小さい構造を持つので、量子渦にとっては実在するほとんどの系の壁が粗い面であると考えても良い。ピンング現象は位相スリップ [46, 47] やスピンアップ [48]、量子渦の歳差運動 [49] など様々な実験の考察に用いられている。

1.6.2 乱流の統計則

乱流は一見非常に複雑な現象であるが、古典流体なら Navier-Stokes 方程式、超流体なら Gross-Pitaevskii 方程式、先の量子渦の運動方程式など支配する方程式は明確であり、ある一定の秩序を持っている。その秩序を抽出するために統計則が重要であると考えられている。

Kolmogorov 則

Kolmogorov 則は一様等方な乱流のエネルギースペクトルが

$$E(k) = C\epsilon^{2/3}k^{-5/3} \quad (1.37)$$

となる統計則のことであり、古典流体では最もよく知られた統計則である。ここで ϵ と k はそれぞれ、単位時間あたりのエネルギー注入量と波数である。Kolmogorov 則の簡単な

導出は次元解析的にできる。まず、Navier-Stokes 方程式から出発する。

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (1.38)$$

ν は動粘性係数である。乱流を特徴付ける無次元量 Reynolds 数 Re は慣性項 $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ と粘性項 $\nu \nabla^2 \mathbf{v}$ の比で表される。特徴的な長さ L と速度 U とすると、慣性項と粘性項は U^2/L 及び $\nu U/L^2$ のオーダーになるので

$$Re = \frac{UL}{\nu} \quad (1.39)$$

となる。この Reynolds 数が大きいほど慣性項が優位になり、非線形効果が強く働くことで乱流が生じやすくなる。Reynolds 数が大きい時、粘性はほとんど働かない。一方で、慣性項は $1/L$ に比例し、粘性項は $1/L^2$ に比例することに注意すると、粘性項は長さスケール L が十分小さければ (k が十分大きい領域) 優位になってくる。大きいスケール L でエネルギー注入をすると、この領域ではエネルギー散逸は働かずに、より小さいスケールへエネルギーが輸送される。十分小さいスケールになったエネルギーは粘性により散逸されるという描像が考えられる。このエネルギー輸送が単位時間あたりのエネルギー注入量 ϵ と動粘性係数 ν に依存するとすると、次元解析的に

$$E(k) = \epsilon^{1/4} \nu^{5/4} f(k/\epsilon^{1/4} \nu^{-3/4}) \quad (1.40)$$

となる。ここでエネルギースペクトルが粘性に依らない領域にあるとして、適切な f を選ぶと、エネルギースペクトルが導出される。この Kolmogorov 則は古典乱流で幅広く観測されている最も有名な統計則であり、量子乱流においても、Gross-Pitaevskii モデルにて確認されている [50, 51]。

この Kolmogorov 則は波数に対するスケージング則であり、特徴的な長さスケールを持たない。すなわち、乱流は波数空間における自己相似性を持つと思われる。一方で、乱流の実空間における自己相似性は不明である。Kolmogorov 則に対応して、Richardson カスケードという大きな渦が小さく分裂していき、十分小さいスケールで散逸されるという描像は知られているが、概念的な理解であり、確認はされていない。

壁付近での対数速度分布

古典流体力学でもう一つの著名な統計則が対数速度分布である。これは平板間を流れる流体が乱流の時、壁からの距離 r における流体の平均速度は

$$u = \frac{u^*}{b} (\log r + \text{const.}) \quad (1.41)$$

という速度分布に従う。ここで u^* と b は特徴的な速度とカルマン定数で知られる値である。この対数速度分布は古典乱流で実験的に確認されている。また、量子乱流においてもこの法則が Yui らによって検証されており、対数的な速度分布が見られた [52]。

局所量子乱流の渦放出

振動物体から局所的な量子乱流が生成できることは前述した。大阪市立大学の実験グループは振動ワイヤーを用いて超流動ヘリウムの研究を行っている。彼らは振動ワイヤー

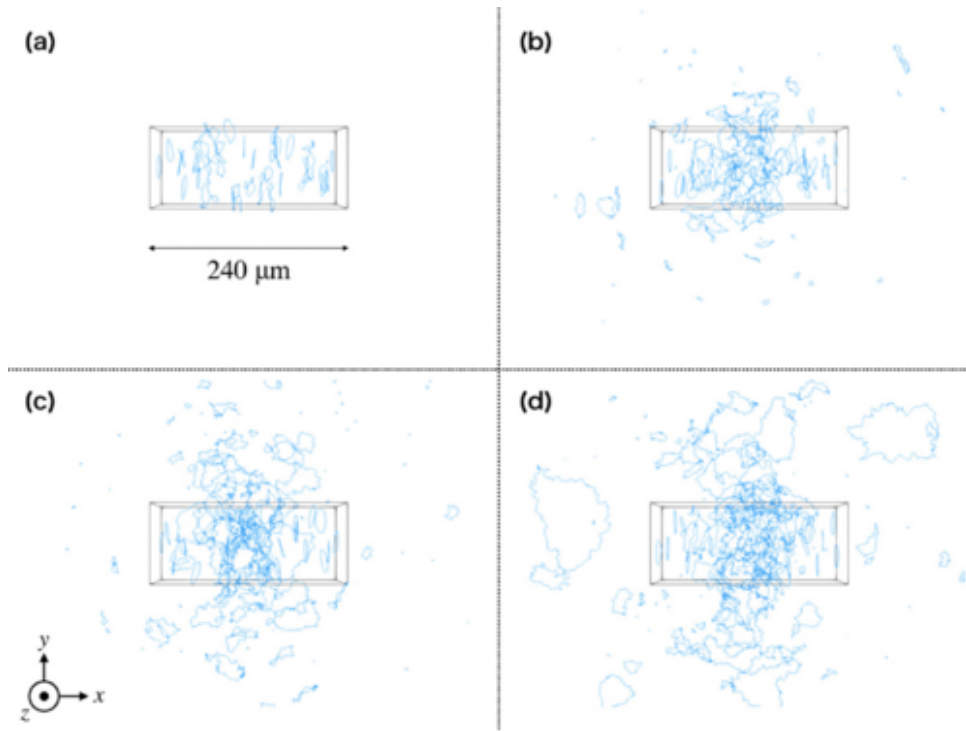


図 1.5: 局所的量子乱流の生成過程。黒い線で示された仮想的な直方体の両端 (x 方向) から渦が注入されている。注入頻度は 1000 Hz、注入渦輪の直径は $30 \mu\text{m}$ である。(a) から (d) はそれぞれ異なる時間におけるスナップショットを表していて、注入開始から (a)0.02 s、(b)0.06 s、(c)0.16 s、(d)0.40 s である。

の表面の粗さを調整することで、振動とともに容易に乱流を生成する乱流生成ワイヤー、及び、振動速度を十分に上げて単体では乱流を生成しないが、外部から渦を受け取ることによって乱流を生成する渦検出ワイヤーを作成した。彼らはこれらのワイヤーを超流動ヘリウム 4 で満たされた実験セルに置き、振動させた。この系では、乱流生成ワイヤーの周りに乱流が生成され、そこから渦が放出、渦検出ワイヤーがその渦を受け取り、乱流を生成する。このような過程で、量子乱流から放出される渦を検出する [36]。

その結果、大きく 2 つの結果が得られた。1 つは、量子渦がポアソン過程⁸にしたがって放出されることである。すなわち、時間 t までに渦が検出される確率 $P(t)$ は

$$P(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t - t_0}{t_1}\right) \quad (1.42)$$

という指数関数でよくフィッティングできる。ここで t_0 、 t_1 は時間の次元を持つフィッティングパラメータで、 t_1 は渦の平均検出周期に対応する。2 つ目は、渦の大きさが冪乗則に従うことである。彼らは温度を変化させることで式 (1.33) より、量子乱流から放出された渦輪が渦検出ワイヤーにできる最小初期直径 $2R_0$ を温度ごとに評価した。温度を変えて t_1 を計算することで、渦輪の最小直径ごとの放出頻度がわかることになる。実際に検出頻度 t_1^{-1} と最小直径 $2R_0$ をプロットした結果、冪乗則に従うことがわかった。これは量子渦の放出が自己相似的であり、量子乱流が自己相似的な構造を持つ可能性を示唆している。

我々のグループは、数値的に量子渦を向かい合う 2 方向から衝突させて図 1.5 のように定常な局所量子乱流を生成し、放出される渦輪を観察した [53]。簡単のため、系は温度 0 K

⁸一連のイベントが時間相関なくランダムに起こる確率過程

としている。生成された量子乱流は渦の注入方向に対して垂直な方向に拡散し、円盤状に成長する。我々は乱流の成長方向の十分離れた位置に仮想的な検出器を $N_{\text{det}} = 2000$ 個実装した。時間 $[0, t]$ の間に少なくとも 1 つ渦を検出している検出器の数を $N(t)$ とすると、時間 t までに渦を検出している割合 (確率) は $P(t) = N(t)/N_{\text{det}}$ と定義できる。これを実際にプロットすると、実験と同様の統計則が得られることがわかった。つまり定常状態の局所量子乱流は確かに Poisson 過程にしたがって量子渦を放出している。

そこから得られた量子渦の検出頻度を最小サイズごとにプロットすると、冪乗則に従うことも確認し、定性的な一致を得た。一方で、実験では冪指数は -1.5 から -2.5 程度だったのに対して、このシミュレーションでは -0.86 から -1.03 程度であった。このシミュレーションにおける渦注入における生成エネルギーは 0.1 pW 程度であり、実験における値と比べて 2 から 4 桁ほど小さく、シミュレーション的にスケールを維持したままこれ以上の注入を行うことは困難である。また、ワイヤーのジオメトリーをシミュレーションで忠実に再現することは難しい。これらの事情から定性的な一致にとどまっている。

我々はさらに、局所量子乱流の内部構造を調べた [54]。パターン of の微細な構造を定量化するフラクタル次元 D_f は

$$D_f = -\frac{\ln(N(\delta)/N_{\min})}{\ln(\delta/\delta_{\min})} \quad (1.43)$$

で定義される。 δ は長さスケールで $N(\delta)$ はその長さスケールにおける構造の数である。数値的にはボックスカウント法というアルゴリズムを用いて行う [55]⁹。これによると、渦密度が十分小さい時は、 $D_f = 1$ の 1 次元的な渦糸の特徴が強く現れるのに対し、密度が高くなると $D_f \sim 1.8$ となった。また、局所乱流の渦輪のサイズ分布を調べ、一部分の大きさの範囲では、冪乗則に従うことを見出した。しかし、これらと、放出渦輪の冪乗則とを結びつけることには成功していない。

1.7 Kelvin 波

Kelvin 波は渦芯に現れる周期的な揺らぎのモードである。Kelvin 波はその名前の通り Kelvin(Thomson) によって非圧縮非粘性流体に対して提唱された。超流動体では主に渦芯がヘリカルな構造を描き、自らの誘導速度で動く波が考察され、盛んに研究されている [56–60]。

1.7.1 分散関係

ここでは Kelvin 波の特徴的な振動数 ω と波数 k の関係、すなわち、分散関係を議論する。Kelvin 波の分散関係を導出する方法いくつかはあるが、おおよそ、

$$\omega \approx \beta_{\text{ind}} k^2 \approx \frac{\kappa k^2}{4\pi} \log\left(\frac{1}{ka_0}\right) \quad (1.44)$$

となる。ここで、 a_0 が非常に小さい超流動ヘリウム 4 系では、 \log の部分はほぼ定数として扱える。ここからは、本質は同じであると思うが後学のためにいくつかの導出をまとめておく。

⁹詳しくは付録 B 参照

自己誘導速度からの導出 [61]

z 軸を中心としたヘリカルな渦を仮定する。この時、渦芯の座標は、振幅を $\epsilon(t)$ として

$$\mathbf{s} = (\epsilon(t) \cos(kz - \omega t), \epsilon(t) \sin(kz - \omega t), z) \quad (1.45)$$

で表される。さて、自己誘導速度は $\beta_{\text{ind}} \mathbf{s}' \times \mathbf{s}''$ で表された。今、 $z \sim \xi$ なので \mathbf{s}' と \mathbf{s}'' はそれぞれ

$$\mathbf{s}' = (-k\epsilon(t) \sin(kz - \omega t), k\epsilon(t) \cos(kz - \omega t), 1) \quad (1.46)$$

$$\mathbf{s}'' = (k^2\epsilon(t) \cos(kz - \omega t), k^2\epsilon(t) \sin(kz - \omega t), 0) \quad (1.47)$$

よって、 \mathbf{s}' と \mathbf{s}'' は

$$\mathbf{s}' \times \mathbf{s}'' \approx (-k^2\epsilon(t) \sin(kz - \omega t), k^2\epsilon(t) \cos(kz - \omega t), 0) \quad (1.48)$$

ここで振幅 ϵ の 2 次以上の項は無視した。式 (1.30) の $\mathbf{v}_{s,b}$ 及び $\mathbf{v}_{s,a}$ をゼロとすると

$$\omega = \beta_{\text{ind}} k^2 \quad (1.49)$$

$$\epsilon(t) = \epsilon(0) \exp[\alpha(v_n k - \omega)t] \quad (1.50)$$

となることがわかる。式 (1.49) は分散関係であり、式 (1.44) と一致している。また、式 (1.50) から、外部流が無い時は相互摩擦により Kelvin 波は指数関数的に減衰していく。一方で、外部流がある時は波数によって減衰、増幅が別れる。特に熱対向流により、 $v_n k - \omega > 0$ となり、Kelvin 波が強く励起されることを Donnelly-Glaberson 不安定性と呼ぶ¹⁰[61]。

複素関数を用いた導出 [62]

ここでも、自己誘導速度から出発する。渦の位置を複素関数を用いて

$$\phi = x(z, t) + iy(z, t) \quad (1.51)$$

と表す。この時 $dz/d\xi$ は

$$\frac{dz}{d\xi} = \frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} \quad (1.52)$$

$$= \frac{dz}{\sqrt{dz^2 + |d\phi|^2}} \quad (1.53)$$

$$= \left(1 + \left|\frac{d\phi}{dz}\right|^2\right)^{-1/2} \quad (1.54)$$

よって自己誘導速度の x 成分と y 成分は、 $d^2z/d\xi^2 = 0$ に気をつけて

$$(\beta_{\text{ind}} \mathbf{s}' \times \mathbf{s}'')_x = - \left(\frac{dz}{d\xi}\right)^3 \frac{d^2y}{dz^2} \quad (1.55)$$

$$(\beta_{\text{ind}} \mathbf{s}' \times \mathbf{s}'')_y = \left(\frac{dz}{d\xi}\right)^3 \frac{d^2x}{dz^2} \quad (1.56)$$

¹⁰素励起描像的には Kelvin 波の量子化、ケルボンが無数に生成されることで熱対向流が不安定になる。

となる。これより、十分低温 ($\alpha, \alpha' = 0$) 及び外部流なしの運動方程式 $d\mathbf{s}/dt = \beta_{\text{ind}}\mathbf{s}' \times \mathbf{s}''$ より

$$i\frac{d\phi}{dt} + \beta_{\text{ind}} \left(1 + \left| \frac{d\phi}{dz} \right|^2 \right)^{-3/2} \frac{d^2\phi}{dz^2} = 0 \quad (1.57)$$

が導出できる。この式の解として $C \exp[i(kz - \omega t)]$ を仮定すると、

$$\omega = \frac{\beta_{\text{ind}}k^2}{(1 + k^2|C|^2)^{3/2}} \quad (1.58)$$

振幅 C が十分小さいとすると、先ほどの分散関係と一致する。

古典流体において渦内に一様に渦度が分布している場合の導出 [63]

古典流体における議論を紹介する。非粘性非圧縮を仮定し、円筒座標の Euler 方程式及び連続の方程式から出発する。動径 r 、方位角 θ 、高さ z とすると、Euler 方程式は

$$-\frac{dp}{dr} = \frac{d\dot{r}}{dt} + \dot{r}\frac{d\dot{r}}{dr} - \frac{(r\dot{\theta})}{r} + \dot{\theta}\frac{d\dot{r}}{d\theta} + \dot{z}\frac{d\dot{r}}{dz} \quad (1.59)$$

$$-\frac{dp}{rd\theta} = r\frac{d\dot{\theta}}{dt} + \dot{r}\frac{d(r\dot{\theta})}{dr} + \dot{r}\dot{\theta} + \dot{\theta}\frac{d(r\dot{\theta})}{d\theta} + \dot{z}\frac{d(r\dot{\theta})}{dz} \quad (1.60)$$

$$-\frac{dp}{dz} = \frac{d\dot{z}}{dt} + \dot{r}\frac{d\dot{z}}{dr} + \dot{\theta}\frac{d\dot{z}}{d\theta} + \dot{z}\frac{d\dot{z}}{dz} \quad (1.61)$$

$$(1.62)$$

ここで、流体の密度 ρ を 1 としている、 ρ として計算を進めても結果は変わらない。連続の方程式は、

$$\frac{d\dot{r}}{dr} + \frac{\dot{r}}{r} + \frac{d(r\dot{\theta})}{rd\theta} + \frac{d\dot{z}}{dz} = 0 \quad (1.63)$$

この時、軸対称な回転と揺らぎを仮定する。

$$\dot{r} = \tilde{v}_r \cos kz \sin(\omega t - m\theta) \quad (1.64)$$

$$r\dot{\theta} = T + \tilde{v}_\theta \cos kz \cos(\omega t - m\theta) \quad (1.65)$$

$$\dot{z} = \tilde{v}_z \sin kz \sin(\omega t - m\theta) \quad (1.66)$$

$$p = P + \tilde{p} \cos kz \cos(\omega t - m\theta) \quad (1.67)$$

$$P = \int \frac{T^2 dr}{r^2} \quad (1.68)$$

ここで、速度の揺らぎ \tilde{v}_r 、 \tilde{v}_θ 、 \tilde{v}_z は動径 r の関数で、 T に比べて十分小さい。圧力の揺らぎ \tilde{p} も r の関数である。式 (1.68) は式 (1.59) によるものである。この揺らぎを加えた時、十分小さい項を無視すると Euler 方程式は

$$-\frac{d\tilde{p}}{dr} = \left(k - m\frac{T}{r} \right) \tilde{v}_r - 2\frac{T}{r} \tilde{v}_\theta \quad (1.69)$$

$$-\frac{m\tilde{p}}{r} = -\left(k - m\frac{T}{r} \right) \tilde{v}_\theta + \left(\frac{T}{r} + \frac{dT}{dr} \right) \tilde{v}_r \quad (1.70)$$

$$\omega\tilde{p} = \left(k - m\frac{T}{r} \right) \tilde{v}_z \quad (1.71)$$

$$(1.72)$$

連続の方程式は

$$\frac{d\tilde{v}_r}{dr} + \frac{\tilde{v}_r}{r} + \frac{m\tilde{v}_\theta}{r} + \omega\tilde{v}_z = 0 \quad (1.73)$$

という形になる。これらを用いて \tilde{p} を消去し、 \tilde{v}_r と \tilde{v}_θ を \tilde{v}_z の関数として表すことができる。

$$\tilde{v}_r = \frac{1}{mD} \left(\omega - m\frac{T}{r} \right) \left[\left(\omega - m\frac{T}{r} \right) \frac{d\tilde{v}_z}{dr} - \frac{m}{r} \left(\frac{T}{r} + \frac{dT}{dr} \right) \tilde{v}_z \right] \quad (1.74)$$

$$\tilde{v}_\theta = \frac{1}{mD} \left[\left(\frac{T}{r} + \frac{dT}{dr} \right) \left(\omega - m\frac{T}{r} \right) \frac{d\tilde{v}_z}{dr} + \frac{m}{r} \left[\frac{T^2}{r^2} - \frac{dT^2}{dr^2} - \left(\omega - m\frac{T}{r} \right) \right] \right] \quad (1.75)$$

$$D = \frac{2T}{r} \left(\frac{T}{r} + \frac{dT}{dr} \right) - \left(\omega - m\frac{T}{r} \right) \quad (1.76)$$

今、 T として、円柱型の Rankine 渦¹¹を仮定する。 $r < a$ に渦度が一様に存在している時、渦度の存在部分は剛体回転をし、それ以外の部分は $1/r$ に比例した速度で回転する。それは

$$T = \frac{\Gamma r}{2\pi a^2} \quad (r < a) \quad (1.77)$$

$$T = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (r > a) \quad (1.78)$$

で表される。ここで循環 Γ は $\Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$ で定義され、積分経路は $r = a$ の円である。この時、 \tilde{v}_z は

$$\frac{d\tilde{v}_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\tilde{v}_z}{dr} - \frac{m^2\tilde{v}_z}{r^2} + \nu^2\tilde{v}_z = 0 \quad (r < a) \quad (1.79)$$

$$\frac{d\tilde{v}_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\tilde{v}_z}{dr} - \frac{m^2\tilde{v}_z}{r^2} - k^2\tilde{v}_z = 0 \quad (r > a) \quad (1.80)$$

とかける。ここで、 ν は

$$\nu = k \sqrt{\frac{4 \left(\frac{\Gamma}{2\pi a^2} \right)^2 - \left[\omega - m \left(\frac{\Gamma}{2\pi a^2} \right) \right]^2}{\left[\omega - m \left(\frac{\Gamma}{2\pi a^2} \right) \right]^2}} \quad (1.81)$$

である。式 (1.79) の解は Bessel 関数の組み合わせで、式 (1.80) の解は変形 Bessel 関数の組み合わせである。 $r \rightarrow \infty$ で $\tilde{v}_z \rightarrow 0$ の条件を課すと式 (1.80) の解は第 2 種変形 Bessel 関数 $\tilde{v}_\theta = C_2 K_m(kr)$ になる。また、渦内部 ($r < a$) においては正則な解として第 1 種 Bessel 関数 $\tilde{v}_\theta = C_1 J_m(\nu r)$ が選ばれる。ここで C_1, C_2 はどちらも任意定数である。さらに $r = a$ における \tilde{v}_r と \tilde{v}_z の連続性を導入すると、

$$\frac{\left(m \left(\frac{\Gamma}{2\pi a^2} \right) - \omega \right) \left[\left(m \left(\frac{\Gamma}{2\pi a^2} \right) - \omega \right) \left(\frac{d\tilde{v}_z}{\tilde{v}_z dr} \right)_{\text{int}} + \frac{2m}{a} \frac{\Gamma}{2\pi a^2} \right]}{4 \left(\frac{\Gamma}{2\pi a^2} \right)^2 - \left[m \left(\frac{\Gamma}{2\pi a^2} \right) - \omega \right]} = - \left(\frac{d\tilde{v}_z}{\tilde{v}_z dr} \right)_{\text{ext}} \quad (1.82)$$

これに解を代入すると、

$$\frac{J'_m(q)}{q J_m(q)} + \frac{m}{q^2 \lambda} = - \frac{K'_m(ka)}{ka K_m(ka)} \quad (1.83)$$

¹¹渦度が一様に分布する渦

が得られる。ここで

$$\lambda = \frac{m \left(\frac{\Gamma}{2\pi a^2} \right) - \omega}{2 \left(\frac{\Gamma}{2\pi a^2} \right)} \quad (1.84)$$

$$q^2 = k^2 a^2 \frac{1 - \lambda^2}{\lambda^2} \quad (1.85)$$

である。今、興味があるのが $m = 1$ の螺旋形を描く場合である。この時、 $ka, q \ll 1$ を仮定すると¹²、 $J_1(x) \approx x/2 - x^3/16$ の近似を用いて、 $J_1'(q)/qJ_1(q) \approx 1/q^2 - 1/4$ となる。また、 $K_1(x) \approx 1/x + x/2 [\gamma - 1/2 + \log(x/2)]$ ($\gamma = 0.577$) から、

$$-\frac{K_1'(ka)}{kaK_1(ka)} = \frac{1}{k^2 a^2} \left[1 + k^2 a^2 \left(\log \left(\frac{1}{ka} \right) + 0.116 \right) \right] \quad (1.86)$$

となる。これらを式 (1.82) に代入すると、

$$\omega = -\frac{\Gamma k^2}{4\pi} \left(\log \left(\frac{e^{1/4}}{ka} \right) + 0.116 \right) \quad (1.87)$$

という形の分散関係になる。¹³

中空円筒渦の場合の導出 [61, 63]

先と同様に Euler 方程式と連続の方程式を用いる。ある半径 R の円筒容器内に流体が満たされているとする。ここでは渦を次のように仮定する。

$$T = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (1.88)$$

$$\dot{r} = 0 \quad (r = R) \quad (1.89)$$

$$p = 0 \quad (\text{渦の表面の近傍 } (r = a + \int \dot{r}_a dt)) \quad (1.90)$$

ここで、 \dot{r}_a は渦半径 a 近傍の角速度 \dot{r} である。また、渦の表面では等圧力であることを仮定している。ここでの議論では、先の式 (1.80) が使え、解が変形 Bessel 関数の組み合わせで表される。また、式 (1.74)-(1.76) を簡単にして、

$$\tilde{v}_r = -\frac{1}{k} \frac{d\tilde{v}_z}{dr} \quad (1.91)$$

$$\tilde{v}_\theta = \frac{m\tilde{v}_z}{kr} \quad (1.92)$$

と表せる。ここで、 r と θ をある流体粒子の座標とすると、

$$\theta = \int \dot{\theta} dt \quad (1.93)$$

$$r = \int \dot{r} dt + r_0 \quad (1.94)$$

¹²波長が渦芯の半径と比べて十分大きいことを仮定している。超流動ヘリウム 4 量子渦の場合はほとんどの場合で満たされているはずである。

¹³マイナスは波が渦の回転方向と逆向きに回転することを示している [63]。

r_0 は粒子の平均的な円軌道の半径である。式 (1.93) は

$$\theta = \frac{\Gamma t}{2\pi r^2} \quad (1.95)$$

なので、

$$\dot{r} = \tilde{v}_r \cos kz \sin \left(\omega - \frac{m\Gamma}{2\pi r^2} \right) t \quad (1.96)$$

となり、式 (1.94) から

$$r = r_0 - \frac{\tilde{v}_r}{\omega - \frac{m\Gamma}{2\pi r^2}} \cos kz \cos(\omega t - m\theta) \quad (1.97)$$

よって渦表面は

$$r = a - \frac{\tilde{v}_r(r=a)}{\omega - \frac{m\Gamma}{2\pi a^2}} \cos kz \cos(\omega t - m\theta) \quad (1.98)$$

となる。ここで、式 (1.91) より、

$$\tilde{v}_r = -[C_1 I'_m(kr) + C_2 K'_m(kr)] \quad (1.99)$$

C_1 、 C_2 は定数、 I_m は第 1 種変形 Bessel 関数である。また、これらを用いて式 (1.68) より、円筒渦の表面 $r = a$ 近傍では

$$P = \frac{T^2}{r}(r-a) \quad (1.100)$$

$$= a \left(\frac{\Gamma}{2\pi a^2} \right)^2 \frac{1}{\omega - \frac{m\Gamma}{2\pi a^2}} [C_1 I'_m(ka) + C_2 K'_m(ka)] \quad (1.101)$$

となる。式 (1.90) より、式 (1.67) や式 (1.71) などを用いると

$$a \left(\frac{\Gamma}{2\pi a^2} \right)^2 [C_1 I'_m(ka) + C_2 K'_m(ka)] + \frac{(\omega - \frac{m\Gamma}{2\pi a^2})^2}{m} [C_1 I_m(ka) + C_2 K_m(ka)] = 0 \quad (1.102)$$

が導ける。容器の境界面 $r = R$ で $\tilde{v}_r = 0$ になる条件と $r \rightarrow \infty$ を仮定すると $C_1 = 0$ である。また、螺旋系のモード $m = 1$ を代入すると、

$$\omega = \frac{\Gamma}{2\pi a^2} \left(1 \pm \left[\frac{-kaK'_1(ka)}{K_1(ka)} \right]^{1/2} \right) \quad (1.103)$$

超流動ヘリウム 4 量子渦でみられる分散関係はこの符号が $-$ の場合である¹⁴。よって

$$\omega = -\frac{\Gamma k^2}{4\pi} \left[\ln \left(\frac{1}{ka} \right) + 0.116 \right] \quad (1.104)$$

¹⁴符号 $+$ の場合は渦の有効質量が効き、自己誘導速度の近似が有効でない場合に現れる [61]

1.7.2 Kelvin 波カスケード

大規模な渦の絡まり合いによって起きる大スケールから小スケールへのエネルギーの輸送が Kolmogorov 則に見られたエネルギーカスケードであった。このように多数の渦で構成された乱流は Kolmogorov 乱流と呼ばれる。一方で、より小さいスケール、つまり渦一本ほどのスケールにおいてもエネルギー輸送が起こると考えられている。それが量子渦上で励起された Kelvin 波を介して起こるシナリオを Kelvin 波カスケードと呼ぶ。有限温度では式 (1.50) に示されたように相互摩擦で減衰していく。一方で、絶対零度では、小スケールにおけるフォノン放出で散逸されると考えられている。つまり、Kelvin 波カスケードがあった場合、低周波数に波を励起し続けた時、非線形相互作用で、より高い周波数に Kelvin 波のモードが移動し、フォノン放出で散逸されるというストーリーがあり得る。Vinen らは数値シミュレーションで、一本の量子渦に対し、一定の周波数で振動を加え、その振幅スペクトルの変化を観察した [64]。その結果、初期段階では、加えた周波数に対応した Kelvin 波に対応したピークのみが見られたが、時間が経つにつれて、大スケール、小スケール双方にスペクトルが広がっていく様子が見られた。彼らは、振幅スペクトルを $k^{-3/2}$ に比例するとした。また、エネルギースペクトルについて $E \sim k^{-1}$ と想定した。その後、2004 年には Kozik らは波乱流の理論を用いて Kelvin 波のエネルギースペクトルは $E \sim k^{-7/5}$ と理論的に提唱した [65]。一方、L'vov らは同様の理論を用いて $E \sim k^{-5/3}$ とした [66]。彼らは激しい論争を繰り広げたようだが、決着したかどうかは知らない。

1.8 量子渦糸モデルの数値計算スキーム

ここでは、本研究で用いる量子渦糸モデルの数値シミュレーションについて導入する。量子渦糸モデルは超流動ヘリウム 4 の量子渦のダイナミクスを記述する上でこれまで大きな成功を納めてきている。量子渦糸モデルは有限な太さを持つ量子渦の詳細構造を無視して、渦の運動のみを運動方程式を解くことで記述する。実際、超流動ヘリウム 4 の量子渦の太さは 0.1 nm 程度で、系の大きさに比べると十分に小さいと考えられる。実際に量子渦糸モデルを用いて数値計算する上では、連続的な渦を表現することは難しいので、渦は間隔 $[\Delta\xi_{\min}, \Delta\xi_{\max}]$ の点の繋がりとして表現され、この各点について運動方程式を解く。このモデルは、渦の生成消滅や再結合こそ、自然に記述することはできないが、アルゴリズム上でそれらを行うことで、シンプルに量子渦のダイナミクスを記述することができる [17]。

1.8.1 Biot-Savart 項の計算

それぞれの点に対して、式 (1.29) 及び (1.30) を解くことで渦の時間発展を記述する。時間発展は 4 次の陽的 Runge-Kutta 法で解く。Biot-Savart 項は式 (1.22) を用いて非局所項と局所項に分けて計算する。これはある渦点 \mathbf{s} での速度場を計算するとき、距離の逆 2 乗に比例する Biot-Savart 積分が数値的に発散することを防ぐためである。改めて、式 (1.29) を書き直すと

$$\frac{d\mathbf{s}_0}{dt} = \beta_{\text{ind}} \mathbf{s}' \times \mathbf{s}'' + \frac{\kappa}{4\pi} \sum_i \int_{L_i} \frac{d\mathbf{s}_i \times (\mathbf{s} - \mathbf{s}_i)}{|\mathbf{s} - \mathbf{s}_i|^3} + \mathbf{v}_{s,b} + \mathbf{v}_{s,a} \quad (1.105)$$

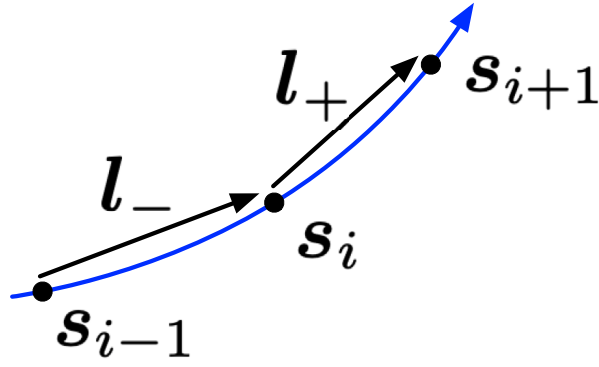


図 1.6: 渦点 s の隣接点 s_{i+1} 及び s_{i-1} とベクトル l_+ と l_- の概念図

という形で表される。ここで L_i は点で離散化された各線素を表している。まず、局所から考える。定数 β_{ind} は点 s_i の速度を求める時、前後の点 s_+ 及び s_- の3点を円で近似し、 $l_+ = s_+ - s_i$ 、 $l_- = s_- - s_i$ と定義すると (図 1.6)、

$$\beta_{\text{ind}} = \frac{\kappa}{4\pi} \ln \left[\frac{2\sqrt{l_+ l_-}}{\sqrt{ea}} \right] \quad (1.106)$$

となる。また、点 s_i での s'_i 及び s''_i はそれぞれ、

$$s'_i = d_i^+ s_+ + d_i^- s_- \quad (1.107)$$

$$s''_i = c_i^+ s_+ - c_i^- s_- \quad (1.108)$$

となり、計算すると

$$\begin{aligned} d_i^\pm &= \frac{l_\mp^2}{|l_+ l_-^2 + l_- l_+^2|} \\ c_i^\pm &= \frac{a_\pm^2}{|a_+ l_+ - a_- l_-|^2} \\ a^\pm &= \frac{1}{2} \frac{l_+^2 l_-^2 + l_\mp^2 l_+ \cdot l_-}{l_+^2 l_-^2 - (l_+ \cdot l_-)^2} \end{aligned} \quad (1.109)$$

となることがわかる。また、非局所項の積分は点 s_i から離れた隣接した点 s_j 及び s_{j+1} が作る線素が s_i につくる速度場 $\delta v_{s, \text{nonlocal}}^j$ は、

$$\delta v_{s, \text{nonlocal}}^j = \frac{\kappa}{4\pi} \frac{(|\mathbf{R}_j| + |\mathbf{R}_{j+1}|) \mathbf{R}_j \times \mathbf{R}_{j+1}}{|\mathbf{R}_j| |\mathbf{R}_{j+1}| (|\mathbf{R}_j| |\mathbf{R}_{j+1}| + \mathbf{R}_j \cdot \mathbf{R}_{j+1})} \quad (1.110)$$

と書ける¹⁵。ここで、 $\mathbf{R}_j = s_j - s_i$ 及び $\mathbf{R}_{j+1} = s_{j+1} - s_i$ である (図 1.7)。よって、式 (1.105) は

$$\frac{ds_i}{dt} = -\beta_{\text{ind}, i} (d_i^+ c_i^- + d_i^- c_i^+) l_+ \times l_- + \sum_j \delta v_{s, \text{nonlocal}}^j + v_{s, b} + v_{s, a} \quad (1.111)$$

といった形に書き直せる。

¹⁵ 導出するには s_j と s_{j+1} を結ぶ直線線素が s_i につくる速度場を考えれば良い。この辺りは電磁気学における電流が作る磁場の計算と同じである。詳しくは [67] を参照。

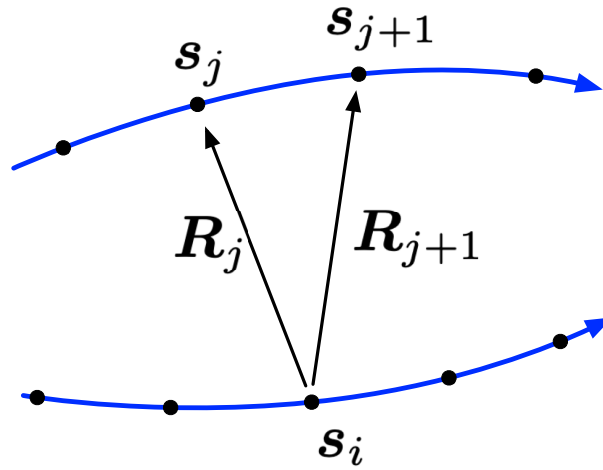


図 1.7: 渦点 s_i 及び s_j , s_{j+1} とベクトル R_j と R_{j+1} の概念図

非局所項は、各点において点の数 N 回の計算を要する。つまり、一連の計算に N^2 回のオーダーの計算をしないといけないため、計算の安定性を保ちつつ、点の数を増やしすぎないように注意が必要である¹⁶。また、我々のコードは高速化のためにこの非局所項の部分を OpenMP を用いて並列計算を行っている。

1.8.2 境界条件

次に境界による速度場 $\mathbf{v}_{s,b}$ に関して記述する。量子渦糸モデルは一般的にメッシュ分割による空間の離散化がない計算のため境界なしのシミュレーションも可能である。この場合 $\mathbf{v}_{s,b} = 0$ である。一方、よく使われる境界条件として、固体境界と周期境界があり、ここではこれらを紹介する。

固体境界は系の有限サイズ効果 (例えば、実験セルの壁など) を考慮する際に有効である。この時、流体が壁に染み込まない条件

$$\mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (1.112)$$

を満たさなければならない。ここで \mathbf{n} は壁面における法線ベクトルである。そのため渦によって作られる超流動速度場 $\mathbf{v}_{s,\omega}$ に対して、

$$(\mathbf{v}_{s,\omega} + \mathbf{v}_{s,b}) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (1.113)$$

を満たすような $\mathbf{v}_{s,b}$ を印加する。境界が平面な場合、境界を隔てて鏡像渦を仮想的に設置し、それらが作る速度場により境界条件が満たされる。ここで鏡像渦は、元の渦とは逆向きである。鏡像渦の概念図は図 1.8 に示している。一般的には、境界表面の粗さや平面でない固体境界も存在する。それらについては先の章で紹介する。

周期境界は十分大きな系の量子渦のダイナミクスを記述するときによく用いられる。一般的に、四角い計算体積を仮定し、周期境界を課す方向に計算体積内と全く同じ渦の配置を持つ計算体積を仮想的に置くことで $\mathbf{v}_{s,b}$ を計算する。

¹⁶このモデルが使われ始めた当初は、非局所項を無視して、自己誘導速度のみを計算する近似が行われていた。少ない渦のダイナミクスであれば記述できるが、渦が多い乱流のような系を計算するとなると、渦同士の相互作用がない影響で、非物理的な結果に陥る [24]。

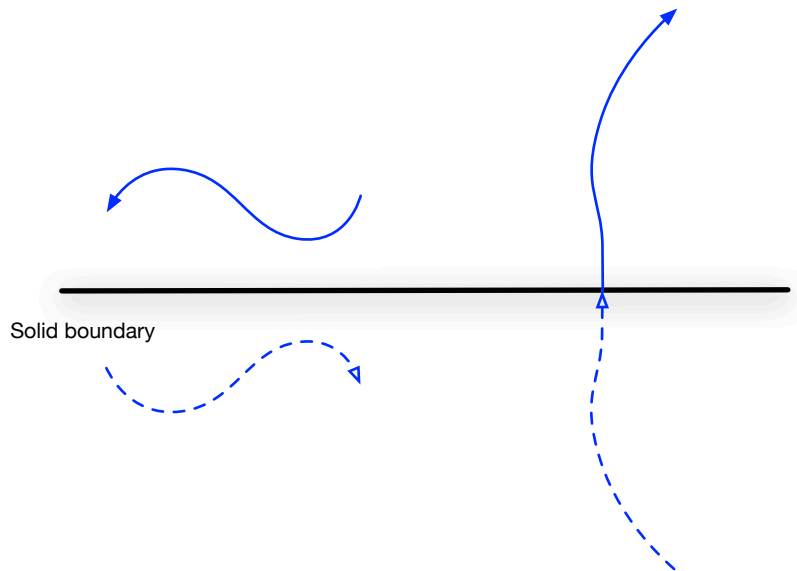


図 1.8: 固体境界条件を満たす鏡像渦の概念図

1.8.3 点の補完・消去

量子渦糸モデルでは、時間発展とともに渦が伸び縮みするため、点の間隔が開いたり狭まったりする。そこで、ある程度の計算精度を維持するため、渦点を補完、消去するスキームを導入している。

点の補完

ある隣接する2点 s_i 及び s_+ の間に点を補完するか判定する。曲率半径に着目する。それぞれの法線ベクトル s_i'' 及び s_+'' から曲率半径を求め、そのうちの小さい方 R を採用する。我々のプログラムでは、 $2\pi R/30$ が点の間隔 $|s_+ - s_i|$ より大きいとき、 $s'' = (s_i'' + s_+'')/2$ の法線ベクトルを持つように間に点を補完する。また、曲率半径が十分に大きく直線に近い時は、 $|s_+ - s_i|$ が点の最大間隔 $\Delta\xi_{\max}$ よりも大きいときに点の補完を行う。

点の消去

隣接する3点 s_- 、 s_i 及び s_+ と曲率半径 R を考える。 $2\pi R/60$ より点の間隔 $|s_+ - s_i|$ 及び $|s_i - s_-|$ が小さい時、 s_i を消去する。また、曲率半径が十分に大きく直線に近い時は、 $|s_+ - s_i|$ 及び $|s_+ - s_i|$ 及び $|s_i - s_-|$ が点の最小間隔 $\Delta\xi_{\min}$ よりも小さいときに点を消去する。

小さい渦輪の消去

渦輪が十分小さくなり、渦輪を構成する点が少なくなる或いは渦輪の全長が分解能の数倍程度になったときに渦輪全体を消去する。渦輪が原子サイズほどまで十分小さくなったとき、音波を放出し散逸されていく。量子渦糸モデルでは音波の放出などの物理は記述できないため、アルゴリズム的に消去している。

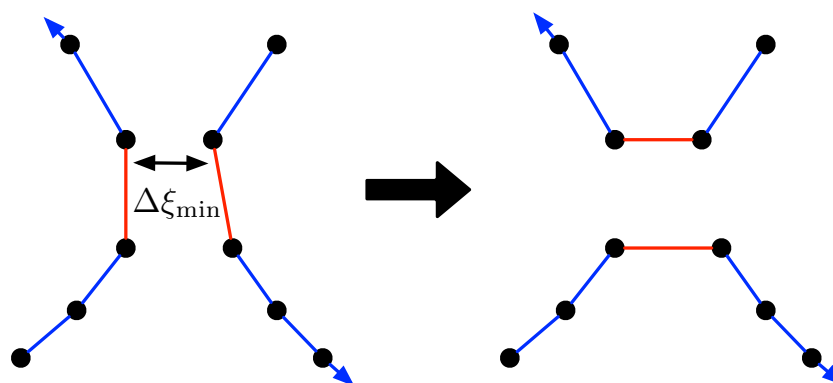


図 1.9: 再結合のアルゴリズムの概念図。

1.8.4 再結合

量子渦の再結合は、実験で観測されているように確かに起こる。この再結合のスキームは様々な手法がこれまで提案されて来ているが、スキームによらず渦のダイナミクスはそれなりにロバストであるとされている。代表的には、渦糸が一定の距離以下まで接近した時に繋ぎ変える方法である。Schwarz はそれに $2R/\ln(cR/a)$ という距離を用いた (R は曲率半径)。しかしこれは $R \rightarrow \infty$ となるような直線渦ではどれだけ離れていても再結合を起こすという非物理的な結果を招く。我々のシミュレーションでは、隣接していない渦線素同士が $\Delta\xi_{\min}$ 以下の距離になったとき、それぞれを繋ぎ変えている。

また渦同士が、再結合をするとき、渦にキンク的な構造が現れ、Kelvin 波と渦を伝播する。温度 0 K ではキンク構造は散逸されずに伝播し続けるが、有限温度では散逸される。

また、量子渦は固体壁とも再結合(付着)する。ある点 s_i と固体壁との距離が $\Delta\xi_{\min}$ より小さいとき、その両端の点 s_+ 、 s_- と s_i のそれぞれの中点から固体壁に垂線を落とした位置に渦を付着させる。

1.9 本研究について

本章では、超流動ヘリウム 4 と量子渦に関する導入を行った。第 2 章では Florida 大学の Barquist らが行った実験をモデル化し、そのシミュレーション結果とそこから得られる描像に関して解説する。第 3 章では、先述した大阪大学の Minowa らが行っている量子渦の可視化実験をモデル化し、シミュレーションを行ったのでそれを紹介する。第 4 章にて、それらをまとめる。

第2章 プレート状MEMS共振器中の量子渦ダイナミクス

2.1 序章

近年、超流動ヘリウム実験に微細加工技術を用いて作られたデバイス、MEMS(Micro Electro Mechanical Systems)やNEMS(Nano Electro Mechanical Systems)が導入されている。このようなデバイスはマイクロ、ナノといった非常に小さいスケールを持ち、非常に軽い。そのため、系はとてもセンシティブでありこれまでにできなかった観測も可能となる。そのようにして作られた振動子は質量に関しては 10^{-27} kg、力に関しては 10^{-21} N/Hz^{1/2}もの精度を持つという報告もある [68]。

MEMSやNEMSが超流動ヘリウムの実験に使われた例をいくつか挙げる。Lancaster大学のGuthrieらは超流動ヘリウム4中で 130×200 nm²という非常に細い断面積をもった $70 \mu\text{m}$ のAl-Si₃N₄ナノビーム共振器を用いた。このナノビームは磁場と交流電流で振動させられる。彼らは量子渦がこのナノビームに捕捉された時、振動の共振周波数が変化することに着目し、量子渦の実時間測定に成功した [69]。Aalto大学のKamppinenらはII型のNEMS共振器を同様に磁場と交流電流で振動させ、超流動ヘリウム4中での振動の減衰と温度の関係性について調べた。その結果、十分低温(< 0.8K)ではデバイスに依存する減衰のみ観測されたものの、それより高い温度では、準粒子の弾性散乱や常流体の粘性による散逸が観測された [70]。

本章で主題となるのはFlorida大学のBarquistらによって行われたMEMS共振器を用いた研究である。Florida大学のグループはこれまでにプレート状のMEMS共振器を用いて、超流動ヘリウムの実験を行ってきた [71–76]。Barquistらが用いたMEMS共振器は厚さ $2 \mu\text{m}$ 、 $125 \times 125 \mu\text{m}^2$ の大きさのプレートの両端に楕形の電極がついていて、それが付属のバネで持ち上げられた形になっている (図 2.1(a))¹。このデバイスは電極に電流を流すことで自由に駆動でき、電極に対する応答を見ることで、プレートの変位を観測することが可能になっている。

彼らは主に剪断モードでプレートを振動させる実験を行っている。この時、プレートダイナミクスはDuffing方程式

$$\ddot{x} + 2(\Gamma_1 + \Gamma_2 x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x + \alpha_3 x^3 = g_0 \cos(2\pi ft) \quad (2.1)$$

で表される。ここで \ddot{x} 、 \dot{x} はそれぞれデバイスの変位の時間の2階微分、1階微分であり、 $2\Gamma_1$ は減衰定数で、振動数応答の半値全幅 $\Delta\omega$ と同値である。また、 Γ_2 、 ω_0 、 α_3 、 g_0 、 f はそれぞれ、非線形減数係数、共振振動数、非線形振動係数、駆動力定数、駆動振動数である。彼らが用いたデバイスの共振振動数はおおよそ24 kHzと見積もられている。この

¹このグループの他の実験でも同様の形をしたMEMS共振器が用いられている。

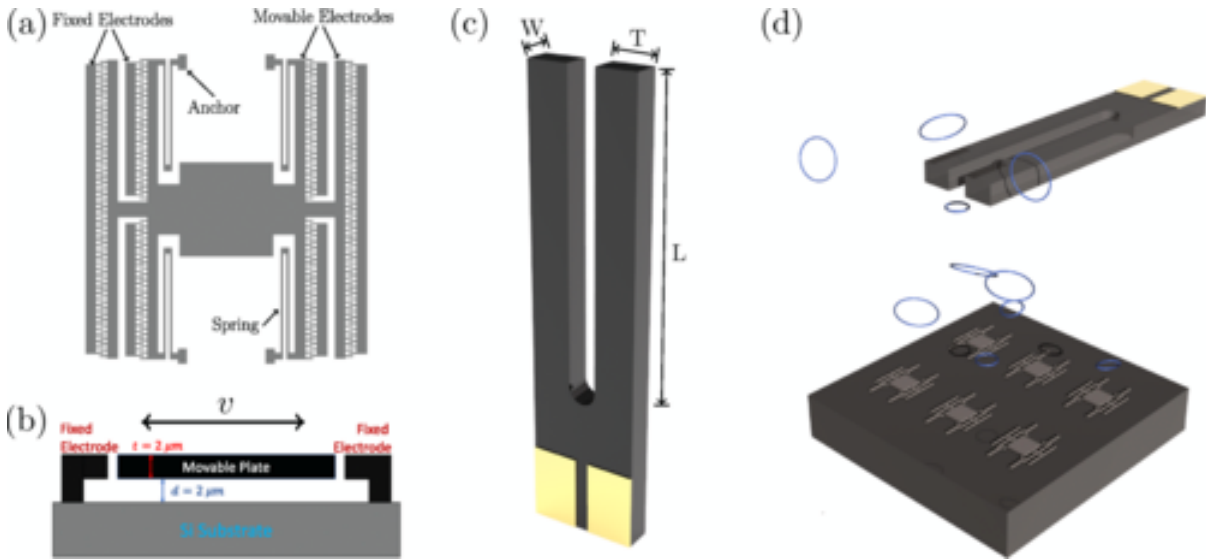


図 2.1: Florida 大学の実験 [71, 72] で用いられるデバイスの概念図。(a) は MEMS 共振器、(b) は基板に設置された MEMS 共振器を表している。(c) にはチューニングフォークの概念図が示されており、寸法は $W = 0.10$ mm、 $T = 0.23$ mm、 $L = 2.36$ mm である。(d) は実験の描像であり、チューニングフォークで励起された渦が、渦輪として MEMS 共振器に飛来している。

デバイスの真空状態での応答と、超流動ヘリウム中での応答を比較し、減衰や共振周波数の変化を見ることで、超流動ヘリウムの物性を評価することができる。

Barquist らの実験はこの MEMS 共振器を基板の上に設置し、石英結晶で作られたチューニングフォーク [77] を 3 mm 上部に位置させる (図 2.1(c)(d))。チューニングフォークは振動ワイヤーなどと同様に振動させることで乱流を生成できることが知られており、非常に感度が高い MEMS 共振器が量子渦から受ける影響を調べるために、系の中の量子渦の量を増やすことができる。一方で、MEMS 共振器はチューニングフォークや振動ワイヤーのように、自らの振動で自発的に乱流を生成することができない²。基板の上に設置された MEMS 共振器はバネの影響で $2 \mu\text{m}$ ほど浮いた形になっており (図 2.1(b))、超流動ヘリウムで満たされたセルの中では、この隙間もヘリウムで満たされ、量子渦が存在する。超流動ヘリウム 4 の温度はおよそ 14 mK で常流体の影響は無視できる。彼らはロックインアンプで MEMS 共振器の振動を観測することで、主に 3 つの結果を得た。

MEMS 共振器の振動の異常減衰

彼らは MEMS 共振器を振動数 ω_d で振動させたのち、外力を切ることで振動の自由減衰を調べた。式 (2.1) で $g_0 = 0$ として $x(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \phi(t))$ を仮定すると、

$$A(t) = \frac{A_0 e^{-\Gamma_1 t}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} A_0^2 (1 - e^{-2\Gamma_1 t})}} \quad (2.2)$$

$$\dot{\phi}(t) = \Pi A^2(t) \quad (2.3)$$

²この原因はよくわからないが、プレート状のジオメトリが何か影響しているかもしれない。

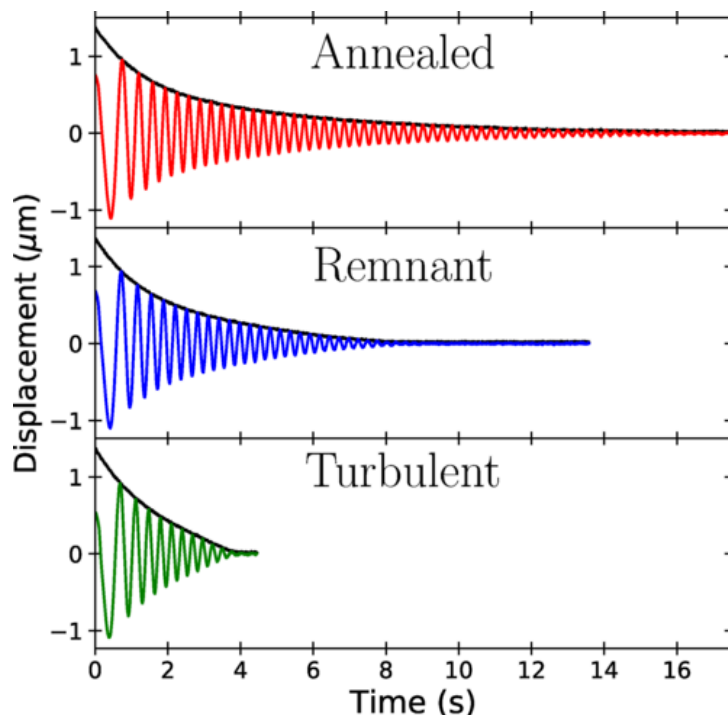


図 2.2: MEMS 共振器の振動の減衰 [71]。上から下に行くにつれ渦が多いと考えられる。黒線で示されているのは振幅 $A(t)$ で、色がついている線は $A(t) \cos[(\omega(t) - \omega_d)]$ を表している。

となり、振幅 A による振動数変化を伴う形になる。ここで、 $\Pi = \frac{3}{8} \frac{\alpha_3}{\omega_0}$ である。図 2.2 は $\omega(t) = \omega_0 + \Pi A^2(t)$ として $A(t) \cos[(\omega(t) - \omega_d)]$ 及び振幅 $A(t)$ をプロットしたものである。この図の下 2 つ “Remnant” と “Turbulent” はそれぞれ、チューニングフォークによる励起がない場合とある場合を指している。当然ながら、“Turbulent” は “Remnant” に比べて、系に存在する渦が多いと考えられる。“Annealed” については、今後説明するが、渦が “Remnant” よりも少ない場合と考えて良い。この時、渦の量が多いと思われる場合ほど、減衰が強くなっていることがわかる。

減衰力のヒステリシス

図 2.3(a) は共振振動数付近の振動数で駆動した MEMS の振動速度に対する、MEMS にかかる減衰力の強さをチューニングフォークをいくつかの速度で駆動した場合と駆動していない場合 (Remnant Response: 系を冷却した時に現れる残留渦のみ存在 [78]³) でプロットしている。緑の線は真空での応答を示している。ここで、この測定は静止した状態から、速度を上げていく過程で得られたデータを closed point で、ある程度速度を上げた後、下げていく過程で得られたデータを open point で表している。

一方、図 2.3(b) は図 2.3(a) のデータから、図 2.3(a) の緑線で示された真空での応答を引いたものを表している。今回の系は 14 mK の超流動ヘリウム 4 であるので、常流体の影響はほとんどない。そのため、これは、渦や乱流による減衰力を抜き出したものになって

³液体ヘリウムから超流動へ転移する際には、空間中に位相が異なる凝縮体がいくつか出現し、それらが広がることで、超流動転移する。その時に、位相が不連続な部分が現れ、それが量子渦となる。この量子渦の生成機構は Kibble-Zurek 機構という。

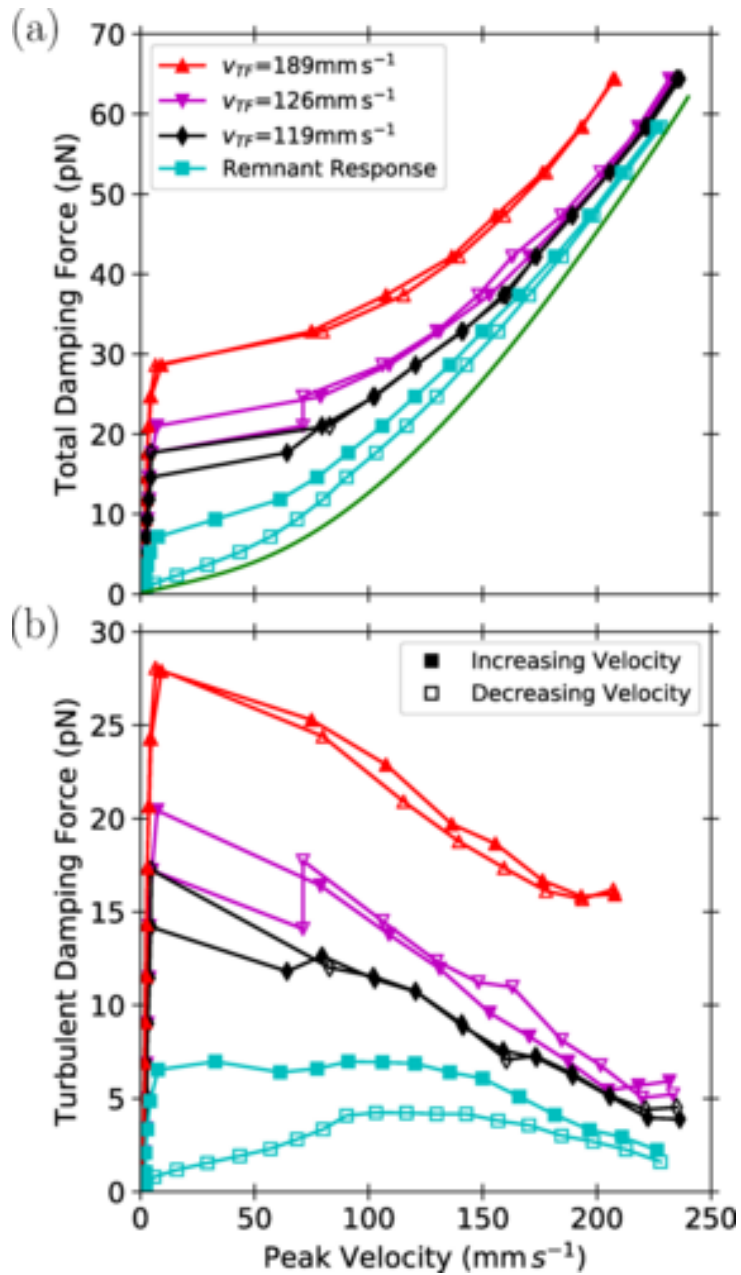


図 2.3: チューニングフォークによって乱流が生成されている時とされていない時 (Remnant Response) の MEMS 共振器にかかる減衰力と振動速度の関係 [71]。(a) は減衰力の合計を表している、(b) は (a) にて緑線で表された真空での応答を引いたものである。open point は速度を上昇させていく過程、closed point は減少させていく過程を示している。

いるはずである。これによると、チューニングフォークの振動速度が速いほど (渦が多いほど)、減衰が強くなっている。また、青い四角で表された、チューニングフォークを駆動していない場合の応答を見ると、速度が増加している時と比べて減少している時の方が力が小さくなるヒステリシスが見られている⁴。このヒステリシスはチューニングフォークが駆動され、系の渦量が大きくなっている時は、顕著には見られない。また、この図が示すように、MEMS の速度が大きい時は、全体的に渦による減衰力が小さい傾向にある。

位相ノイズ

彼らは、さらに、チューニングフォークが乱流を発生している時、MEMS 共振器の振動の位相成分が強くと乱れることを発見した。図 2.4(a) はその様子を示している。チューニングフォークの速度 (TF velocity) が時間と共に上昇し、140 mm/s 付近に到達したところで、突然速度が落ちる。この時、チューニングフォークは乱流を発生したと考えられる。それと同時に、MEMS の振幅 (MEMS r-channel) や位相 (Phase (deg)) はノイズを示し始める。しかし、それらを比較すると、明らかに位相のノイズが大きいことがわかる。また、図 2.4(b) はチューニングフォークの振動の on と off を切り替えた時の応答である。この時も、チューニングフォークが振動されている時のみ位相が強いノイズを持っていることがわかる。

彼らは位相が減衰項に敏感であることを解析的に示し [79]、MEMS と基板の間にある量子渦の数と減衰項の関係を議論することでこの問題にアプローチした。

2.2 一連の現象の原因

これら一連の現象には量子渦のピンングと渦同士の相互作用が関連していると思われる。量子渦が MEMS 共振器のプレート部分と基板の間にピンングされているとしよう。この時、プレートが駆動されると同時に、量子渦が引き伸ばされる。ピンングがない時には、粘性なし流体なので、引き伸ばされずにスリップしていくだけである。渦の単位長さ当たりのエネルギーは式 (1.11) であり、プレートによって引き伸ばされると同時に、プレートの駆動エネルギーが渦の伸長に使われ、プレートの運動が減衰する描像が考えられる。

さらには、プレートと基板の距離及び MEMS の共振振動数が式 (1.49) から想定される Kelvin 波の分散関係から考えられる共振振動数に非常に近い。これは、この系では十分渦が伸長され、プレートから渦へのエネルギーの輸送が効率よく行われている根拠となる。

このピンングの描像を仮定すると、渦が多いほど減衰が強いという考察は妥当である。また、MEMS 共振器の速度が大きい時に、渦による減衰力が弱くなるという挙動も、ピンングの臨界速度を考えれば、説明できる。ピンングされた量子渦はピンングされている面に対して十分傾いた時に、壁面と再結合し、ピンングが外れると考えられる。プレートの速度が十分速い時、渦は即座に大きく傾き、壁と再結合、ピンングから解放されるだろう⁵。これを正しいとすると、プレートの速度が速くなった時、ピンングはほとんど効か

⁴先の図 2.2にある“Annealed”はこの操作を行った後の振動の自由減衰をみている。

⁵少し状況は違うが、Schwarz は平行な平面固体境界にピンングされた量子渦がピンングから解放されるための外部超流動流を $(\kappa/2\pi d) \ln(b/a_0)$ と見積もっている [17]。ここで d は平行な平面固体境界の間隔、 b はピンングサイトの大きさである。

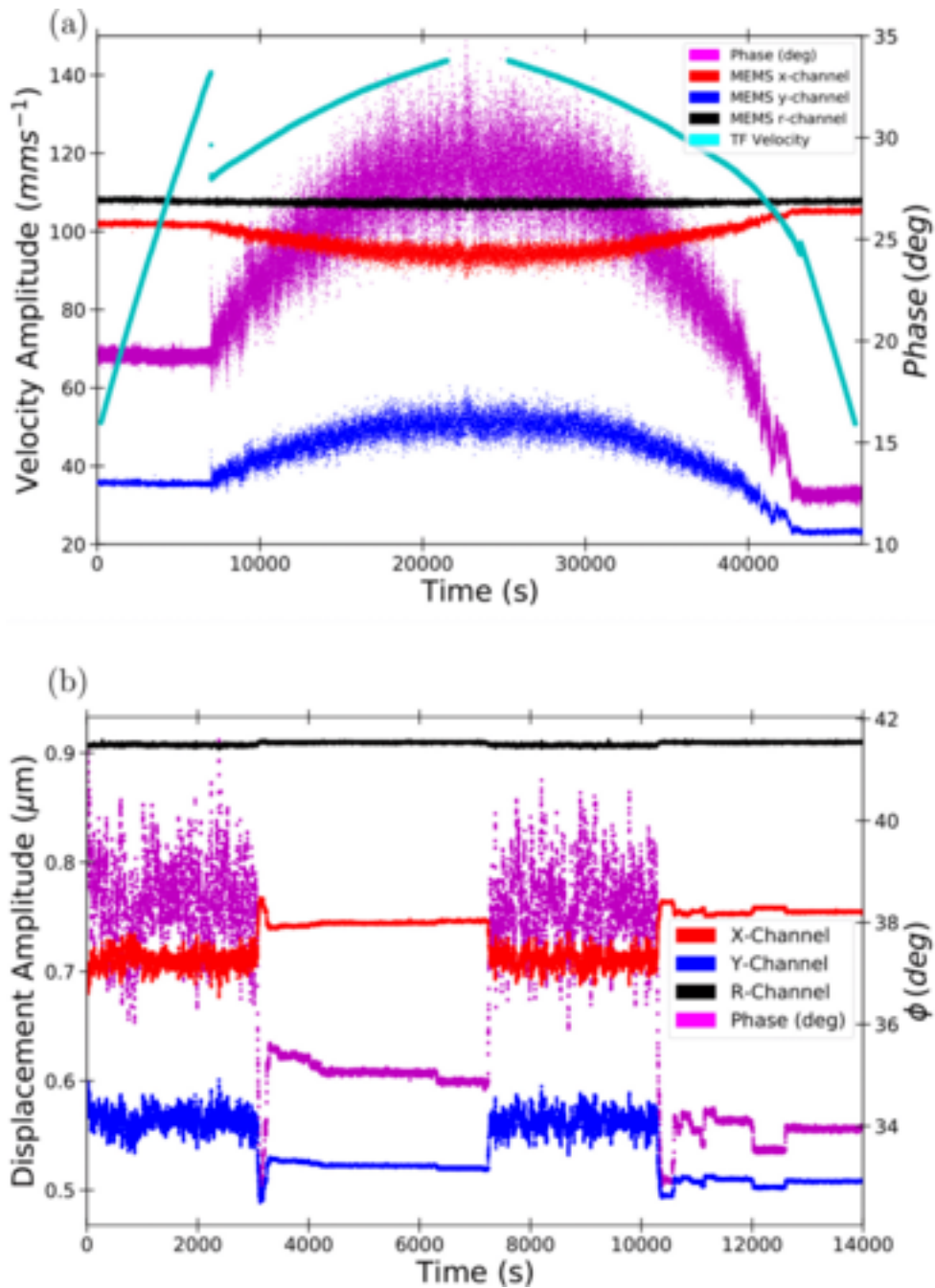


図 2.4: MEMS 共振器の振動の振幅と位相を表した図 [72]。(a) では、チューニングフォークの速度を上昇させ、突然速度が落ちた点で乱流が発生する。それと同時に位相に強いノイズが発生している。(b) はチューニングフォークの振動を [on,off,on,off] とした時の応答である。

ずに渦があまり伸長されない、つまり、プレートの運動は減衰されないことがわかる。

力のヒステリシスに関しては、MEMSの振動速度を上げていく過程では、渦のピンングにより残留渦が減衰に寄与していて、その途中で渦同士の相互作用など何かしらの原因で、渦が減少し、速度を下げる過程の時には減衰に寄与する渦があまり残っていないと考えられる。チューニングフォークが振動している時には、外部から絶え間なく渦が注入され続けるため、渦の減少は無視できると考えて良い。そのため、ヒステリシスが観測されない。

ここまで、プレートと基板の間にピンングされた渦のみを考えてきた。しかしながら、もちろん、プレートの側面や上部などの場所にも渦が存在する。我々は、これらの場所に付着している渦はあまり寄与しないと考えている。理由は大きく2つある。1つ目は、数が少ないことである。それらの面はバルクに面しているため、一般的に渦がプレートと基板の間の場合に比べて非常に長くなる。そのような渦は冷却の際に渦が生成される機構では、エネルギー的に好ましくなく、あまり生成されないと考えられる。2つ目は、それらの渦はあまり効率よく伸長されないためである。プレートの側面や上面に付着した渦は長い場合、Kelvin波の共振周波数とは共鳴しない。そのため、効率よく伸長される渦がプレートと基板の間に比べてかなり少ないと考えられる。

2.3 ピンングモデル

ここまで、ピンングを仮定した考察を紹介してきたが、これらの詳細な描像はわからない。そこで我々は、量子渦糸モデルをベースにピンングをモデル化することで、これらの解明に挑んだ。一言に、ピンングをモデル化するにしても任意性があるが、我々は量子渦糸モデルをベースに、2通りのピンングモデル、臨界角モデルと半球型ピンングサイトモデルを用いた。臨界角モデルはSchwarzによって円筒状の容器中でワイヤーにトラップされた渦の運動を記述するのに使われ[80]、複雑な計算なしにピンング及び粗い境界面の特徴を簡単に記述することができる。半球型ピンングサイトモデルは、半球の固体境界条件を解くことでピンングを記述する。静止した半球型ピンングサイトの境界条件はSchwarzによって解かれ[17]、Fujiyamaらは動く固体球の境界条件を解いた[81]。これは厳密に解くことが出来るが、複雑な計算を実行することは難しい。

2.3.1 臨界角モデル

このモデルでは、シンプルに平面な固体境界条件に、量子渦の端を固定する。固定された点以外は量子渦糸モデルと同様に、式(1.19)に従って動く。渦が動くと、固体境界に対して渦は傾いていく。十分傾いて境界との角度が臨界角 θ_c よりも小さくなった時、ピンングが外れる。外れた渦は再び近くのピンングサイトに付着して固定される。固定される点は境界上の点の隣接点 s_i とその境界と逆側に隣の点 s_{i+1} の中点から現在固定されている境界面に垂線を下ろした点である。そのため、一見、 $\Delta\xi_{\min}$ ほど端の点がジャンプしたように見える(図2.5(a))。

ここまで、このモデルの概要のみ記述したが、物理的描像は次のようになる。図2.5(b)のように非常に粗い境界を考える。そのうちの一つの突起に線状の量子渦(もう一端はどこに付着していてもいい)がピンングされているとする。この量子渦は、ピンングされて

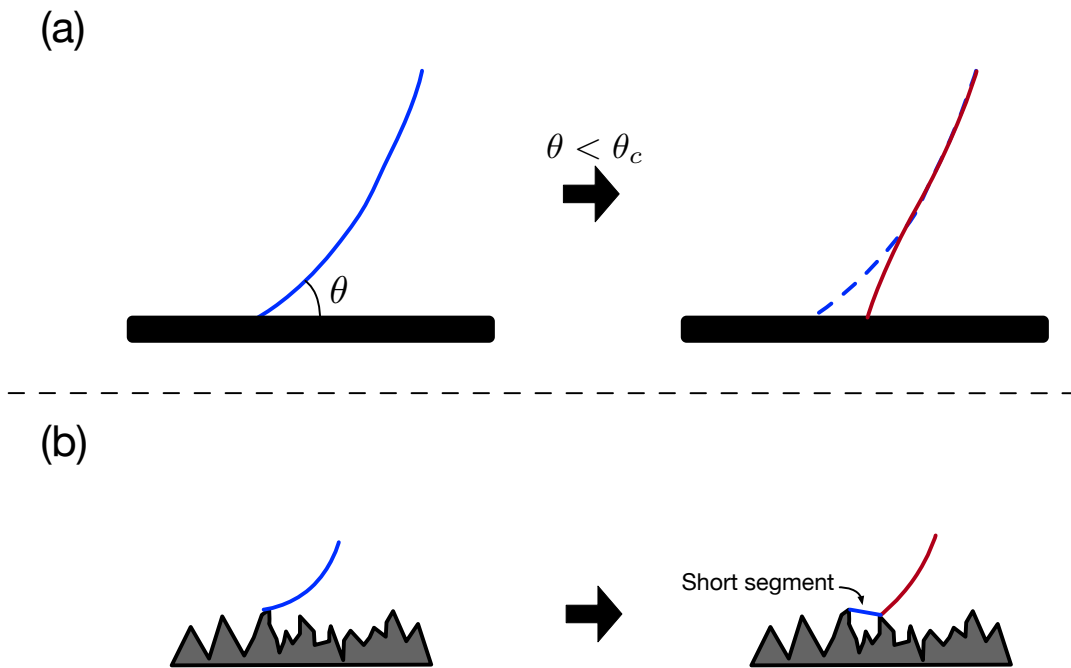


図 2.5: 臨界角モデルのアイデアを表した図 [82]。(a) のように固体境界にピンングされた渦が十分傾き、境界との角度が臨界角 θ_c 以下になると渦の端が角度を小さくするようにジャンプする。(b) はモデルの微視的な理解を表していて、十分に傾いた渦が非常に粗い境界の別の突起と再結合する。再結合した渦は元の渦よりわずかに短い線渦と突起同士をつなぐ渦切片になる。この切片はこのモデルでは無視されている。

いる点以外はおおよそ Biot-Savart の法則から計算される超流動速度場によって運動するはずである。この渦が十分傾いた時、近接した別の突起と再結合を起こす。再結合の結果、渦は 2 つに分かれる。1 つは元の渦より短い線渦、もう 1 つは突起間を橋渡しするようなく短い切片である。このモデルではこのごく短い切片を無視する。この切片は Kelvin 波共振周波数から一般に外れているためあまりプレートのダイナミクスに影響せず、ピンングサイトと再結合を繰り返して散逸されていくと思われる。我々はこのリコネクションによる散逸を rough surface-induced dissipation (RSID) と呼称している。このように、このモデルは臨界角 θ_c を導入することで、表面荒さによる散逸を内包したモデルになっている。本研究では、特に指定がない限り $\theta_c = \pi/6$ を用いている。このモデルで記述できるピンングサイト間距離 (突起間距離) はおおよそ渦点の最小間隔 $\Delta\xi_{\min}$ 程度である。

一例を見てみる。図 2.6 のように渦が 2 つの平行な固体境界間に挟まれている系を考える。図 2.6 では、渦にヘリカルな揺らぎを加えている。青い線で示されたものは臨界角モデルで記述されるピンングを受けている渦、オレンジ色の線で示されたものはピンングがない場合の渦を示している。どちらも初期状態から上方向にヘリカルな構造が自己誘導速度で伝播していく。しかし、ヘリカルな構造が壁に衝突した後、ピンングが効いている場合 (青線) では、RSID でヘリカルな構造が散逸されてしまい、消滅する。一方、ピンングが効いていない場合 (オレンジ線) では、散逸されずにヘリカルな構造は固体境界で反射し続ける。

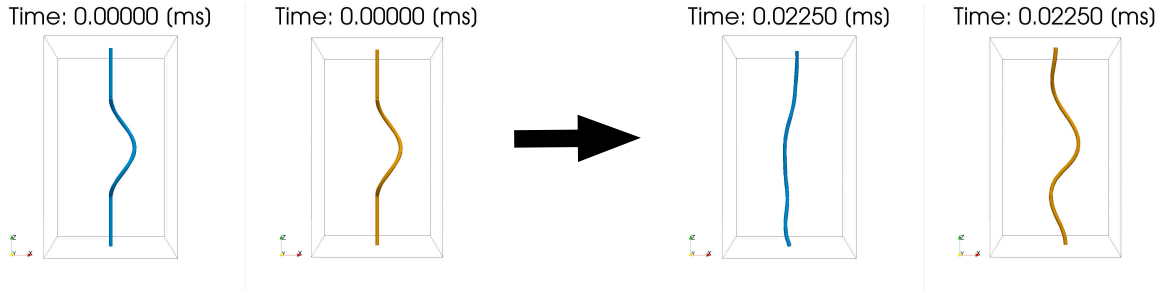


図 2.6: 渦のヘリカルな構造の伝播。青い線が臨界角モデルで記述されたピンングが効いている場合の渦、オレンジ線がピンングされていない場合の渦を表している。

2.3.2 半球型ピンングサイトモデル

このモデルでは、平面の固体境界に半球型のピンングサイトを設置する。このモデルは境界条件を厳密に解くことができるため、臨界角モデルで捉えきれない、ピンングが外れる現象 (ディピンング) や、短い切片のダイナミクスを記述することができる。

半球型のピンングサイトは、固体境界と同様に染み込みを防ぐために、超流動速度場のピンングサイトに垂直な成分がサイト表面で0になる境界条件が適用される。静止している状態では Legendre 陪多項式を計算することで解くことができる⁶。今回、ピンングサイトはプレートの振動とともに動くため、さらに以下に示されるポテンシャル流 \mathbf{v}_u が加わる。

$$\Phi_u(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2} \left(\frac{a}{r}\right)^3 \mathbf{u}_p \cdot \mathbf{r} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{v}_u(\mathbf{r}) = \nabla \Phi_u(\mathbf{r}) \quad (2.5)$$

ここで a はピンングサイトの半径、 \mathbf{u}_p はピンングサイトの速度である。

量子渦はピンングサイトや固体境界に $\Delta\xi_{\min}$ 以下の距離まで近づくと再結合する。そのためピンングされた渦が十分傾き、渦と平面な固体境界との距離が $\Delta\xi_{\min}$ を下回った時に、再結合を起こし、ピンングサイトから離れる。このようにピンングが外れることをディピンング (depinning) と呼ぶ。これは逆も同様で、ピンングされていない渦が十分にピンングサイトに近づくと再結合を起こしピンングされる。なお、このモデルでは、臨界角モデルに含まれている RSID のような、短い渦切片を取り除くアルゴリズムは含まれていない。

2.4 系のモデル化

本研究では、実験のような系で何が起きているのかをシミュレーションで解明するために、平行な固体境界条件で挟まれた系を考える。これらの間隔 L は、実験と同様に $L = 2 \mu\text{m}$ としており、片方を速度 $\mathbf{v}(t) = 2\pi f A \cos(2\pi ft) \hat{x}$ で振動させる。ここで A は振動の振幅で、 f は振動数である。この時、ピンングされた渦は境界に接している点では、同じ速度で振動される。

⁶付録 C を参照。

Parameters in the critical angle model	Symbol	Value
Single vortex case		
Distance between plates	L	$2 \mu\text{m}$
Time resolution ($n = 1$ mode)	Δt	2.5 ns
Minimum Spatial resolution ($n = 1$ mode)	$\Delta\xi_{\min}$	$0.01 \mu\text{m}$
Maximum Spatial resolution ($n = 1$ mode)	$\Delta\xi_{\max}$	$0.03 \mu\text{m}$
Time resolution ($n = 3$ and $n = 10$ mode)	Δt	0.5 ns
Minimum spatial resolution ($n = 3$ and $n = 10$ mode)	$\Delta\xi_{\min}$	$0.004 \mu\text{m}$
Maximum spatial resolution ($n = 3$ and $n = 10$ mode)	$\Delta\xi_{\max}$	$0.01 \mu\text{m}$
Oscillation frequency ($n = 1$ mode)	f_1	23625 Hz
Oscillation frequency ($n = 3$ mode)	f_3	$23625 \times 3^2 \text{ Hz}$
Oscillation frequency ($n = 10$ mode)	f_{10}	$23625 \times 10^2 \text{ Hz}$
Oscillation amplitude	A	$0.1 \mu\text{m}$
Multiple vortex case		
Distance between plates	L	$2 \mu\text{m}$
Time resolution	Δt	2.5 ns
Minimum spatial resolution	$\Delta\xi_{\min}$	$0.01 \mu\text{m}$
Maximum spatial resolution	$\Delta\xi_{\max}$	$0.03 \mu\text{m}$
Oscillation frequency ($n = 10$ mode)	f	23625 Hz
Oscillation amplitude	A	$0.1 \mu\text{m}$

表 2.1: 臨界角モデルで用いられたパラメータ [82]

系は $k = n\pi/L$ (n は自然数) の Kelvin 波モードと共鳴する。本研究では、特に指定しない限り $n = 1$ を代入したモードに近い $f_1 = 23625 \text{ Hz}$ を採用する。これは実験で用いられている系の共振振動数にも近い値である。

このような系をベースに、単一渦の場合と複数渦の場合をシミュレーションする。単一渦の場合は渦同士の相互作用がない、ピニングと振動のみのピュアな渦の振る舞いを見ることができる。一方で複数渦の場合は渦同士のリコネクションをはじめとした相互作用も関わってくるようになり、より実験系に近い考察が行える。この一連のシミュレーションに用いられる代表的なパラメータは表 2.1 及び表 2.2 に示している。

2.5 渦のダイナミクス

ピニングや振動境界が効いている時の渦のダイナミクスは謎であるが、実験における観測を物理的に理解するためには必要不可欠である。提案したモデルを用いて、これらが効く場合の渦のダイナミクスを実際にシミュレーションしてみる。

2.5.1 単一渦の場合

ここでは単一渦の場合の渦のダイナミクスを議論する。初期条件として、図 2.7 のように、固体境界の間に挟まれた一本の直線渦を用意する。この直線渦の向きは下から上向き

Parameters in the hemispherical pinning site model	Symbol	Value
Distance between plates	L	$2 \mu\text{m}$
Pinning site size	a	$0.03 \mu\text{m}$
Time resolution	Δt	0.05 ns
Minimum spatial resolution	$\Delta\xi_{\min}$	$0.001 \mu\text{m}$
Maximum spatial resolution	$\Delta\xi_{\max}$	$0.003 \mu\text{m}$
Oscillation frequency ($n = 1$ mode)	f	23625 Hz
Oscillation amplitude	A	$0.1 \mu\text{m}$

表 2.2: 半球型ピンングサイトモデルで用いられたパラメータ [82]

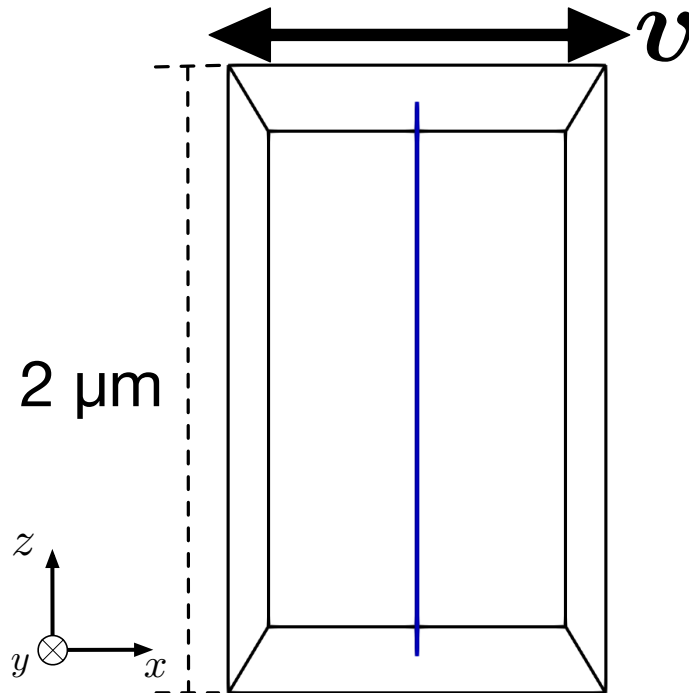


図 2.7: 単一渦の場合の初期状態 [82]。一本の渦が2つの平行な固体境界に挟まれている。矢印は振動の方向を表している。

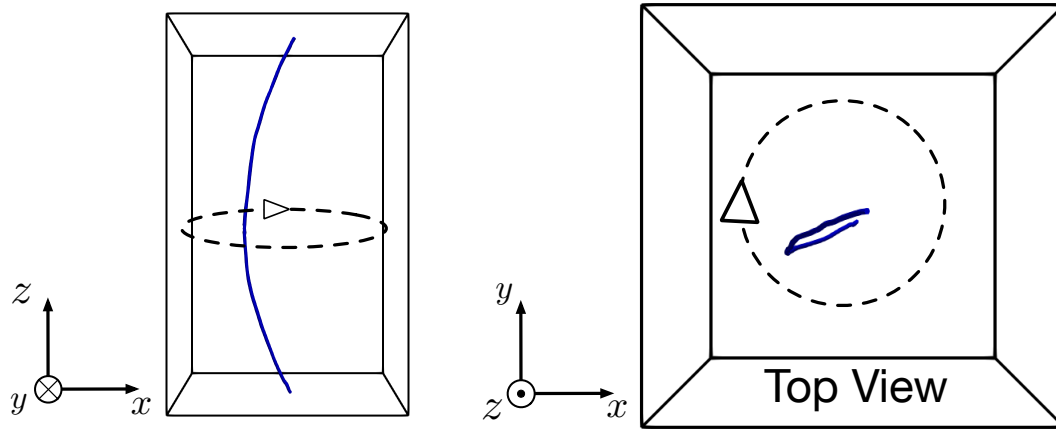


図 2.8: 臨界角モデルで記述された単一渦の場合の統計的定常状態 [82]。 $n = 1$ の場合の Kelvin 波が励起され、自己誘導速度で回転している。矢印は回転の方向を表している。

($+\hat{z}$) である。この系では上部の境界が振動される。図 2.7 に示されている y 方向及び x 方向には境界条件が適用されていない。

臨界角モデルにおける代表的な渦のダイナミクスを紹介する。今、振幅 $A = 0.1 \mu\text{m}$ 、振動数 $f = f_1$ とする。上部の境界が振動すると同時に、渦は伸長され、屈曲していく。屈曲した渦は、自らの自己誘導速度で回転していく。図 2.8 に示されているように、 $+\hat{z}$ 方向から見ると、渦が時計回りに回転しているように見える。これは渦の向きを反映していて、渦が逆向きの際は、反時計回りに回転する。この時間発展はある程度の時間で統計的定常状態に達し、渦の長さが、揺らぎながらおおよそ一定になる。この時の渦の長さはおおよそ $2.13 \mu\text{m}$ で、回転周期は、おおよそ $1/f$ となる⁷。

この統計的定常状態は、境界の振動による励起と粗い境界による散逸 (RSID) のバランスによって成り立っている。振動により、伸長された渦が十分傾くことで、近接した突起との再結合を起こし、散逸される。伸長された渦がこれを繰り返すことで、渦長の成長がある程度で止まり、統計的定常状態に達する。

振動数依存性

先ほど挙げたシミュレーション結果は固体境界の振動数が $2 \mu\text{m}$ の量子渦の Kelvin 波モードに近い時の結果である。一方、振動数が Kelvin 波モードから遠い場合はどうなるだろうか。図 2.9 は $f = 23625 \text{ Hz}$ に加え、 $f = 10000, 40000 \text{ Hz}$ の場合の渦長さの時間発展を示している。 $f = 23625 \text{ Hz}$ の時には、十分に伸長されているのに対して、それ以外

⁷統計的定常状態における渦の長さを簡単に見積もる。渦の形が sin 波で書けるとすると、振幅 A' に対して $x = A' \sin(kz)$ とかける。この時の渦長 l は、

$$l = \int_0^L \sqrt{1 + (A')^2 k^2 \cos^2(kz)} dz \quad (2.6)$$

となる。臨界角から、振幅 $A' = \tan(\pi/2 - \theta_c)/k$ を仮定すると、 $l = 3.08 \mu\text{m}$ となる。シミュレーションでは常に渦と壁の角度が θ_c より小さくなるように制限をかけているため、これとは一致しない。試しに $\theta_c = \pi/3$ とすると、 $l = 2.15 \mu\text{m}$ となり、いい一致が得られ、壁との角度はおおよそ、 $\pi/3$ 程度が保たれていると思われる。

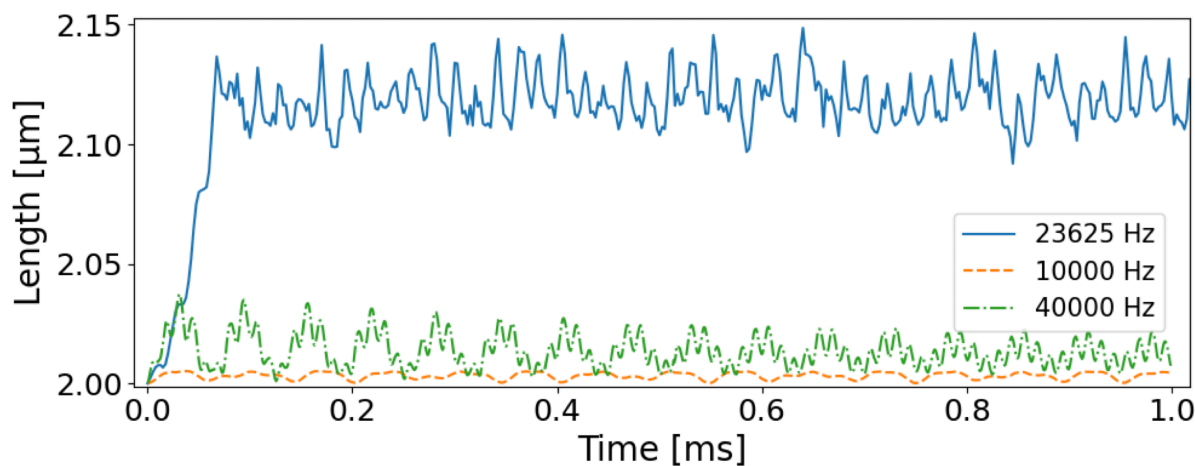


図 2.9: 3つの異なる振動数の時の渦長の時間発展 [82]。Kelvin 波の共振モードから外れている時、渦は大きくは励起されない。

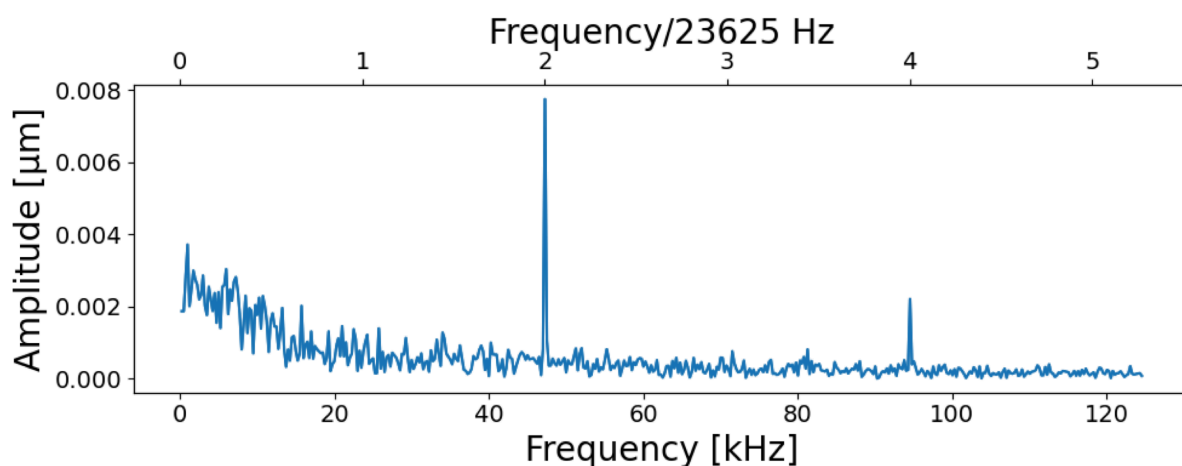


図 2.10: 図 2.9に示されている $f = 23625$ Hz の時の渦長の時間発展を Fourier 変換したものの。

の時は、あまり伸長されていないことがわかる。⁸

また、図 2.11(a),(b) には、波数 $k = n\pi/L$ の $n = 3$ 及び $n = 10$ に対応したモードの振動数 f_3 及び f_{10} をかけた時の統計的定常状態の渦のスナップショットを示している。この時、渦は、モードに対応した Kelvin 波が励起されている。渦長の時間発展は図 2.11(c) に示されており、どのモードにおいても Kelvin 波の共振振動数で振動させた場合には、渦が大きく伸長されることがわかる。

臨界角依存性

臨界角モデルでは、渦のダイナミクスは選ばれた臨界角 θ_c に依存する。渦が十分に傾いた時 (壁との角度が θ_c 以下になった時) に、壁と再結合し、散逸が起こる。この時の臨界角が小さいほど、この再結合が起こりにくく、ピンングが強く効いていることになる。今回、実際に臨界角 θ_c を $\pi/10$ から $\pi/4$ の間で 4 通りの間で変えてシミュレーションを

⁸図 2.10に示されているように、定常状態における長さの振動周期は $2/f$ に対応する。

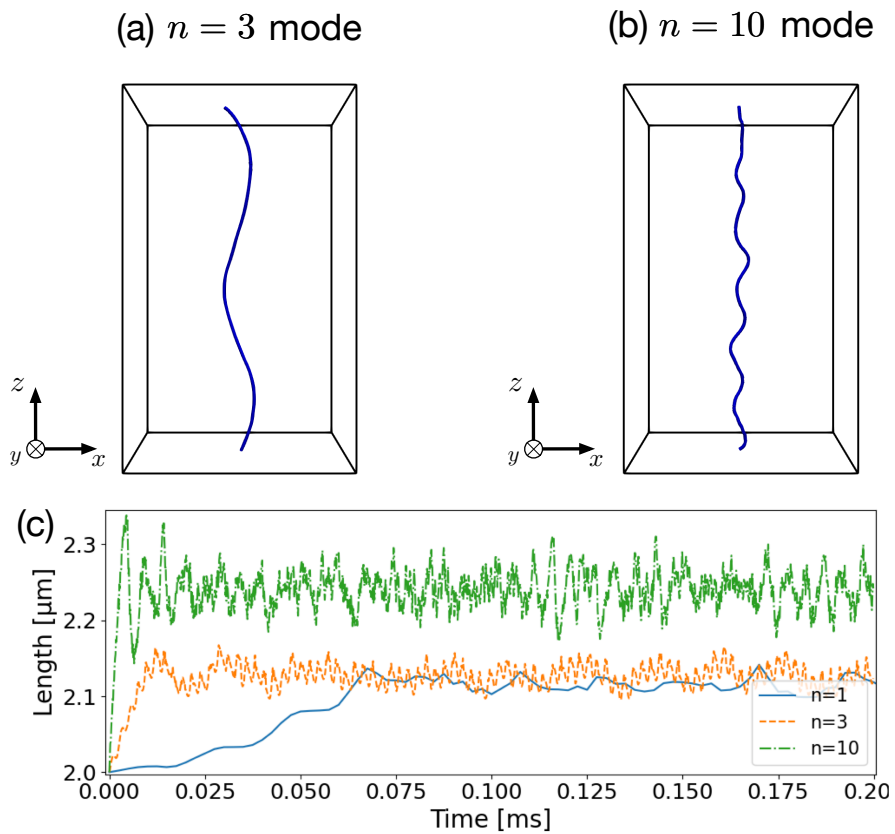


図 2.11: 振動数が Kelvin 波の共振モードと合っている時の (a)(b) スナップショット及び (c) 渦長の時間発展。(a)、(b) はどちらも時刻 0.027 ms におけるもので (a) が $n = 3$ 、(b) が $n = 10$ のモードを表している。

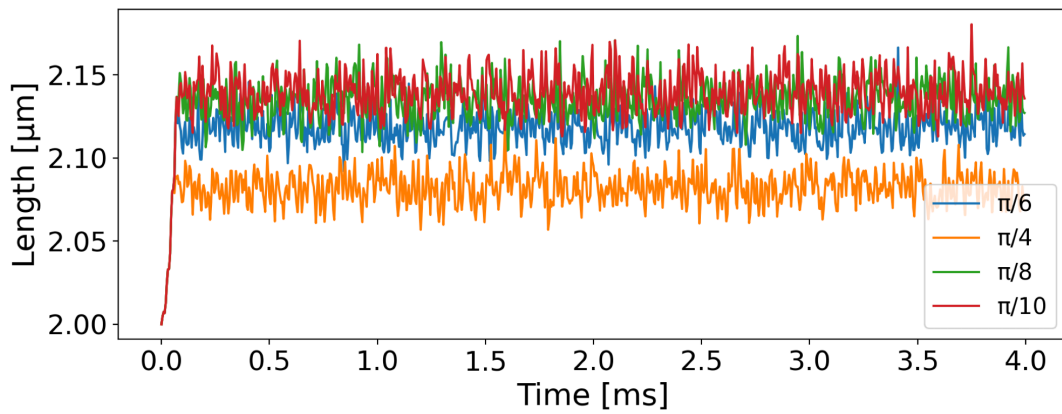


図 2.12: 渦長の臨界角 θ_c 依存性 [82]。

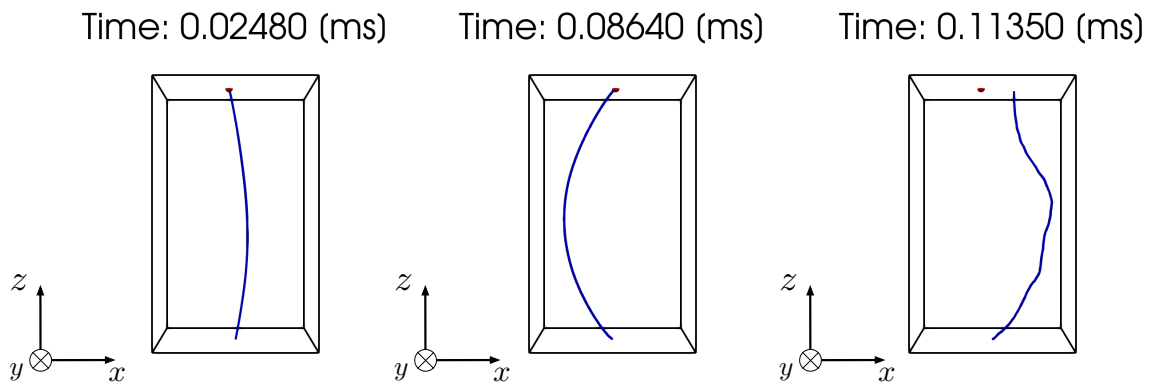


図 2.13: 半球型ピンングサイトモデルで記述された単一渦のスナップショット。上面と下面についている赤い点がピンングサイトを表している。渦は徐々に伸長されていき、最終的にはディピンングする。

行った。渦長の時間発展を図 2.12 に示す。結果として、定常状態での渦の長さは少し変わるが、渦は定性的には同じ振る舞いを示す。 θ_c が $\pi/4$ となると、流石に他と異なる長さを持っているが、 $\pi/6$ 以下ではおおよそ一定の長さに収束しており、 $\theta_c = \pi/6$ を用いている。

半球型ピンングサイトモデルによるディピンングの検証

半球型ピンングサイトモデルでも同様の計算を行った。ここで、ピンングサイトの半径 a は $0.03 \mu\text{m}$ とした。このモデルでも、臨界角モデルと同様に振動とともに伸長されていき、自己誘導速度で初期位置周辺を軸に回転する。臨界角モデルでは、十分に引き伸ばされた後は、RSID と振動による伸長が釣り合い、統計的定常状態に達していた。しかしながら、半球型ピンングサイトモデルには RSID がないため、伸長された渦は、最終的には壁と再結合し、ピンングが外れる。ピンングが外れた後は、当然ながら、励起がないために、渦の伸長は止まる。

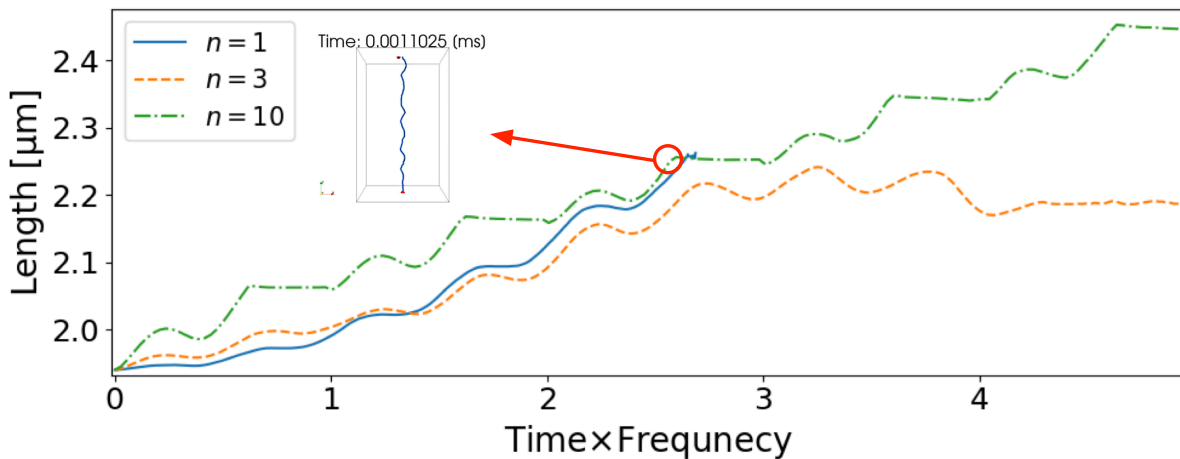


図 2.14: 半球型ピンングサイトモデルで記述された単一渦の場合の3つの異なる振動数での渦長の時間発展。凡例は振動数を表している。 $n = 1$ の場合には、計算時間の問題で線が途切れている。

半球型ピンングサイトモデルにおける振動数依存性

振動数依存性に関しては、臨界角モデルと同様で、共振振動数に近い時は渦長がよく伸び、どの共振振動数からも遠い時はあまり伸びない。しかしながら、振動数が非常に大きい時、半球型ピンングサイトモデルではディピンングが影響し、少し異なる振る舞いを見せる。図 2.14 は、いくつかの振動数 f における渦長の時間発展を表している。ここで、横軸は時間に f をかけることで無次元化してある。 $f = f_3$ の時は、先と同様で十分引き伸ばされたのちディピンングする。一方で $f = f_{10}$ の時は、十分引き伸ばされるまでに、渦が何度もディピンングされ、再びピンングされることを繰り返す。図 2.14 では、線が平坦になっているところでは、渦がディピンングされていて、渦の伸長が止まっている。一方で、渦がピンングされている場合は、線が曲線的になっていて、他の振動数と同様に渦が伸長されている。

ピンングサイト半径依存性

ピンングサイト半径 a を変えることでダイナミクスがどのように変化するかも一つの興味としてあるだろう。図 2.15 は、ピンングサイト半径 a を変えて、同様の計算をした時の渦長の時間発展とディピンング時間を表している。ピンングサイト半径 a が大きくなるほど、渦はディピンングしにくくなる。半球型ピンングサイトモデルにおけるディピンングは、ピンングサイトが位置している平面固体境界とピンングサイト表面の渦点 (厳密には、その隣接点) の距離が $\Delta\xi_{\min}$ 以下になった時に起こる。その結果、ディピンングの有効臨界角 ($\sim \arcsin(a/\Delta\xi_{\min})$) はピンングサイトが大きくなるにつれて小さくなり、ピンングが外れにくくなる。

さらには、ピンングサイト半径 $a = 0.1 \mu\text{m}$ の時は計算を行った時間内 ($\sim 0.35 \text{ ms}$) ではディピンングが見られなかった。これはピンングサイト半径 a と振幅 A がおおよそ同じになり、ピンングサイト表面の渦点が平面固体境界に到達しなくなったからであると考えられる。このように、ピンングサイトが渦が動く距離と比べて大きくなるとピンングは

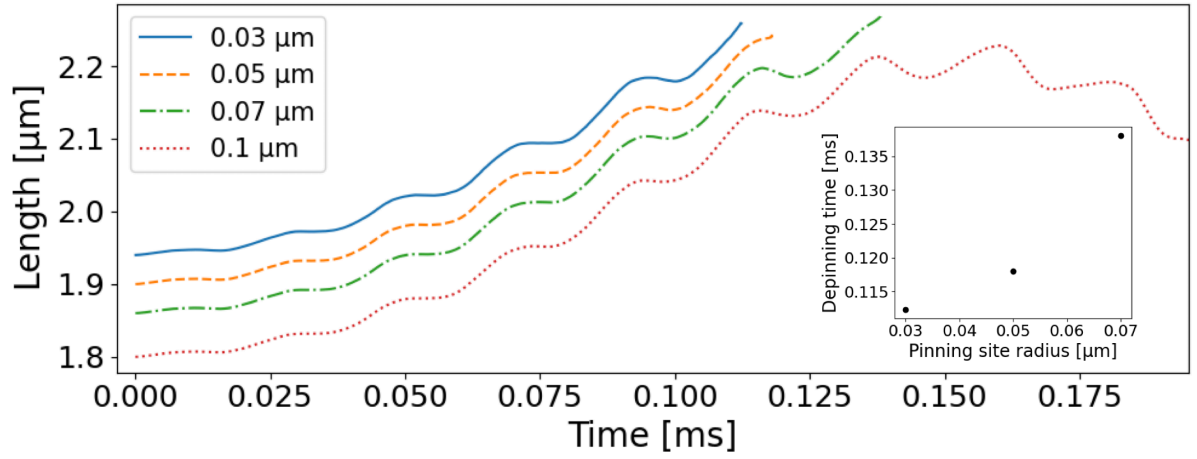


図 2.15: ピニングサイト半径 a を変えた時の渦長の時間発展。凡例がそれぞれピニングサイト半径 a を表している [82]。渦長のプロットはディピニングした時点で止めており、 $a = 0.1 \mu\text{m}$ の時はディピニングが見られてない。内に埋め込まれた図は a とディピニングの時間との対応を示している。

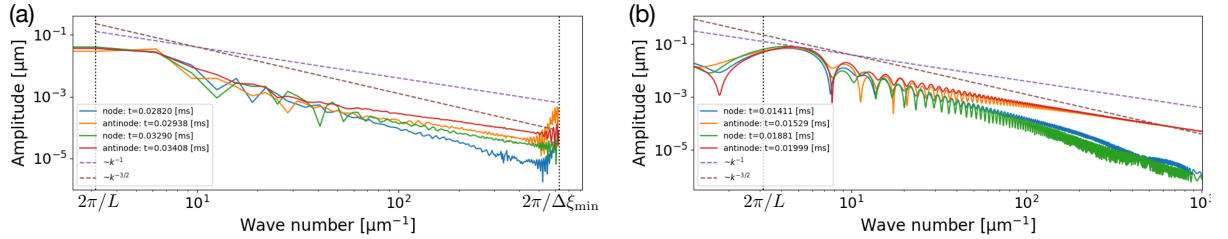


図 2.16: $f = f_3$ の時の振幅スペクトル。(a) は臨界角モデル、(b) は半球型ピニングサイトモデルでの結果である。

効きにくくなるかもしれない⁹。

2.5.2 振幅スペクトル

我々は Vinen ら [64] と同様に振幅スペクトラムを見た。ここで、Kelvin 波は z に対して一意と仮定し、その変位を

$$\chi(z, t) = x(z, t) + iy(z, t) \quad (2.7)$$

と定義して、フーリエ成分の振幅 $|\tilde{\chi}(k, t)|$ をみる。

わかりやすくするため $f = f_3$ の場合の結果を図 2.16 に示す。これらは、ある時間における渦のパターンについて振幅スペクトルを計算したものである。(a) は臨界角モデル、(b) は半球型ピニングサイトモデルのものである。振幅スペクトルを計算する時間として、振動する境界の変位がゼロの時 (振動の節 “node”) と最も大きい時 (振動の腹 “antinode”) を選んでいる。“node” の時は、どちらの場合も $|\tilde{\chi}(k, t)| \sim k^{-3/2}$ に近いスペクトルが得られている。これは、Vinen らによって見られたものと近い値である [64]。一方で、“antinode” の時は、 $|\tilde{\chi}(k, t)| \sim k^{-1}$ に近い。これは渦が傾いているためであると考えられる。例とし

⁹極端な話ではあるが、 $a \rightarrow \infty$ とすると、もはやピニングサイトとしての役割を果たさないはずである。

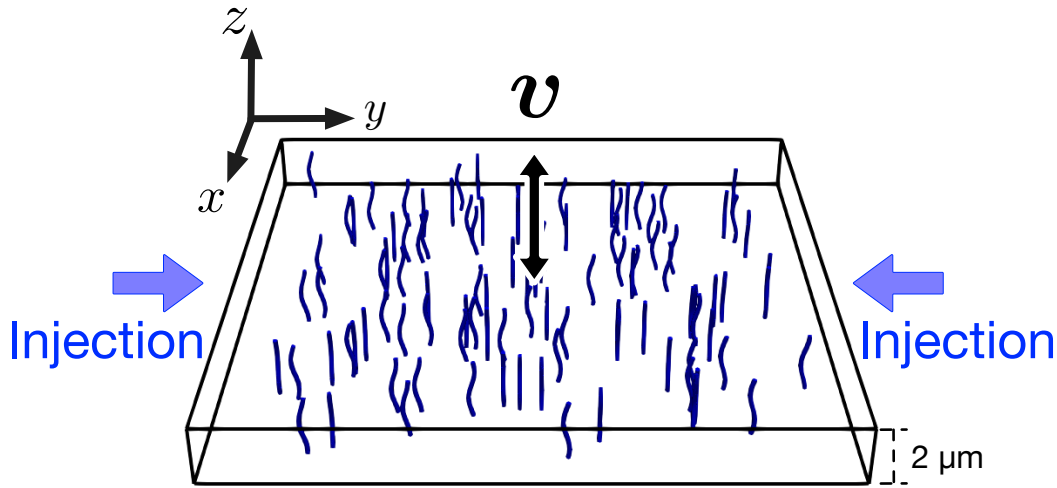


図 2.17: 複数渦の場合の初期状態 [82]。ピンギは臨界角モデルで記述される。100本の渦がランダムに用意され、向きは上向と下向きがそれぞれ50本ずつである。上面は x 方向に振動され、 y 方向から渦が注入される。注入の方法は図 2.19を参照。

て $y = x$ の Fourier 級数展開 ($[-\pi, \pi]$ の周期性を仮定する) をみると展開の次数 n における係数の大きさ $|a_n|$ は $|a_n| \propto 1/n$ なので、“antinode” の時には、Kelvin 波のパターンと渦の傾きの重ね合わせで k^{-1} のスペクトルが現れていると思われる。これは、半球型ピンギサイトモデル (図 2.16(b)) で顕著で、頻繁にディピンギして渦の端点の位置が変わる臨界角モデルでは際立って現れるわけではない。

2.5.3 複数渦の場合

次に、複数渦の場合のダイナミクスを述べる。実際の系は、先ほどの単一渦の場合ほど単純ではなく、無数の渦が系に存在していると考えられる。そこで、我々は図 2.17のような系を考案した。初期状態として、 $V = 20 \times 20 \times 2 \mu\text{m}^3$ の体積中に100本の線渦を用意する¹⁰。今、図 2.17の z 方向に臨界角モデルに基づいた粗い固体境界条件が適用されていて、上部はこれまでと同様に振動させられている。100本の渦の向きは上向き ($+\hat{z}$)、下向き ($-\hat{z}$) がそれぞれ50本ずつとしてある。このシミュレーションは V 内の渦のみを興味の対象とし、 V から x あるいは y 方向に $2 \mu\text{m}$ 以上渦の全体が離れたものはダイナミクスに影響しないとして消去している。

実際の実験系では、チューニングフォークにより生成された量子乱流から、MEMS 共振器へ渦輪が侵入してくる。そこで、我々は、実験系と同様の描像を再現すべく、 y 方向から渦を系に注入した。注入は図 2.17に示されているように V の y 方向の両側面から行われ、渦は基本的には V の方向 (V の重心を原点とした時の $y = 0$ の方向) を向いている。渦を注入する場所は側面からランダムに決められる。

この渦の注入は、渦の注入頻度と、渦のサイズ分布の2つのパラメータがある。今回のシミュレーションでは、渦の注入頻度は 10^6 Hz とした。これは、チューニングフォークの振動数 $\sim 10^4$ Hz よりも大きい、渦の放出頻度は振動物体の振動数に単純に依存してい

¹⁰ここで、 xy 面の面積が $20 \times 20 \mu\text{m}^2$ という、実際の系 ($125 \times 125 \mu\text{m}^2$) より小さいのは計算の都合上である。

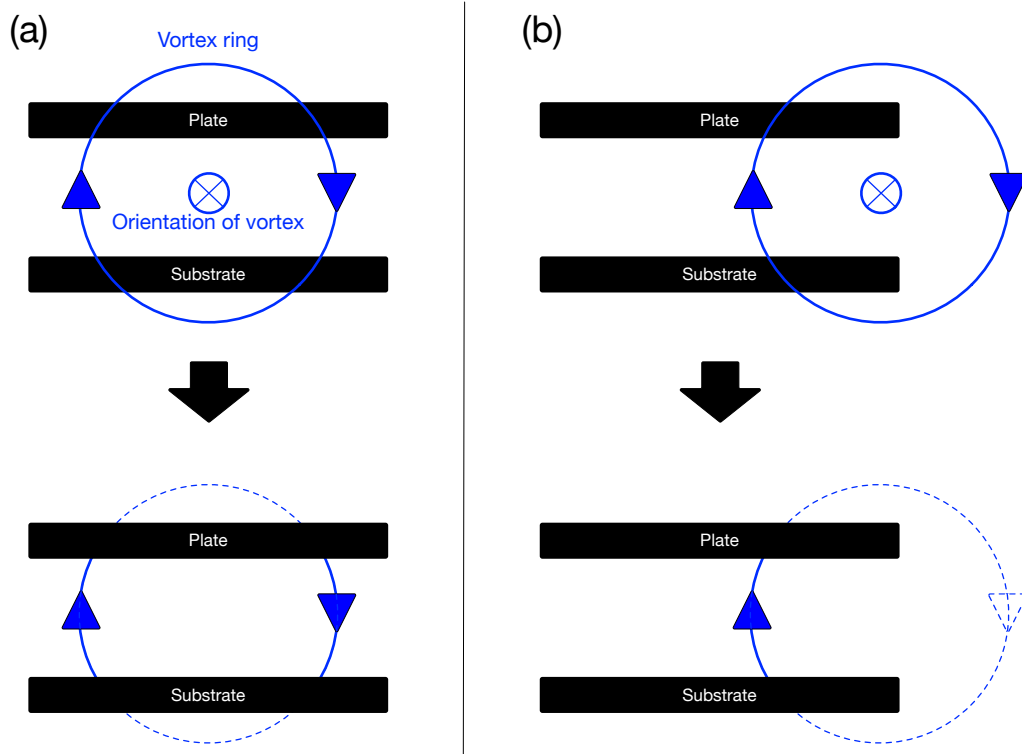


図 2.18: 図 2.17 の系でプレートと基板へ入射してくる渦の模式図 [82]。プレートと基板の間隔よりも大きい渦が入射してきた時、渦はプレート及び基板と相互作用してこれらを橋渡しするような渦になると考えられる。(a) のように渦がプレートと基板のそれぞれ 2 点と再結合した時、反平行に線渦のペアが間に入り込む。一方、(b) のように各一点で再結合した時は一本の線渦になる。

るものではなく、振幅、駆動力にもよるべきものであるため、対応している必要はない。また、我々は過去の研究 [53] で渦輪を注入して、局所的な量子乱流を生成、そこからの渦輪の放出頻度を調べたが、その時にも渦輪の放出頻度が渦の注入頻度を上回っていることが確認された。

渦のサイズ分布に関しては、Yano らが観測した冪乗則 [36] にしたがって注入する。このシミュレーションでは、渦のサイズは $0.25 \mu\text{m}$ から $10 \mu\text{m}$ の範囲と仮定し、この範囲で Yano らが観測した冪指数 -1.7 に従い注入する。ここで、Yano らが観測したのは、ある一定の大きさ以上という累積分布なので、そのサイズで微分した値、 -2.7 を冪指数とした分布を採用する¹¹。この冪乗則は、振動ワイヤーによって生成された量子乱流に関するものであり、今回用いられているチューニングフォークとは形も振動数も全く異なるが、量子乱流から放出される渦輪の分布に関する研究は Yano らによるもの [36] しかないため、今回はそれにしただがっている。

入射する渦輪がプレートと基板の間隔よりも小さいとき、境界とはほとんど相互作用することなく、系に侵入し、他の渦と相互作用する。一方で、入射する渦輪の大きさが間隔 $L = 2 \mu\text{m}$ よりも大きい時、渦輪は境界と相互作用するはずである。我々が採用する描像を図 2.18 に示す。入射する渦輪の半径と位置によって、図 2.18(a) のように反平行な線渦のペアとして入射してくるか、図 2.18(b) のように単一の線渦であるかのどちらかである

¹¹ $n(R)$ を半径 R の渦が放出される頻度の確率密度関数として、Yano らによって観測されたものは $\int_{R_0}^{\infty} n(R) dR \propto R^{-1.7}$ である。そのため我々は $n(R) \propto R^{-2.7}$ を用いた。

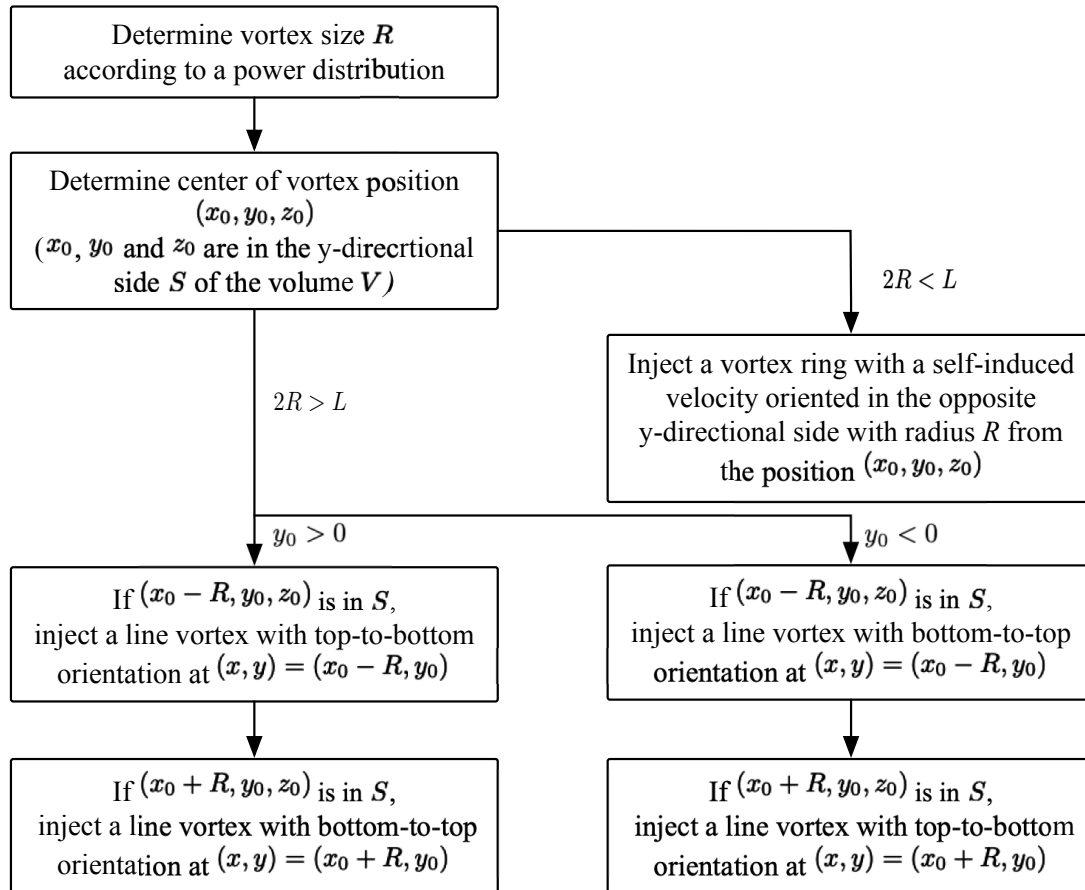


図 2.19: 図 2.17の系に対して行われる渦の注入のフローチャート [82]。 $R > L$ が図 2.18で説明された状況に対応している。

とした。これらの描像を反映した注入スキームはフローチャートとして図 2.19に示している。本研究で行う渦注入は全てこのフローチャートにしたがって行われる。

定常状態と散逸機構

ここからは複数渦の場合のシミュレーション結果を示していく。図 2.20(a) は V 内での量子渦の総渦長及び平行な固体境界間を橋渡ししている渦の本数を表している。この時、総渦長は初期状態の約 $200 \mu\text{m}$ から $180 \mu\text{m}$ ほどに減少し、統計的定常状態に落ち着く。また、渦の本数も初期の 100 本から 30 本ほどに減少している。スナップショットからもわかるように、臨界角モデルのような十分粗い境界を持つ系だと、その粗さに起因した散逸により乱流生成が妨げられているように見える。実際に、ピンギのない通常の平面境界条件を課した系では、総渦長は渦の注入により時間とともに増加し、最終的には $600 \mu\text{m}$ ほどになり、渦の本数もピンギが効いている場合と比べてかなり多い (図 2.20(b))。

この系のように、渦が複数ある系では渦同士が接近することで再結合を起こし、トポロジーを変化させていく。再結合した渦は、RSID によって散逸されやすい形へと変化する。それには大きく 2つの場合が考えられる。(i) 線渦-線渦の再結合と (ii) 線渦-渦輪の再結合である (図 2.21)。(i) 線渦-線渦の再結合では反平行の渦同士が再結合することで2つの壁に付着した半渦輪になる。反平行の渦は、0 K では互いが作る速度場でそれらの中点を中心に回転するのみだが、ピンギの影響で局所的に距離が近い部分及び遠い部分がで

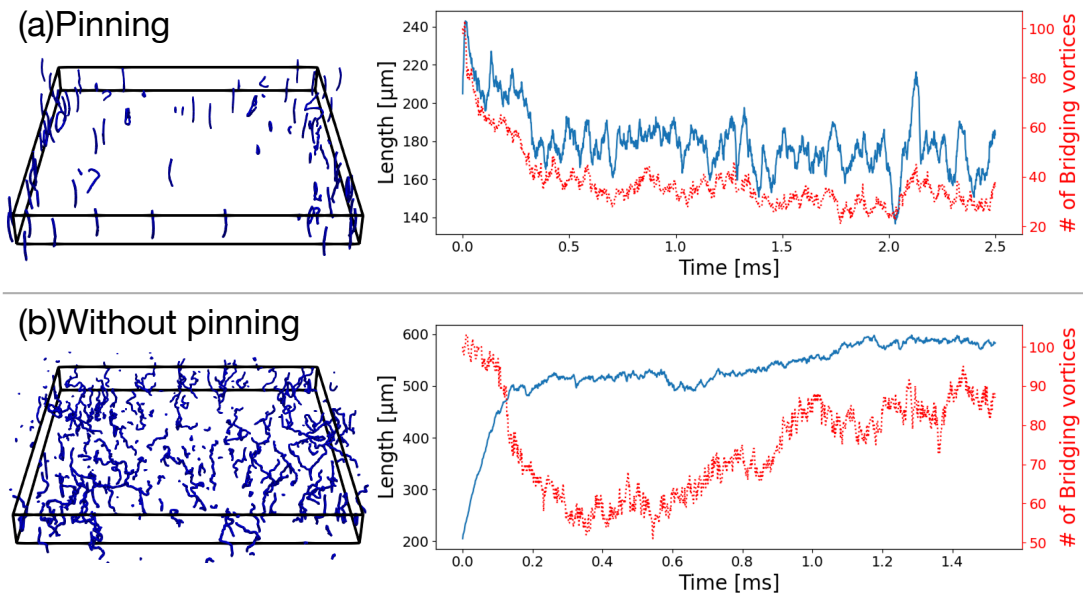


図 2.20: (a) ピニングがある場合と (b) ない場合の量子渦のダイナミクスと渦長の比較 [82]。ピニングは臨界角モデルで記述されている。

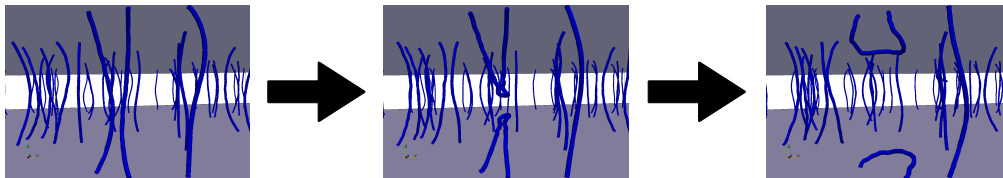
き、速度差の影響で互いに近づく。再結合で現れた半渦輪は自己誘導速度によって傾き、RSID によって徐々に縮んでいき、最終的には消滅する。(ii) 線渦-渦輪の再結合では、注入された渦輪と V 内部の線渦が再結合する。再結合の結果、渦は乱れた形 (キंक状の構造を持つ [83]) の渦輪と線渦となる。線渦の乱れは、線渦上を伝播して RSID によって散逸される。稀に、大きく乱れた線渦は自らと再結合し、渦輪を放出することもある。線渦との再結合によって乱れた渦輪や大きく乱れた線渦から放出された渦輪は、一般的に壁に衝突し、再結合する。そして、先と同様に壁に対して傾き、散逸されていく。

半球型ピニングサイトモデルによる散逸機構の検証

我々は、さらに臨界角モデルで見られた散逸機構を検証すべく、半球型ピニングサイトモデルで図 2.22 のような系をシミュレーションした¹²。ここでは、固体境界に 4 つずつのピニングサイトを設置し、初期条件として、ピニングされた反平行な 2 本の直線渦を用意した。上部の境界は変わらず振動する。この時、ピニングサイトが動くと同時に、量子渦はピニングされたまま逆方向に回転する。回転した渦は上部と下部両方で互いに再結合し、ピニングされた半渦輪 2 つと 1 つの渦輪になる。図 2.22 に示されているように、ピニングされた渦輪は、近接したピニングサイトと再び再結合を起こし、より小さい渦へと分裂していく。臨界角モデルで見られる散逸はこのようなことが起こっていると考えられる。分裂して小さくなった渦は境界上を伝播し、再びピニング、分裂を繰り返すことで散逸されていく。

¹²このシミュレーションは厳密には境界条件が満たされていない (染み込みや湧き出しが少し起こる)。半球型ピニングサイトモデルが妥当であるためには、ピニングサイト間距離 l に対して、ピニングサイト半径 a は $a \ll l$ を満たさなければいけない。しかしながら、一連のシミュレーションは定性的には正しいと考えている。

(i) Line-line reconnection



(ii) Line-ring reconnection

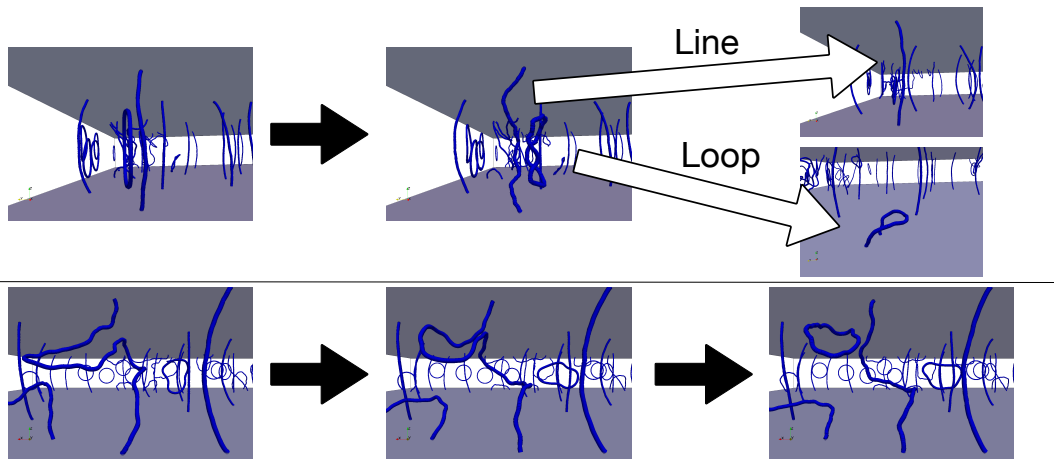


図 2.21: 臨界角モデルで記述される複数渦のダイナミクスにおける散逸を示したスナップショット [82]。(i) は反平行な線渦のペアの再結合を示している。この時、再結合と主に渦は、境界に付着した2つの半円状の渦になる。半円状の渦は最終的に RSID によって散逸される。(ii) の上部は注入された渦輪とピンングされた線渦の衝突を表している。再結合により、双方にキック形状や乱れが生まれる。乱された渦輪は壁に衝突することで半円状の渦になり散逸される。また、線渦に現れたキックも同様に RSID にて散逸される。(ii) の下部では、線渦に同時多発的に渦輪が衝突した時に線渦が大きく乱れた様子を表している。ここでは、線渦が自らと再結合し、渦輪を放出する。その渦輪は最終的に壁に衝突あるいは系の外部に飛ぶことで散逸される。

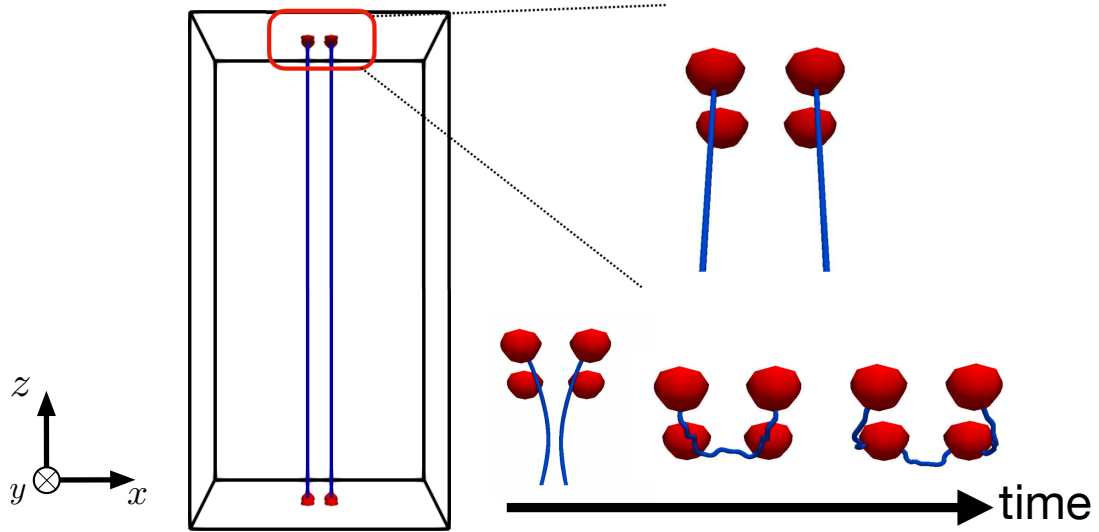


図 2.22: 半球型ピンングサイトモデルで記述される複数渦のダイナミクス。各境界に4つずつピンングサイトが設置してあり、そのうちの2つずつに直線の渦がピンングされている。上面は振動させられる [82]。反平行な渦は再結合し、2つのピンングされた半渦輪と1つの渦輪へと分かれる。反渦輪は他のピンングサイトと再び再結合を起こし、より小さい渦へと分裂していく。この過程で境界上の渦が散逸されると考えられる。

2.6 渦からプレートにかかる力

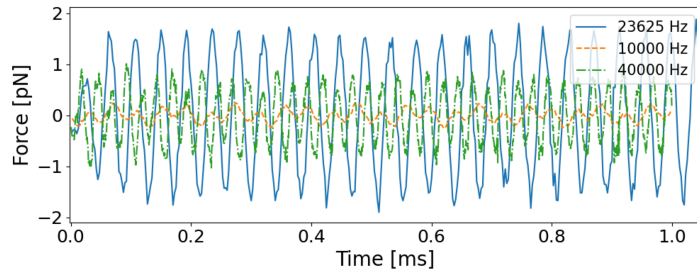
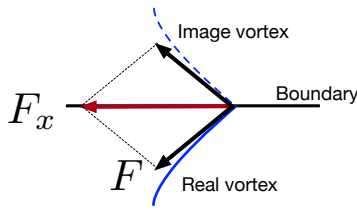
本研究の目的は、Florida 大学の Barquist らによって行われた実験の描像を調べることであった。先ほどまでの解析で、ピンングされた量子渦の Kelvin 波モードとプレートの振動の共振で渦がよく引き伸ばされ、エネルギーが効率よく輸送されることがわかった。実際の実験系では、偶然にも $n = 1$ の場合の Kelvin 波モードとプレートの共振振動数が一致しているため、この描像は正しいと思われる。この章では、渦によって境界に働く張力を計算してより深く、実験結果の考察を行っていく。

張力は式 (1.11) に示された渦の単位あたりのエネルギーと等価である。ここで長さスケール R には境界の間隔 $L = 2 \mu\text{m}$ を用いている。すると、渦一本からかかる張力はおおよそ $\epsilon = 1.12 \text{ pN}$ である。我々は減衰を調べるために、渦が及ぼす力の x 成分 (振動方向) F_x を計算する。臨界角モデルでは、壁に付着している点から隣接点までの方向の単位ベクトル、半球型ピンングサイトモデルでは、ピンングサイトの中心から渦が付着する表面の点までの方向の単位ベクトル、それぞれの x 成分を ϵ に掛けることで計算する。また、それぞれの力には鏡像渦の寄与も考慮に入れている。

2.6.1 単一渦の場合の力

図 2.23 はそれぞれのモデルにおける F_x の時間発展を表している。臨界角モデル (図 2.23(a)) では、渦は境界の振動とともに徐々に引き伸ばされていき、統計的定常状態に達する。 F_x も同様で、一定の振幅で振動するようになる。この振動は渦が自己誘導速度により回転することによるものである。臨界角モデルにおいて境界と渦の角度は θ_c 以上になるので、定常状態での振幅は最大でも $F_x \approx 2\epsilon \cos \theta_c$ になる。一方で、半球型ピンング

(a) Critical angle model



(b) Hemispherical pinning site model

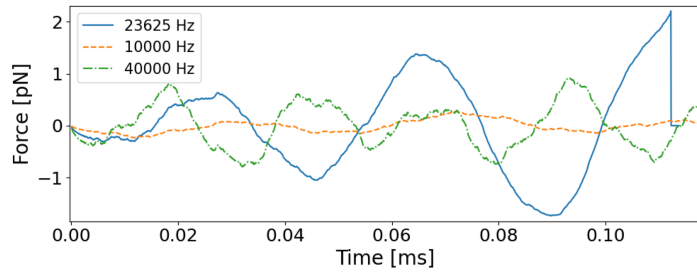
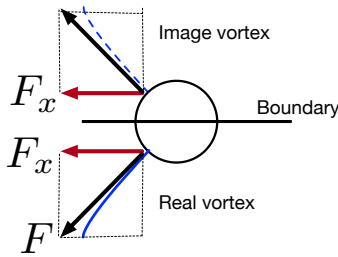


図 2.23: 境界の振動方向に張力により及ぼされる力 [82]。右側の図は単一渦の場合のもので、(a) は臨界角モデル、(b) は半球型ピンングサイトモデルを表している。これらの図の時間スケールが違うことには注意が必要である。左側は境界にかかる力の概念図で、実在する渦と鏡像渦の両方を考慮に入れている。

サイトモデル (図 2.23(b)) では、先と同様に渦は伸長されるが、最終的に、ピンングが外れる。この時、 F_x はゼロになる。ここで、図 2.23(b) は図 2.23(a) と時間スケールが大きく違うことには注意が必要である。

どちらのモデルにおいても F_x は境界の振動数 f に強く依存する。振動数が Kelvin 波の共振周波数に近い時、渦は強く引き伸ばされ、境界との角度が小さくなった結果 F_x が大きくなる。しかしながら、振動数がどの Kelvin 波共振周波数にも近くない時、渦はほとんど伸長されず、力も小さくなる。

振動数が Kelvin 波の共振周波数から遠い場合でも系には、共振周波数に近い固有の Kelvin 波モードが選択されて現れる。図 2.24 は図 2.23(a) を Fourier 変換したものである。振動数が共振周波数に近い値の時 (23625 Hz) は、振動周波数付近に 1 つの大きいピークが立っている。一方、共振周波数に遠い値の時 (10000 Hz や 40000 Hz)、ピークは該当の振動数以外にも、共振周波数付近に存在する。これらの場合、境界の振動数によるモードと系の大きさからくるモードが混ざり合っている。

MEMS 共振器の振動減衰の起源

超流動ヘリウム 4 中の MEMS 共振器は真空中よりも強い減衰を受けるのであった。また、その減衰はチューニングフォークによって渦を増やした時により強くなる。よって、量子渦が振動の減衰に影響している考えられる。振動的な振る舞いを見せる F_x は $F_x = F_1 \sin(2\pi ft) + F_2 \cos(2\pi ft)$ という形の F_1 と F_2 というフィッティングパラメータを持つ式でフィッティングできる。ここで、境界の振動の変位は $\sin(2\pi ft)$ に比例するので、 F_1 は振動の加速度に、 F_2 は速度に比例する力に対応している。つまり、 F_2 の成分が減衰項

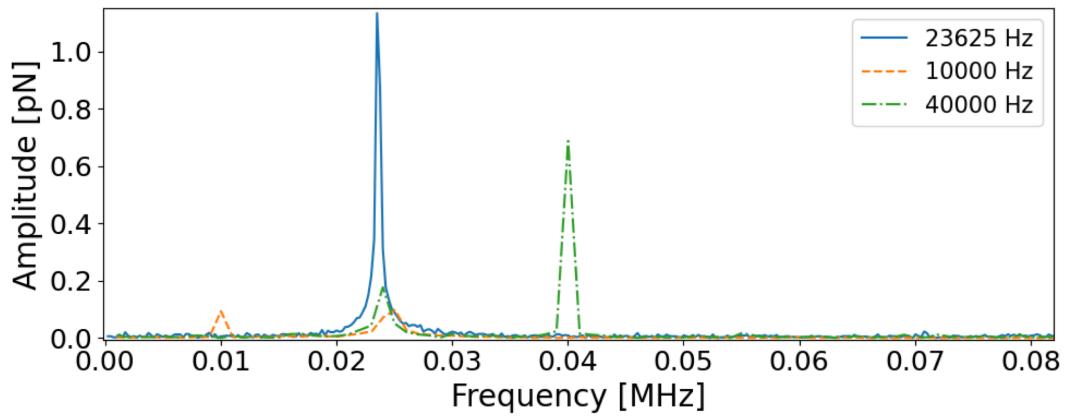


図 2.24: 図 2.23(a) に示された力のフーリエ変換 [82]。



図 2.25: 渦の伸長の模式図 [82]。

と関係している。これに基づいて、臨界角モデルで記述された単一渦の場合 ($f = f_1$) についてフィッティングすると $F_1 = -0.63$ pN、 $F_2 = -1.44$ pN というパラメータになり、 $F_2 < 0$ であることから、確かに渦が減衰を強めていることがわかる。また、これを速度の振幅 $v_0 = 2\pi f A$ で割ることで渦一本あたりの減衰項の係数の変化量を見積もることができて、変化量は 9.7×10^{-11} kg/s となる。

Barquist らは減衰項の係数の変化量を MEMS で散逸されるエネルギーと渦が MEMS から奪うエネルギーから見積もった [72]¹³。MEMS 共振器で散逸されるエネルギーは単位時間あたり $m\Gamma v_0^2$ である。渦が MEMS から奪うエネルギーは、 $2\epsilon f \delta l$ と見積もられ、 δl はプレートが中心から端へ動く際の 1/4 周期で引き伸ばされる渦長である。この時、渦が MEMS から奪ったエネルギーが全て渦の伸長に使われているとすると

$$\Gamma = \frac{2\epsilon f}{v_0^2} \delta l \quad (2.8)$$

となる。彼らはこの図 2.25(a) のように渦が引き伸ばされていると仮定し、 $\delta l = \sqrt{A^2 + L^2} - L \approx A^2/2L$ と見積もった。すると $\Gamma = 5.4 \times 10^{-13}$ kg/s 程度になる。これは先ほどシミュレーションから得られた値と比べると 2 桁ほど小さい。ここで使われた $\delta l \approx A^2/2L$ は今回のシミュレーション結果と比べると小さく、実際は直線状ではなく、2.25(b) のように

¹³厳密には [72] の supplemental material

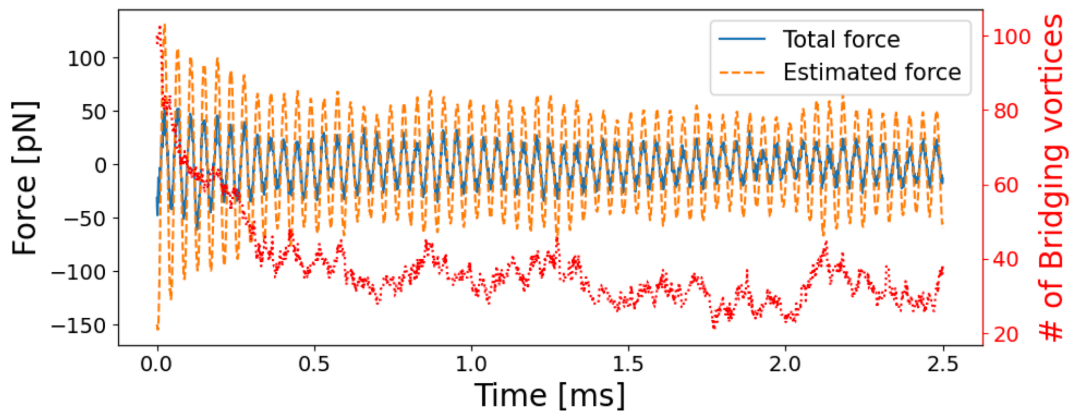


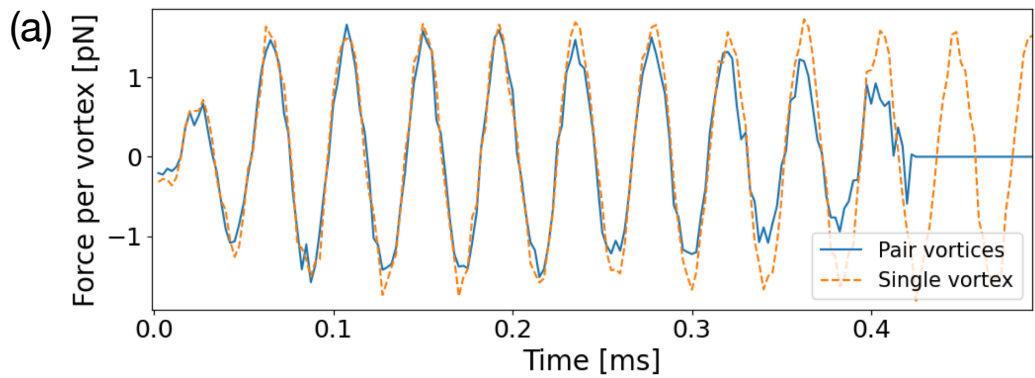
図 2.26: 臨界角モデルで記述された複数渦の場合の F_x の時間発展と境界を橋渡しする渦の本数の時間発展 [82]。 “Estimated force” は 2.23(a) の $f = f_1$ のデータをフィッティングしたものに渦の本数をかけたものである。

屈曲した形で渦は引き伸ばされる。また、この一連の理論は鏡像渦の影響などは考慮していない。これらを考慮しても、1桁ほどしか大きくなり、この差の原因は完全にはわかっていない。

2.6.2 複数渦の場合の力

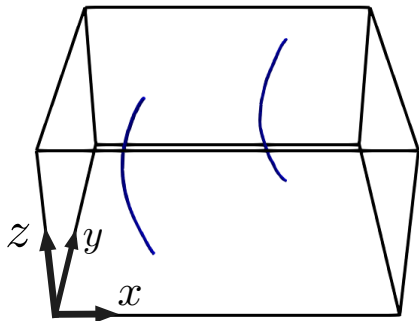
臨界角モデルで記述した複数渦の場合の力を図 2.26 に示す。この図には同時に、オレンジ色の破線で示された見積もり (Estimated force) も示している。この見積もりは、先ほどの、単一渦の場合での力のフィッティング結果に橋渡ししている渦の本数をかけたものである。渦がお互いに相互作用せずにそれぞれが単一渦の場合と同様に回転しているだけならば、この見積もりとシミュレーションから得られた結果 (Total force) は一致するはずである。しかしながら、これらが一致せず、見積もり (Estimated force) の方が大きくなっている。

これらの違いは渦の相互作用の有無によるものかもしれない。検証のために簡単な系でシミュレーションを行った。初期条件として反平行な渦のペアを $(x, y) = (0.9 \mu\text{m}, 0.9 \mu\text{m})$ 及び $(-0.9 \mu\text{m}, -0.9 \mu\text{m})$ に設置する。これらの渦は臨界角モデルで記述される粗い固体境界にピンングされており、上部は振動させられる。図 2.27(a) はこの計算で得られる渦一本あたりの力と単一渦の場合の力がそれぞれ示されている。また、渦のダイナミクスのスナップショットは図 2.27(b) に示されている。初期状態から、振動をかけ始めると渦は互いにほぼ独立に回転し始める。この時は渦は互いに遠くあまり相互作用をしていない。早い時間帯では、渦のペアの場合と単一渦の場合では力にそれほど大きい違いは見受けられない。しかし、渦の振幅が大きくなっていき、局所的に渦同士が近い部分が発生すると相互作用が優位になる。その結果、渦のスムーズな回転が阻害される。その結果、力は単一渦の場合と比べて小さくなる。複数渦の場合では、このようなメカニズムが局所的に複数起きており、その結果渦による力が小さくなっていると考えられる。

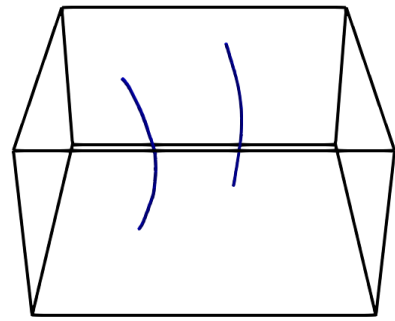


(b) Time: 0.1500 (ms)

Time: 0.3000 (ms)



Time: 0.4000 (ms)



Time: 0.4170 (ms)

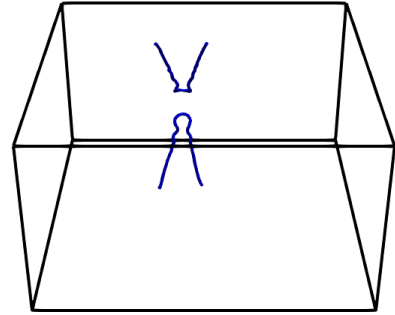
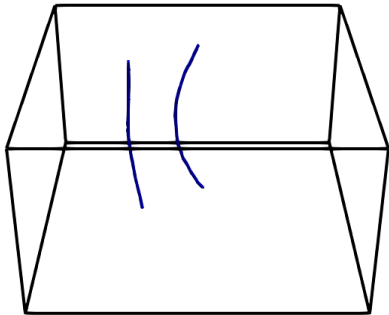


図 2.27: (a) 臨界角モデルで記述された反平行な渦の場合 (Pair vortices) と単一渦の場合 (Single vortex) における力の比較 [82]。反平行な渦の場合 (Pair vortices) の力は渦の本数で平均してある。(b) は反平行な渦の場合の時間発展を示していて、仮想的な直方体は x 、 y 方向に $3.6 \mu\text{m}$ 、 z 方向に $2.0 \mu\text{m}$ であり、中心が原点である。これらの渦は、最初はお互いほぼ独立に自己誘導速度で回転しているが、渦が近づいてくると相互作用が優位になる、自己誘導速度による回転が阻害されてくる。最終的には渦は再結合して、RSID で散逸される

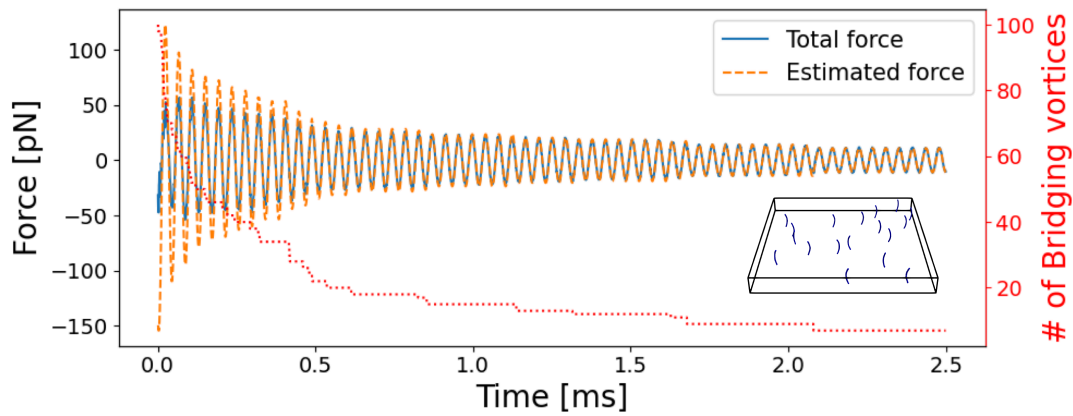


図 2.28: 臨界角モデルで記述された複数渦の場合の注入を切った時の力と渦の本数の時間発展 [82]。差し込まれたスナップショットは時刻 0.6455 ms のものである。

力のヒステリシスの起源

力のヒステリシスの起源を複数渦の場合のシミュレーションから考察する。力のヒステリシスはチューニングフォークが駆動されていない時、すなわち、外部からの渦注入がない時に起こる。これまでの議論にもあったように、ピンングの強さは量子渦が多いほど強く、ヒステリシスが見られる系では何らかの原因で渦の数が減少していると考えられる。そこで、我々は外部からの渦の注入を切り、図 2.17 と同様のシミュレーションを行った。そのシミュレーションで得られた力をプロットしたのが、図 2.28 である。この系では渦は単調に減少していく。また、注入がある場合とは異なり、ある程度時間が経過したのち、シミュレーションから得られた力と見積もりは一致する。これは、渦の数が減少し、渦の数密度が小さくなると、渦は相互作用せずにそれぞれ独立に回転するためである。

注入がある時 (チューニングフォークが振動している時) は、渦注入と散逸が釣り合う統計的定常状態に落ち着くため、ヒステリシスが観測される理由はない。一方で、注入がない時 (チューニングフォークが振動していない時) は、渦は振動とともに単調に減少するだけなので、振動し始めた時間では、力が大きく、十分振動した後では、力が小さくなるヒステリシスが観測される。

位相ノイズ

Barquist らによると、図 2.4 に示された位相ノイズのパワースペクトル密度 $S_\phi(f)$ は、 $S_\phi(f) \sim f^{-1/2}$ となる¹⁴。このスペクトルと渦の個数のパワースペクトル密度 $S_N(f)$ の関係は $S_\phi(f) = (d\phi/dN)^2 S_N(f)$ となる。 $(d\phi/dN)$ が振動数によらないとすると、 $S_\phi(f)$ と $S_N(f)$ は同様の振動数スペクトラムを示す。図 2.20(a) に示された渦の個数の時間発展のパワースペクトラムを取ると $S_N(f) \sim f^{-1.06}$ 程度になる。Weriner-Kinchin 定理¹⁵より、 $S_N(f) \sim f^{-1}$ の時、渦の個数の自己相関関数 $\langle N(t)N(t-\tau) \rangle \sim \text{const.}$ というホワイトノイズ的な振る舞いを示している。これは、渦の個数のパターンが時間相関なくランダムになっていることを表している。一方で、実験で観測された $S_\phi(f) \sim f^{-1/2}$ では、 $\langle N(t)N(t-\tau) \rangle \sim \tau^{-1/2}$ となる [72]。これは渦の放出が系のなかの渦の本数に依存してい

¹⁴ この f は信号を時間的に Fourier 変換するときの振動数。

¹⁵ パワースペクトル密度が自己相関関数の Fourier 変換であることを示す定理。

ることに起因していると考えられる。実験と我々のシミュレーションの違いは、系の大きさによる渦の本数(今回のシミュレーションでは30本程度と少ない)や渦密度に起因すると考えているが、明確な原因はわからず、今後の課題である。

2.7 結論と展望

本研究では、超流動ヘリウム4の量子渦のピンングに関して、臨界角モデルと半球型ピンングサイトモデルという2つのモデルを導入して議論した(2.3章)。臨界角モデルは現象論的に固体境界条件に量子渦の端を強制的に固定し、ダイナミクスを記述した。このモデルでは非常に粗い構造を持つ固体境界により温度0 Kにおいても散逸を包含していた。一方で、半球型ピンングサイトモデルは臨界角モデルよりも厳密に解くことができ、ピンング-ディピンングも記述できた。このモデルは単純な境界の凸構造しか記述できないため、散逸は内包しないが、粗い境界の突起の間に存在する渦など、細かい情報が記述できる。

これらのモデルを用いて、実験系をモデル化し、数値シミュレーションを行った(2.4章)。2.5章で渦のダイナミクスを議論した。2つの平行な固体境界に挟まれている渦は、境界の振動とともに、伸長される。十分粗い境界(臨界角モデル)では、伸長された渦は壁と再結合することで散逸され、統計的定常状態に落ち着く。半球型ピンングサイトモデルでは、伸長された渦はディピンングすることがわかった。また、この伸長は、境界の振動数に強く依存し、Kelvin波モードに対応する振動数の時はよく伸長され、Kelvin波モードから遠い振動数の時はあまり伸長されなかった。渦が複数存在する時には、渦が互いに相互作用することで、単一の場合とは異なるダイナミクスが見られた。ピンングが臨界角モデルで記述される時、外部から渦の注入がある場合でも、乱流は生成されなかった。この時、量子渦同士が再結合することで、散逸されやすい形に変わる様子が観察された。一方でピンングがない時には乱流が生成され、ピンングによって乱流生成が制限される可能性が見えた。

2.6章では、我々は張力に着目することで、境界に働く力を見積もった。これにより、実験での観測事実に肉薄できた。MEMS共振器の減衰に関しては、境界の振動とともに渦が回転運動を起こすことで、特にKelvin波モードに対応する振動数で揺さぶられている時は、運動方向に振動的な力を及ぼすことがわかった。これをフィッティングしてみた結果、渦は境界の運動と反対方向(境界の速度の逆方向)に力を及ぼし、実質的な減衰力を生んでいることがわかった。また、力のヒステリシスを検証するために、我々は渦の注入がある場合とない場合でそれぞれシミュレーションをおこなった。渦の注入がある場合は、乱流こそ発生しないものの、統計的定常状態に落ち着く。一方で渦の注入がない場合は渦が単調に減少していく。その結果、渦の注入がある場合(チューニングフォークが振動している場合)には、注入により統計的定常状態に落ち着くので、力のヒステリシスが観測される理由はなく、渦の注入がない場合(チューニングフォークが振動していない場合)には、速度が増加して減少する過程にも残留渦が減少していくので、ヒステリシスが観測される。

本研究は、量子渦糸モデルの枠組みでピンングをモデル化し、振動する境界が渦に作用する系をシミュレーションで調べてきた。以下では、この研究が抱える課題とその研究指針を示して本章のまとめとする。

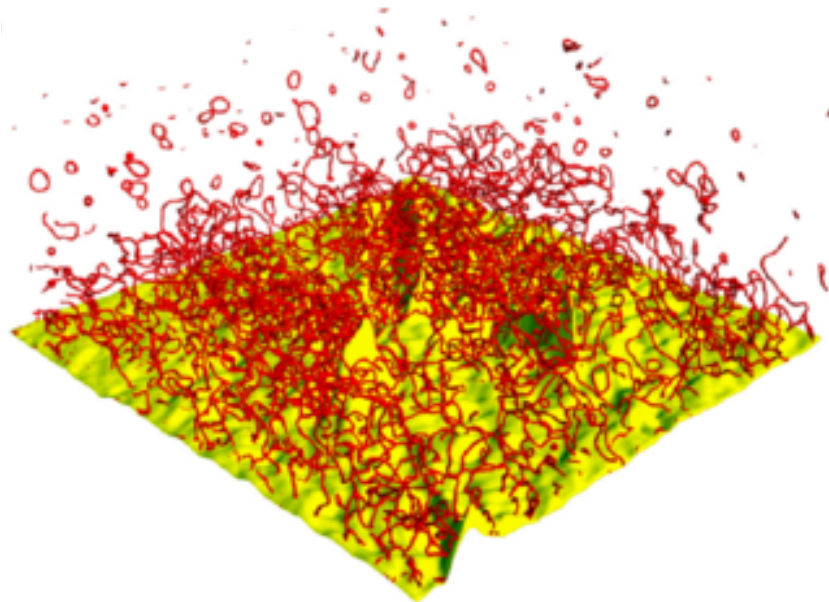


図 2.29: Stagg らが Gross-Pitaevskii モデルを用いて計算した粗い境界上でできる渦層のスナップショット [84]。黄色い部分は十分大きいポテンシャルを表し、波動関数がほとんど侵入しないようになっている。赤い線が量子渦を表している。境界面で層を形成している様子が見られる。

境界面に構成される渦層

我々が用いた臨界角モデルでは、十分粗い境界の突起の 1 つにピンングされた量子渦が、十分傾くことで、別の突起と再結合を起こし、渦が突起間をつなぐ線渦と元よりも短いピンングされた量子渦になる描像を用いた。ここでは、突起間をつなぐ線渦は、非常に小さく、ダイナミクスに大きな影響を及ぼさないとして無視していた。一方で、Stagg らは、Gross-Pitaevskii モデルを用いて、粗い境界をポテンシャルとしてモデル化し、そこに定常な超流動流を流した [84]。その結果、粗い境界中に量子渦が多数生成され、引き伸ばされることで、境界面に量子渦の層を作ることがわかった (図 2.29)。この量子渦層構成のストーリーで力のヒステリシスなどの実験的描像を説明することは難しいと考えているが、有効的な粘性として、減衰に寄与している可能性はある。

Walmsley らによる超流動ヘリウム 4 の量子乱流の減衰から評価された有効動粘性は $\nu = 0.1\kappa$ である [85]。プレートが速度 $u_0 \cos(\omega t)$ で振動している時、単位面積あたりの粘性から受ける力 σ は

$$\sigma = -\sqrt{\omega\nu\rho^2}u_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) \quad (2.9)$$

と表せる [86]。ここで、 ρ は流体の質量密度である。今、 $\rho = \rho_s$ として計算すると、 $\sqrt{\omega\nu\rho_s^2}u_0 = 2.93 \times 10^{-2} \text{ N/m}^2$ となる。今、プレートの大きさは $125 \times 125 \mu\text{m}^2$ なので、プレートにはおよそ 457 pN ほどの力がかかることになる。この古典流体の議論が、今回の系に対応しているかは不明だが、今回無視した小さい渦について研究する価値はあると考えている。

境界と渦の相互作用

本研究では、境界は単調に振動するだけで、渦から受ける作用は全く考慮されていない。実験の描像を完全に再現するためには相互作用を記述しなければならない。最もシン

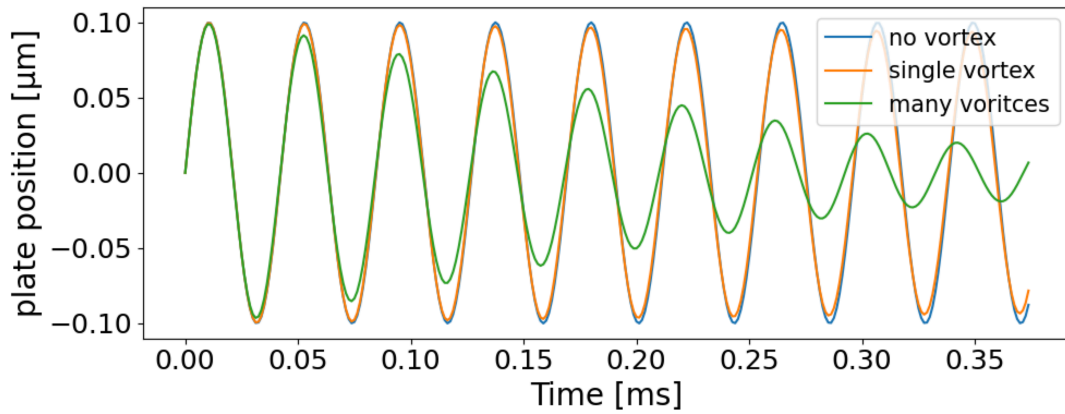


図 2.30: 渦と境界の相互作用を運動方程式を解くことで表した時の、境界の変位の時間発展。“no vortex” は渦がない時、“single vortex” は渦が 1 本の時、“multiple vortex” は渦が 100 本ある時を表している。

シンプルな実装方法は、プレートの運動を Newton の運動方程式で記述することである。テストケースとして、

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega x + F_{vor}/m \quad (2.10)$$

という運動方程式と仮定してみる。ここで、 x 、 m はプレートの変位と質量、 F_{vor} は渦による力である。 F_{vor} は 2.6 章に示されている方法に倣う。ピンングされた渦の端は速度 dx/dt にしたがって動く。初期状態として $x = 0$ 、 $dx/dt = 2\pi f_1 A$ を与えて、3 つの条件で計算したものが、図 2.30 である。渦がない時 (no vortex)、当然ながら、プレートは減衰も励起もせず、単振動する。一方で、単一渦の時 (single vortex) 及び複数渦の時 (multiple vortex)、渦の数に対応して、振動が減衰していることが確認できた。また、 F_{vor} は速度に比例する成分以外も持っているため、渦が多い時は振動周波数が変化する。これは、乱流を発生させると共振周波数が変化する実験での観測と矛盾していない。

ピンングモデルの他の系への応用

本研究で用いた臨界角モデルは、他の系への応用が可能であると考えている。応用例として、熱対向流を考える。図 2.31 に境界条件を変えて、流量をほとんど同じにした場合の対向流によって作られる量子乱流を示す。ここで、温度は 1.5 K であり、 x 正の方向に常流動が、負の方向に超流動が流れている。図 2.31(a) は 3 方向周期境界で、(b) は z 方向のみ固体境界、(c) は y, z 方向で固体境界になっている。常流動速度場 \mathbf{v}_n は層流を仮定し、(a) の場合は一様流、(b) の場合は放物線的流れ [87]、(c) の場合は Hagen-Poiseuille 流 [39] としている。超流動速度場 \mathbf{v}_s は、流量 $\int_S \rho_s \mathbf{v}_s + \rho_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ を満たすように一様な流れをかけている。今、固体境界に付着している量子渦は臨界角モデルでピンングされている。この時、固体境界のためか、量子渦密度が (a) から (c) にいくにつれ小さくなっている。

熱対向流の解析には渦密度 \tilde{l} に対する時間微分方程式である Vinen 方程式がよく用いら

れている¹⁶。

$$\frac{d\tilde{l}}{dt} = \chi_1 \alpha v_{ns} \tilde{l}^{3/2} - \chi_2 \frac{\kappa}{2\pi} \tilde{l}^2 \quad (2.11)$$

この式の定常解 ($d\tilde{l}/dt = 0$) は

$$\tilde{l}^{1/2} = \gamma (v_{ns} - v_c) \quad (2.12)$$

$$\gamma = \frac{2\alpha\chi_1}{\chi_2} \quad (2.13)$$

となる。Adachi ら [24] や Yui ら [39] の解析によると $v_c \sim 0.1$ cm/s であった。一方、Martin ら [89] の測定によると、 $v_c \approx 1.0$ cm/s に近い値になっているように見える (図 2.32 の埋め込み図を参照)。また、乱流生成の転移速度¹⁷ も 1.3 cm/s を超えており、Adachi らや Yui らの場合よりも大きい。

ピンングが効いている場合、壁付近で、超流動・常流動流れから渦へのエネルギー輸送が阻害されるために、転移温度や v_c が上がる可能性がある。そこで、図 2.31(c) と同様な正方管系で、流速を変えてシミュレーションを行った。ここで管は一辺 0.1 cm で、温度は 1.5 K である。相対速度の平均と $\tilde{l}^{1/2}$ の平均をプロットしたものが図 2.32 である¹⁸。ここで、計算時間中に渦が完全に消滅したものは密度 0 として表示している。相対速度が大きい 3 点を式 (2.12) で γ と v_c をフィッティングパラメータとして、フィッティングしたところ、 $\gamma = 134.8$ s/cm²、 $v_c = 1.59$ cm/s という結果を得た。 γ の値は Yui らによる数値計算と同様のオーダーである [39]。一方、 v_c や転移温度 (2 cm/s 程度) は先行研究と比べ大きくなった。この値は、実験と比べても大きくなってしまふ。また、今回のシミュレーションでデータが得られている v_{ns} の範囲は、Stagg らの実験ではすでに v_{ns} と $\tilde{l}^{1/2}$ の直線関係から外れてしまっている。今回用いた臨界角モデルは凹凸の間隔が分解能程度の非常に粗い境界を仮定したモデルであるため、境界の荒さを落とし調整したモデルを導入することで実験とコンシステントな結果が得られる可能性がある。

¹⁶これは一様な量子乱流を仮定しているので必ずしも正確ではない。 v_{ns} といった形の相対速度に依存するような v_s と v_n の対称性がある保証もない [88]。

¹⁷実際にはこの転移速度は 2 つあり、常流動層流・超流動乱流の T1 領域、常流動及び超流動乱流の T2 領域が考えられている。これらは相対速度を上げるとともに層流領域、T1 領域、T2 領域といった順に転移していく。今回は層流領域から T1 領域への転移を考えている。

¹⁸Poiseuille 流が流れる対向流では渦長は時間的に大きく振動する。また、今回の結果は計算時間があまり長くないため、大きく計算時間を取ると平均渦密度は変わるかもしれないが、定性的には近いものが見られると考えている。

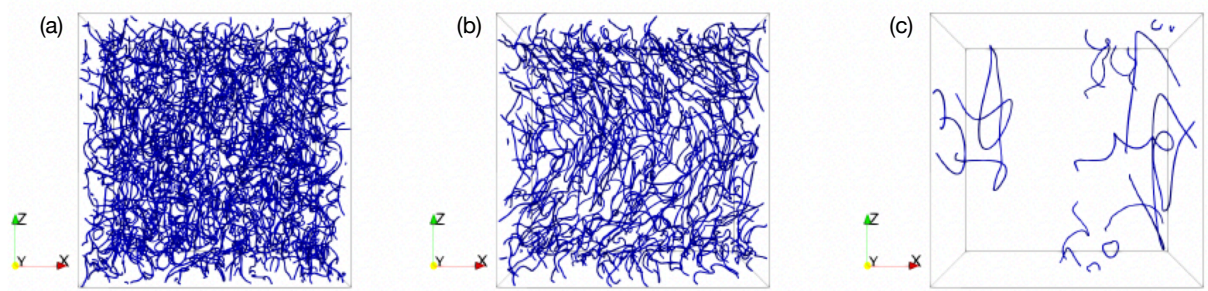


図 2.31: 対向流によって作られた量子乱流のスナップショット。(a)3方向周期境界、(b) z 方向固体境界、(c) y, z 方向固体境界で、それぞれの流量はほぼ同じになるように設定している。固体境界表面の渦は臨界角モデルによってピンングが記述されている。

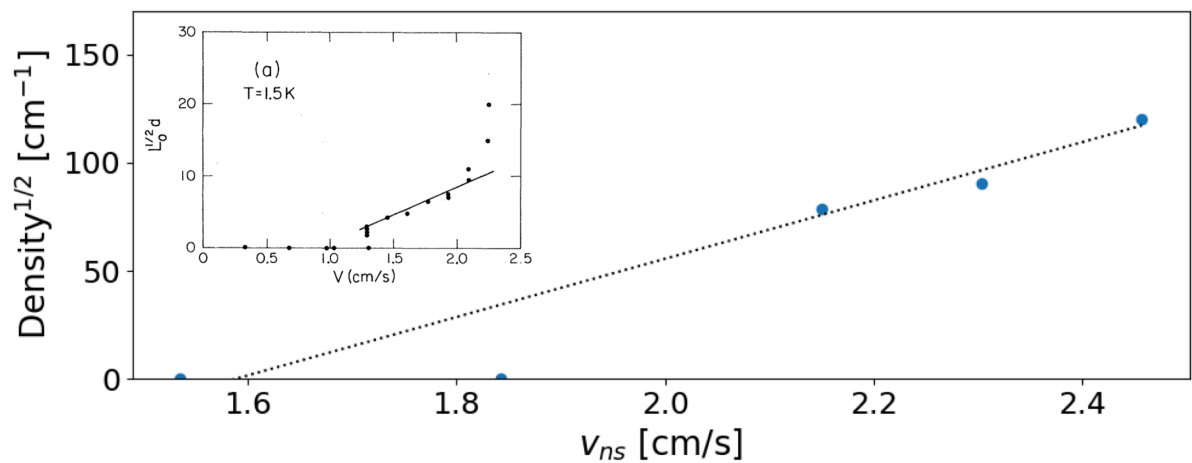


図 2.32: $\tilde{l}^{1/2}$ と平均相対速度の関係。計算時間中に渦が完全に消滅したものは $\tilde{l}^{1/2} = 0$ として計算している。 $\tilde{l}^{1/2}$ は時間平均をとっている。黒点線は、式 (2.12) で平均相対速度が高い3点をフィッティングした結果である。埋め込まれた図は、Martin らによる実験で測定されたものであり、 $\tilde{l}^{1/2}$ は管の長さで無次元化されている [89]。

第3章 帯電粒子をトラップした量子渦のダイナミクス

3.1 序章

大阪大学の Minowa らのグループは近年、超流動ヘリウム 4 中の量子渦をシリコン微粒子を用いて可視化することに成功した。図 3.1A は実験系を表している。実験では一辺 3 cm のセルにシリコン結晶を設置し、超流動ヘリウム 4 を満たした。彼らはシリコン結晶に 1 mJ ほどのエネルギーを持ったパルスレーザーを照射して粉碎し、系にシリコン微粒子を拡散させた。この技術をレーザーアブレーションと呼ぶ。系に拡散した粒子はシート状のレーザーを照射することで可視化される。図 3.1B に、観測結果の一部が示されている。粒子が線のように並び、量子渦のようなものが可視化されていることがわかる。彼らは再結合後の量子渦の距離 $d(t)$ を

$$d(t) = A\sqrt{\kappa(t-t_0)}(1+c(t-t_0)) \quad (3.1)$$

という式でフィッティングした。式 (1.17) との違いは係数 c がついた補正項があることである。実験では $c \approx 0 \text{ s}^{-1}$ であり、 A は 2.5 から 4.5 程度の値が得られた [14]。我々はこれまでに、図 3.2A-D に示されているような系で量子渦の再結合のシミュレーションを行い、2つの量子渦の最近接点から量子渦同士の距離を評価することで式 (3.1) の A や c が実験と大きく離れていないことを確認した (図 3.2E)[14]。Minowa らのグループは他にも光トラップ技術を用いて超流動ヘリウム 4 中の金属微粒子をトラップすることに成功しており [90]、可視化された量子渦をトラップする試みも行っている。

レーザーアブレーションによって生成された金属微粒子の特徴として、以下が挙げられる。

- 密度や反射率がヘリウム 4 に比べて非常に高い
- 粒子が非常に小さい (平均半径が 45 nm ほどで、7 割ほどの粒子が 100 nm 以下。よく使われる水素粒子は $\sim 1 \mu\text{m}$)
- 帯電している場合がある

Minowa らは粒子の帯電に着目し、振動する電場をかけることで、量子渦にトラップされた粒子を駆動し、Kelvin 波を励起することを試みた [91]。図 3.3 にその一例を示す。(a)(b) では、周期的に振動する一様な電場が上下にかかっている。ここでは、量子渦にトラップされていると思われる粒子のラインのうち、一部の帯電している粒子が電場で駆動されることにより、運動している。これらは一見ヘリカルな構造を持っているように見え、Kelvin 波が励起できていると考えて良い。その後、(c) では、電場を止めた。すると、観測できている範囲では、ヘリカルな構造は消滅し、緩やかな線状の粒子のラインが見えた。

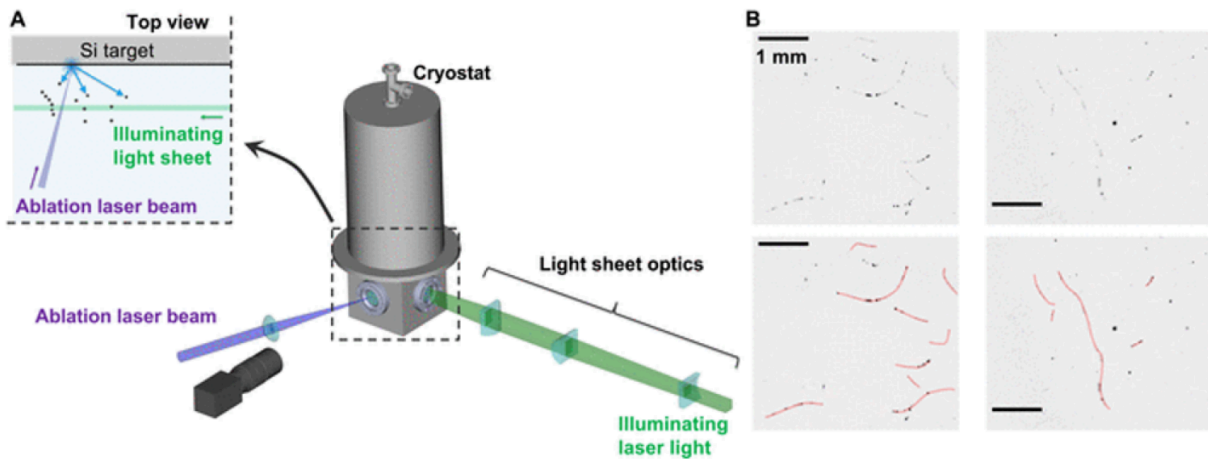


図 3.1: (A)Minowa らが用いた実験系の模式図 [14]。アブレーションレーザーがシリコンの試料に照射され粒子が放出される。その粒子は照射されたシート状の光を散乱することで可視化され、その様子がハイスピードカメラで捉えられている。(B)はそのスナップショットで、赤い線で示されているようにライン状に粒子が並んでいるのが見られている。

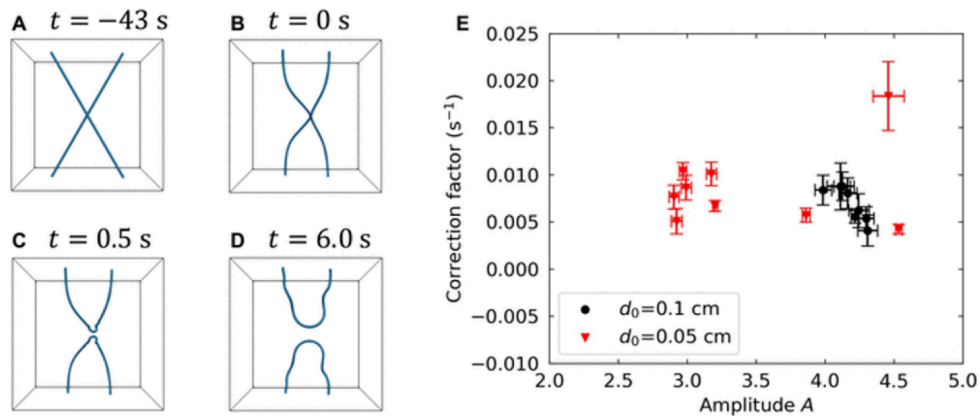


図 3.2: (A)-(D) 我々のグループによる量子渦糸の再結合のシミュレーションのスナップショット [14]。立方体は一辺 1 cm であり、上部と下部は固体境界条件が適応されており、量子渦糸が付着している。(E) は式 (3.1) で再結合後の渦間距離をフィッティングした際の、パラメータ A と c の分布を表している。凡例は渦の初期距離を表しており、それぞれの点は渦の初期相対角度を 0 から $\pi/2$ の間で変えてシミュレーションを行い、得たものである。

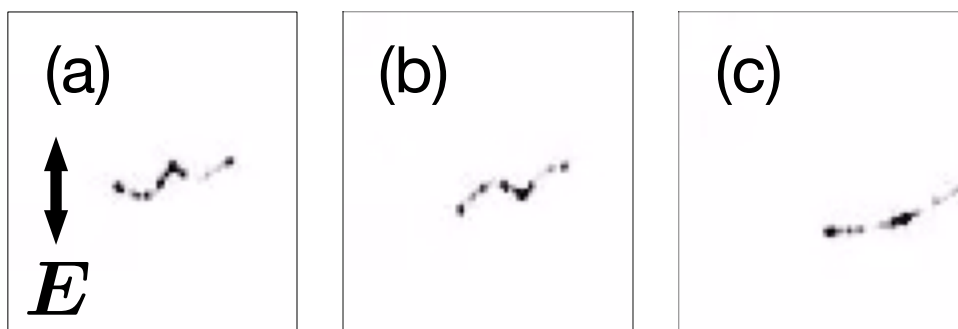


図 3.3: Minowa らの実験で見られた粒子のスナップショット [91]。(a)(b) 振動電場がかかっており、粒子はヘリカルな構造を持っているように見える。(c) 振動電場を切ると、粒子は一列の線状に再び並ぶ。

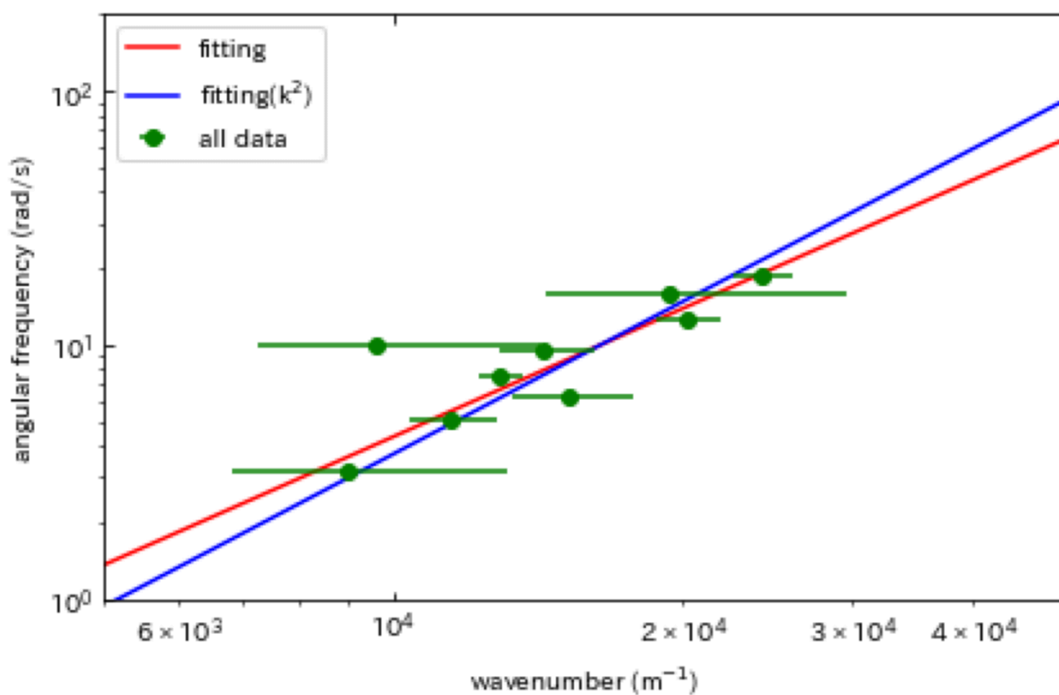


図 3.4: Minowa らの実験で、振動電場の振動数を変えて、粒子を駆動し、それぞれの波数を計算し、波数と振動数の関係を両対数グラフにプロットしたもの [91]。

彼らは、振動電場をかけることで、Kelvin 波のような構造ができることを確認した後、Kelvin 波の分散関係を調べた。振動電場の角振動数 ω を変えて、数通りの実験を行い、波の形状から、おおよその波数が計算される。それを両対数プロットしたものが図 3.4 である。緑の点がデータ点、赤線が $\omega = c_1 \kappa k^{c_2}$ という、2つのフィッティングパラメータ c_1 、 c_2 を持つ関数でフィッティングされたもので、青線が $\omega = c_1 \kappa k^2$ という1つのパラメータを持つ関数でフィッティングされたものである。 $\omega = c_1 \kappa k^{c_2}$ のフィッティング結果は $c_1 = 8.21$ 、 $c_2 = 1.68 + 0.25, 1.68 - 0.19$ と式 (1.49) による予言とあまり大きくは外れていない。

本研究では、量子渦にトラップされた帯電粒子を取り扱うモデルを提案するとともに、帯電粒子に電場をかけて駆動することによる Kelvin 波励起とその有限サイズ効果、粒子軌道などについて議論する。

3.2 モデル化

3.2.1 粒子ダイナミクスのモデル化

Mineda らは量子渦にトラップされた(帯電していない)粒子のダイナミクスを Newton の運動方程式を直接解くことで記述した [92]。粒子にはストークス力 \mathbf{F}_S 、張力 \mathbf{F}_T 、Magnus 力 \mathbf{F}_M 、相互摩擦 \mathbf{F}_D がかかるとして、それぞれ

$$\mathbf{F}_S = 6\pi R\eta(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_p) \quad (3.2)$$

$$\mathbf{F}_T = T_0[\mathbf{s}'(\xi + \Delta\xi/2) - \mathbf{s}'(\xi - \Delta\xi/2)] \quad (3.3)$$

$$\mathbf{F}_M = \rho_s \kappa \mathbf{s}' \times (\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_{s,nl}) \Delta\xi \quad (3.4)$$

$$\mathbf{F}_D = [\gamma_0 \mathbf{s}' \times \mathbf{s}' \times (\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_n) - \gamma'_0 \mathbf{s}' \times (\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_n)] \Delta\xi \quad (3.5)$$

$$T_0 = \frac{\rho_s \kappa^2}{4\pi} \ln \left[\frac{2\sqrt{l_+ l_-}}{\sqrt{ea}} \right] = \rho_s \kappa \beta_{\text{ind}} \quad (3.6)$$

となる [13, 16, 92]¹。ここで \mathbf{v}_p が粒子の速度、 $\mathbf{v}_{s,nl}$ は非局所項による超流動速度である。帯電粒子の場合、これに電場によって帯電粒子が受ける力 $\mathbf{F}_E = q\mathbf{E}$ を加えて

$$m \frac{d\mathbf{v}_p}{dt} = \mathbf{F}_S + \mathbf{F}_T + \mathbf{F}_M + \mathbf{F}_D + \mathbf{F}_E \quad (3.7)$$

となる。この式は厳密であると考えられるが、実際数値的に解く上では少し困難が生じる。それは粒子の半径が平均 43.5 nm と非常に小さいため、質量も非常に軽く、計算を安定させることが困難であることである。そこで、各項のオーダーを見積る。実験で見られている粒子の振幅 300 μm 程度と振動数 0.8 Hz を用いると、 $m d\mathbf{v}_p/dt \sim 10^{-21}$ N、 $\mathbf{F}_S \sim 10^{-15}$ N、 $T_0 \sim 10^{-12}$ N、 $\mathbf{F}_M \sim \mathbf{F}_D \sim 10^{-15}$ N、 $\mathbf{F}_E \sim 10^{-15}$ N ($q = -e$ の素電荷の場合) となる。これより、慣性項が非常に小さく、無視しても問題ない²。つまり、方程

¹張力 \mathbf{F}_T は本質的には自己誘導速度と同じであり、展開することで、同じ形にすることができる。しかし、従来通り \mathbf{s}'' を用いた形をとると、粒子が作るキック状の構造に対応できない。仮に \mathbf{s}'' を用いると、ダイナミクスは強い分解能依存性を示す。 \mathbf{s}' もキック形状を示す点では任意性があるが、これは大きさも 1 であり、あまりダイナミクスに強い影響を与えないと思い、そのまま用いる。

²言い換えれば、質量が極端に小さいため、非常に早く終端速度に緩和する。例えば、運動方程式

$$m \frac{dv}{dt} = F - kv \quad (3.8)$$

式は

$$\mathbf{0} = \mathbf{F}_S + \mathbf{F}_T + \mathbf{F}_M + \mathbf{F}_D + \mathbf{F}_E \quad (3.9)$$

となる。これを \mathbf{v}_p について解くことで、ダイナミクスを計算できる。実際の計算では、式 (3.9) を変形して、

$$\begin{aligned} [6\pi\eta R/\Delta\xi + (\gamma'_0 - \rho_s\kappa) \mathbf{s}' \times -\gamma_0 \mathbf{s}' \times \mathbf{s}' \times] \mathbf{v}_p = & - \rho_s\kappa \mathbf{s}' \times \mathbf{v}_{s,nl} + 6\pi R\eta \mathbf{v}_n / \Delta\xi \\ & + T_0[\mathbf{s}'(\xi + \Delta\xi/2) - \mathbf{s}'(\xi - \Delta\xi/2)] / \Delta\xi \\ & - \gamma_0 \mathbf{s}' \times \mathbf{s}' \times \mathbf{v}_n + \gamma'_0 \mathbf{s}' \times \mathbf{v}_n \\ & + q\mathbf{E} / \Delta\xi \end{aligned} \quad (3.10)$$

となるので、ベクトル解析の式

$$(\zeta_1 + \zeta_2 \mathbf{s}' \times + \zeta_3 \mathbf{s}' \times \mathbf{s}' \times) \mathbf{v}_p = \mathbf{G} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \mathbf{v}_p = & \frac{1}{(\zeta_1 - \zeta_3)^2 + \zeta_2^2} [(\zeta_1 - \zeta_3)\mathbf{G} + \zeta_2 \mathbf{G} \times \mathbf{s}' \\ & + \frac{\zeta_2^2 + \zeta_3^2 - \zeta_1\zeta_3}{\zeta_1} (\mathbf{G} \cdot \mathbf{s}') \mathbf{s}'] \end{aligned} \quad (3.12)$$

を用いて計算する³。

3.2.2 系のモデル化

粒子の運動が従う方程式を決めたので、次は系をモデル化する。今回は、図 3.5 のように、平面な固体境界 (z 方向) に挟まれた 1 本の量子渦を考え、その中心に帯電粒子がトラップされている系を主に考える⁴。ここで渦の方向は $+z$ 方向である。系には振動電場 $\mathbf{E} = E_0 \cos(2\pi ft) \hat{x}$ がかかっており、 E_0 は実験的な代表値 $E_0 = 8823$ V/m を、振動数 f には 0.8 Hz を主に用いている。粒子の電荷 q の正確な値はわからないが、電子一つがつかっていると考えると $q = -e (= -1.602 \times 10^{-19}$ C) とする。系の大きさ L に関しては実験セルの大きさ ~ 1 cm を主に採用している。シミュレーションで主に用いるパラメータは表 3.1 にまとめている。

もちろん実際の系では、一般に渦の配置はより複雑である。ここでは、実験では系の中心付近を主に観察していることから、渦輪や複雑な形をした渦を考えないこととし、簡単のために図 3.5 のような系を考えている。

3.3 Kelvin 波励起

粒子を振動させることによる Kelvin 波励起を確認する。図 3.6 には、渦長の初期状態からの伸び ΔL を示している。粒子の駆動を始めるとともに渦長は徐々に伸長されていき、

を考えると、その解は $v(0) = 0$ の時、 $v(t) = \frac{F}{k} (1 - \exp(-\frac{k}{m}t))$ となる。この時、緩和の時定数 $\tau = \frac{m}{k}$ は質量が十分軽い時 ($m \rightarrow 0$) は非常に小さくなるため、早い時間で緩和することがわかる。

³ \mathbf{F}_T の $\mathbf{s}'(\xi + \Delta\xi/2)$ 及び $\mathbf{s}'(\xi - \Delta\xi/2)$ は点 $\mathbf{s}(\xi) = \mathbf{s}_i$ の前の点 \mathbf{s}_- と後の点 \mathbf{s}_+ を用いて、それぞれ、 $(\mathbf{s}_+ - \mathbf{s}_i)/|\mathbf{s}_+ - \mathbf{s}_i|$ 、 $(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_-)/|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_-|$ と近似している。

⁴先の章とは異なり、渦が横倒しになっているような見せ方しているのは、実験で見られている映像に対応させているからである。

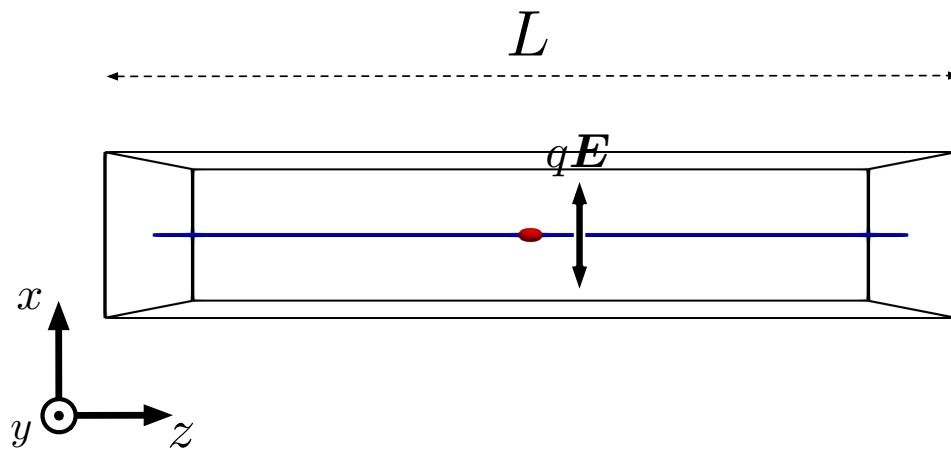


図 3.5: 対象とする系の初期状態。青い線は渦糸、赤い点は粒子を示しており、 x 方向に振動電場をかけて駆動する。 z 方向には固体境界条件が適用されている。描かれている直方体の寸法は z 方向に $L = 1.0$ cm、 x 、 y 方向に 0.32 cm である。

パラメータ	文字	値
系の大きさ	L	1 cm
温度	T	1.4 K
時間分解能	Δt	$6.25 \mu\text{s}$
最少渦点間隔	$\Delta \xi_{\min}$	$5 \mu\text{m}$
最大渦点間隔	$\Delta \xi_{\max}$	$10 \mu\text{m}$
電場の振動周波数	f	0.8 Hz
電場の大きさ (振幅)	E_0	8823 V/m
粒子の電荷	q	$-e = -1.602 \times 10^{-19}$ C
粒子の大きさ	R	43.5 nm

表 3.1: シミュレーションで主に用いるパラメータ。特筆しない限りこれらの値を用いている。

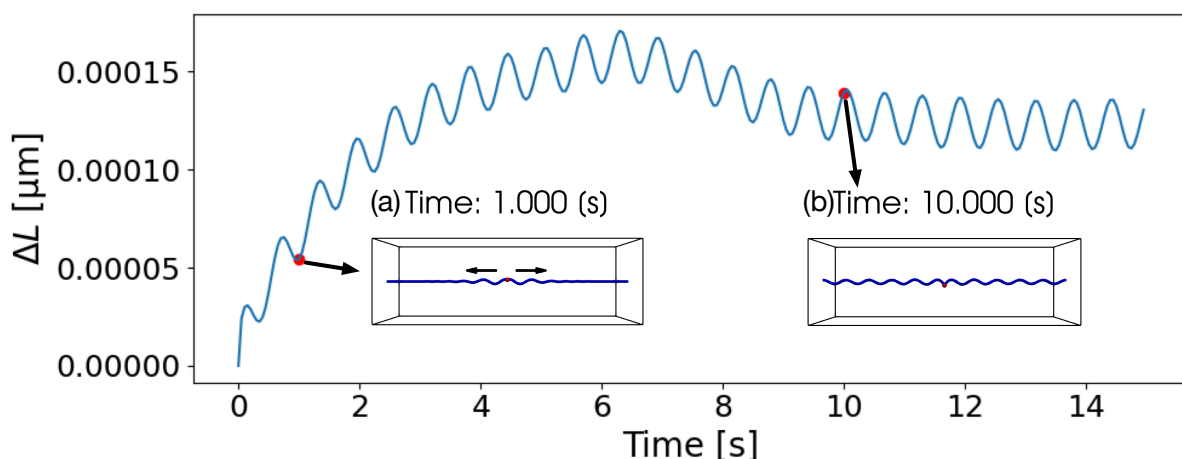


図 3.6: 渦の伸長の時間発展。内部には赤い点で示された時間でのシミュレーションのスナップショットを示している。どちらのスナップショットも渦の変位は x 、 y 方向に 3000 倍誇張されている。

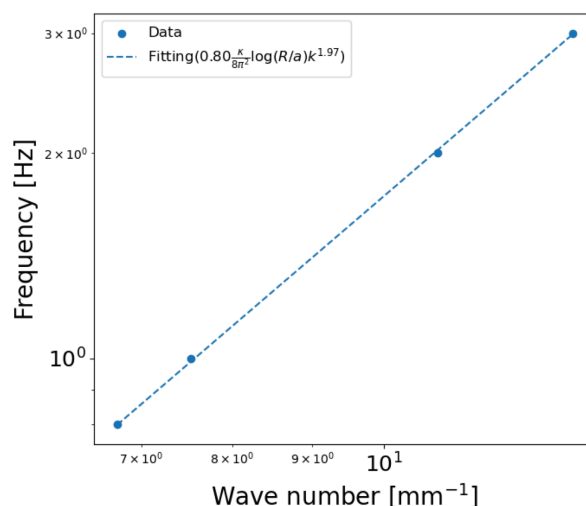


図 3.7: 振動電場の振動数を 0.8 Hz、1 Hz、2 Hz、3 Hz の 4 通り計算し、それぞれから計算された波数をプロットしたもの。スケールは両対数である。波数は $z > 0$ の範囲で計算された。

定常状態へ達する。その間の渦のダイナミクスを追う。電場によって粒子が駆動されると、駆動されている点からヘリカルな波が $+\hat{z}$ 方向と $-\hat{z}$ 方向の両方に伝わっていく (図 3.6(a))。それぞれの波は $+\hat{z}$ 方向に渦度の向きに対して右巻き (右ねじ)、 $-\hat{z}$ 方向には左巻き (左ねじ) の構造を持っている。ここで、図中の渦は x 及び y 方向に 3000 倍に誇張されていることに注意が必要である。そのため、ヘリカルな構造の波数 k と振幅 ϵ に対して $1/k \gg \epsilon$ は明らかに満たされている。励起された波は伝播したのち、固体壁に到達、反射される。最終的には反射された波と帯電粒子から励起される波が互いに干渉し、定常波のようになる (図 3.6(b))。

このヘリカルな構造が実際に Kelvin 波の分散関係に従うのか検証する。今回系の大きさをそのままに振動数 f を変えて計算し、渦の位置を xz 平面に射影したもの⁵を $z > 0$ の範囲を関数 $C \sin(kx + \theta)$ という形でフィッティングした。ここでフィッティングパラメータは振幅 C 、波数 k 、位相 θ である。各振動数ごとにフィッティングで得られた波数 k の平均と振動数 f を両対数プロットしたものが図 3.7 である。これらはおおよそ直線上に並んでおり、 $c_1 \frac{k}{8\pi^2} \log\left(\frac{R}{a}\right) k^{c_2}$ でフィッティングすると (ここで R は特徴的なスケールで今は L を選んでいる)、 $c_1 = 0.8$ 、 $c_2 = 1.97$ 程度になった。これは振動数が k^2 に依存しており、式 (1.44) を支持している。そのため、ここで見られているものは Kelvin 波と言って問題ないと思われる。

実験的に分散関係を調べる方法として、(1) 実験の試行ごとに、振動数が異なる電場を印加し、それぞれの波数を計算する、(2) 同じ渦に対して、電場の振動数を変更し、波数の変化を見る、の 2 通りが考えられる。(1) では、ほとんど Kelvin 波が立っていないであろう状態から励起していくので、より正確に分散関係が見えると思われるが、何度も実験を行う必要がある。実験では、1 回の試行で高々数本の渦しか見えないのであまり効率がよくない。(2) では、すでに Kelvin 波がたった渦を異なる振動数で駆動するので、前の履歴が影響してくる可能性があるが、1 試行で複数のデータが取れる。図 3.7 に示されている分散関係は直線状態の量子渦から初め、それぞれ振動数が異なる電場を印加して、波数

⁵これは実験で見られているものに対応している。

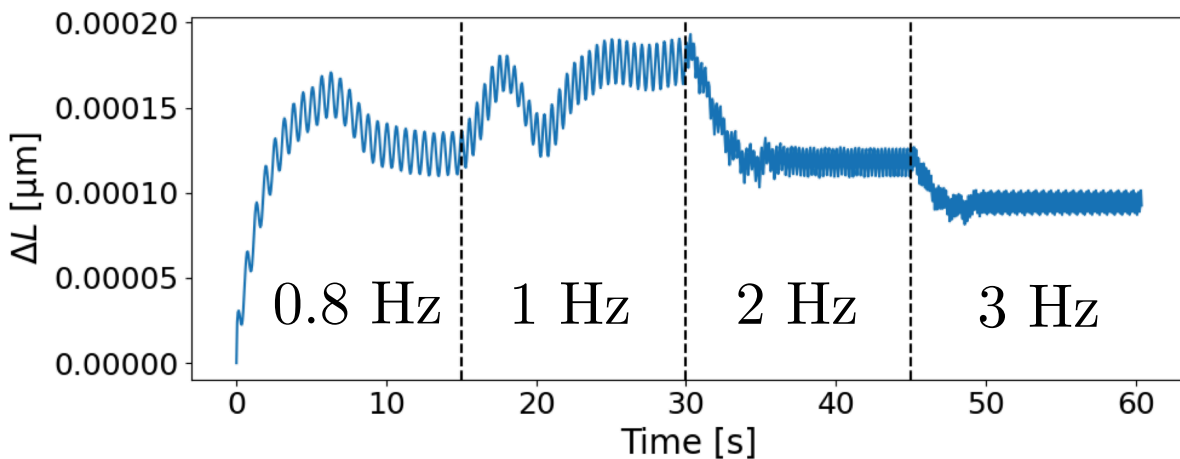


図 3.8: 振動電場の振動数を 15 s ごとに 0.8 Hz、1 Hz、2 Hz、3 Hz と順に変化させた時の渦長の時間発展。振動数を変えあと、数秒で統計的定常状態へと緩和していることがわかる。

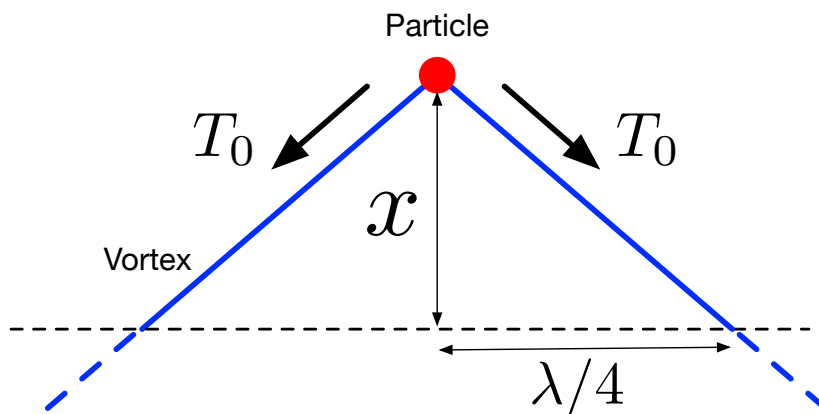


図 3.9: 電場で駆動される粒子近傍の渦の概念図。渦は実際、曲線である可能性があるが、簡単のため直線で表している。

を計算しているのので (1) に相当する。(2) に相当する方法を検証する。図 3.5 と同じ初期状態から、振動数 f を 15 s ごとに 0.8 Hz、1 Hz、2 Hz、3 Hz と変化させた。そのときの渦の伸びの時間発展が図 3.8 に示されている。振動数が変化した時、それぞれ 5 s から 10 s 程度で前の振動数で励起された Kelvin 波の影響がなくなり、定常状態に達する。つまり、ある程度時間をおけば問題はない⁶。しかし、実際の系では振幅がこのシミュレーションで得られたものよりも大きくなっているため、減衰により時間がかかる可能性があるため、前の振動数による影響を消すためにはより長い時間が必要かもしれない。

最後に、その減衰について議論しておく。簡単のため、Kelvin 波を図 3.9 のように直線近似し、2 次元的に考える。すると反波長あたりの渦長は $2\sqrt{\epsilon^2 + (\lambda/4)^2}$ となる。ここで図中の x を振幅 ϵ としている。波長 λ は $\lambda = 2\pi/k$ から求められ、波数 k は振動数に対応

⁶この時間が具体的にどれくらいかは不明だが、式 (1.50) から、Kelvin 波の振幅は $1/\alpha\omega$ の特徴的時間で減衰するため、それに近い値であると考えられる。これは、温度 1.4 K、角振動数 $\omega = 2\pi \times 0.8$ rad/s では、およそ 3.8 s である。

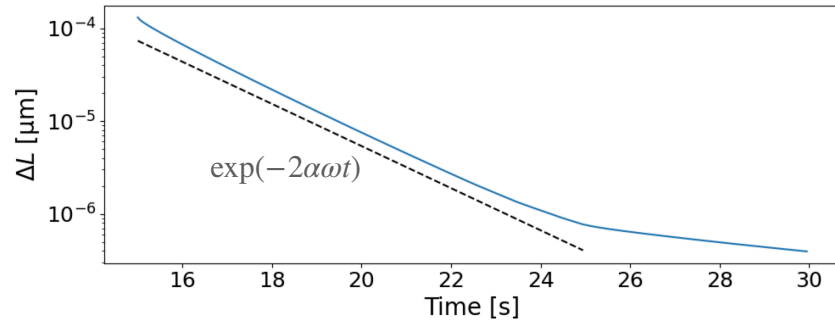


図 3.10: 図 3.6 の時間 15 s で振動を切った時の渦の伸長の時間発展。縦軸は対数スケールである。

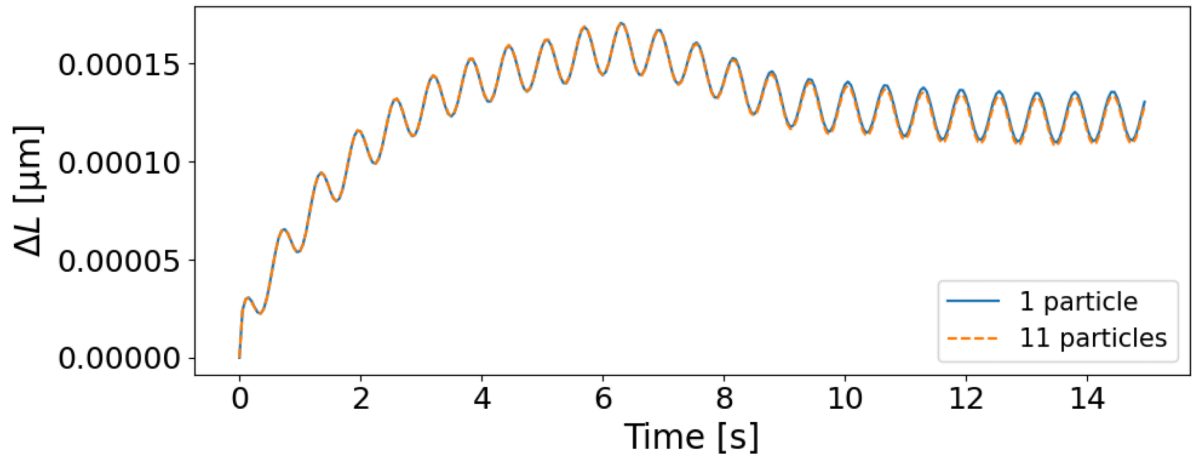


図 3.11: 粒子が単一の場合 “1 particle” と複数の場合 “11 particles” の渦の伸長の時間発展の比較。

したモード $k = n\pi/L$ を持つ。この構造は系に n 個存在するので、渦長 L' は

$$L' = 2n\sqrt{\epsilon^2 + (\lambda/4)^2} \quad (3.13)$$

となる。これに、 $\epsilon \ll \lambda/4$ という仮定を加えると、渦の伸び ΔL は

$$\Delta L \approx \frac{2L}{\lambda} \epsilon^2 \propto \exp(-2\alpha\omega t) \quad (3.14)$$

となり、 $\exp(-2\alpha\omega t)$ に従い減衰していくという結果が得られる。実際に、電場で粒子を駆動させ続けた後に、電場を切った結果が図 3.10 である。このように $\exp(-2\alpha\omega t)$ にしたがって減衰している。渦長が 2 桁ほど減衰した後に、 $\exp(-2\alpha\omega t)$ から外れる原因は不明であるが、数値的な渦点の揺らぎのみになっており Kelvin 波的な特徴が弱くなっているためであると考えている。

3.4 粒子トラップによる影響

ここでは帯電粒子の他に帯電していない粒子が複数トラップされることによる影響を議論する。結論から言えば、ほとんど帯電していない粒子をトラップすることによる影響

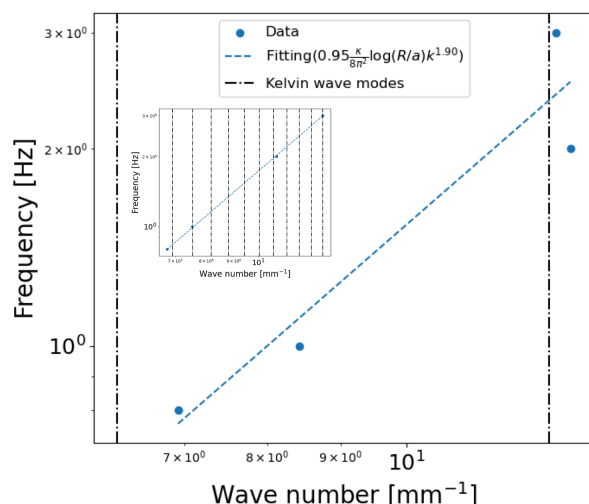


図 3.12: 系の大きさ $L = 0.1$ cm の時に、振動電場の振動数を変えて得られる分散関係。黒い破点線は $n\pi/(L/2)$ を示している。埋め込まれた図は図 3.7 に $L = 1.0$ cm の分散関係に $n\pi/(L/2)$ を追記したものである。

はない。我々は図 3.5 と同様の系に、帯電粒子から両側に帯電していない粒子を 0.2 mm 間隔で 5 個ずつ粒子を追加し、シミュレーションを行った。図 3.11 は粒子 1 つの場合との渦長の伸び ΔL の比較を示している。十分時間が経った定常状態では少し差が生じているが、両者の伸びの時間発展はおおよそ一致している。差の原因は粒子がトラップされている部分にストークス力がかかることで実効的な減衰が大きくなっているためであると考えられる。また、3.3 章と同様に渦のパターンから波数を計算したところ、両者の間の差は 0.1% 程度にとどまっており、粒子がトラップされることによる観測の誤差はほとんどないと考えられる。

3.5 有限サイズ効果

この系で見られる Kelvin 波には強いシステムサイズ依存性が見られる。系の大きさ L を $1/10$ の $L = 0.1$ cm にした時の Kelvin 波の分散関係を図 3.12 に示す。フィッティング結果こそ上手くいっているように見えるがデータ点はほとんど線上に乗っていない。一般的に Kelvin 波は系の大きさ L に対して、 $n\pi/L$ という系の大きさを反映したモード波数で共鳴する。この分布は系の大きさによる Kelvin 波モードの制約を反映しているものと思われる。黒い破点線は $n\pi/(L/2)$ を表している (分母は、 \approx 正の部分のみを考えていることを反映)。周波数が高いところ (2 Hz 及び 3 Hz) では、波数の分布が Kelvin 波モードによく集中している様子が見える。低周波数では、Kelvin 波モードよりも大きい波数になっているが、これは渦の片端が固体境界ではなく粒子であることに起因している。渦の端が滑らかな⁷固体境界の場合、渦は境界に対して垂直に入射する条件が課せられる。そのため、渦の端が固体境界ならばその部分は渦の振動の腹になる。一方で、端が粒子である場合は、その必要はないため、ずれが生じる。また、図 3.12 中に差し込まれた図は 3.7 に $n\pi/(L/2)$ を追記したものであり、十分多くの Kelvin 波モードがあるため、分散関係が適切に現れていることがわかる。

⁷ここではピンギの影響がないことを意味している。

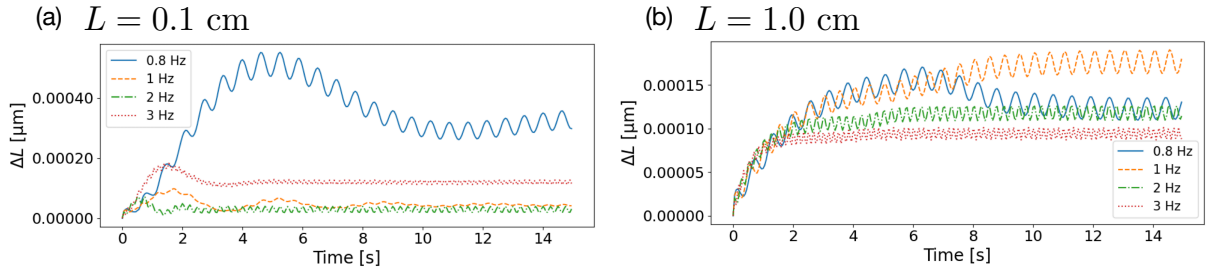


図 3.13: (a) $L = 0.1$ cm、(b) $L = 1.0$ cm の時の渦の伸長の時間発展。凡例は振動電場の振動数 f を表している。

2章で見られたような渦長と振動数の関係はこの系でも見られる。2章では、系の大きさに対応する Kelvin 波モードと共鳴する振動数で駆動された場合は渦はよく伸長され、どのモードからも遠い場合はあまり伸長されなかった。図 3.13 に振動数ごとの渦長に時間発展を示している。図 3.13(a) に示されているように、 $L = 0.1$ cm では、 $f = 0.8$ Hz や $f = 3$ Hz に比べ、 $f = 1$ Hz や $f = 2$ Hz ではほとんど伸長されていない。これは $f = 0.8$ Hz や $f = 3$ Hz が系の大きさに対応した Kelvin 波モードに近いことに対応している。一方で、図 3.13(b) に示されている $L = 1.0$ cm の場合では、対応する Kelvin 波モードが多いため、どれもよく伸長されている。

図 3.13 から他に読み取れることとして、(1) 共振している場合、振動数 f が小さい方が渦の伸びが大きいこと⁸、(2) L が小さい方が渦の伸びが大きいことの 2 つがある。(1) には、式 (1.50) に示された Kelvin 波の減衰が関わっている。今回の系における統計的定常状態は、粒子の振動によって両側に励起される Kelvin 波と反射されてくる Kelvin 波が干渉して定常波を作ることによって実現する。式 (1.50) によると、Kelvin 波の振幅の減衰は $\sim \exp[-\alpha \omega t]$ という形に比例し、角振動数 ω が小さい方が相互摩擦による減衰が弱い。粒子が駆動されている点で励起された Kelvin 波が反射して粒子まで帰ってくる時間は、群速度 $dw/dk \sim \beta_{\text{ind}} k$ を使うと、 $\sim L/\beta_{\text{ind}} k$ である。よって、分散関係を用いると、Kelvin 波が反射して帰ってくるまでの減衰は $\sim \exp[-\alpha L \sqrt{\omega/\beta_{\text{ind}}}]$ に比例する。よって、振動数が大きいほど強く減衰して返ってくる。よって、 ω (あるいは f) が小さい方が振幅が大きい反射波と干渉できるため、結果的に振幅が大きくなり、渦長も長くなる。(2) についても反射波を考えれば、説明できる。振幅の減衰は L の減少関数であるため、 L が小さい方が大きい反射波と干渉できる。また、 L が小さければ、一度励起された Kelvin 波は何度も壁を反射しつつ留まる。そのため、複数の波と干渉し、渦長は長くなる。

最後に、壁付近に粒子がトラップされている場合を見ておく。粒子の位置を壁から 0.1 mm の位置に変え、計算を行った。図 3.14 はその $t = 10$ s でのスナップショットである。このように壁に近い粒子を見ている場合、粒子の両側で非対称な形の Kelvin 波が形成される。実験的に Kelvin 波を見る時はこのような壁近傍の効果には注意が必要である。

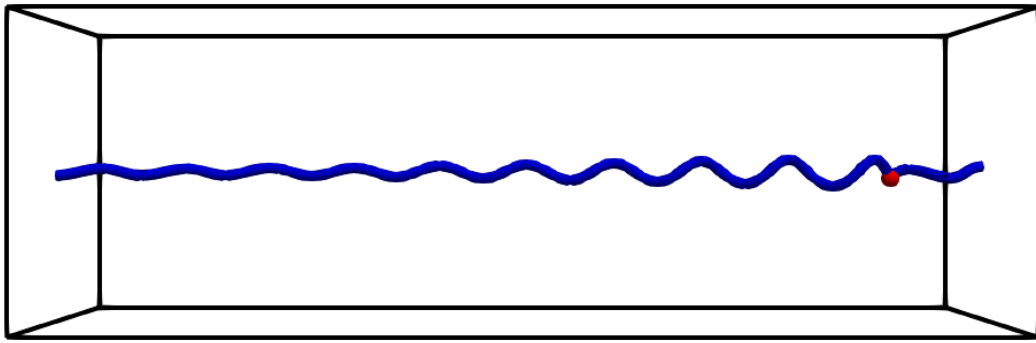


図 3.14: $L = 1.0 \text{ cm}$ で右側の壁から 0.1 mm の位置に粒子をおいた場合のスナップショット。時間は駆動開始から 10 s である。 x 、 y 方向には 3000 倍誇張されている。

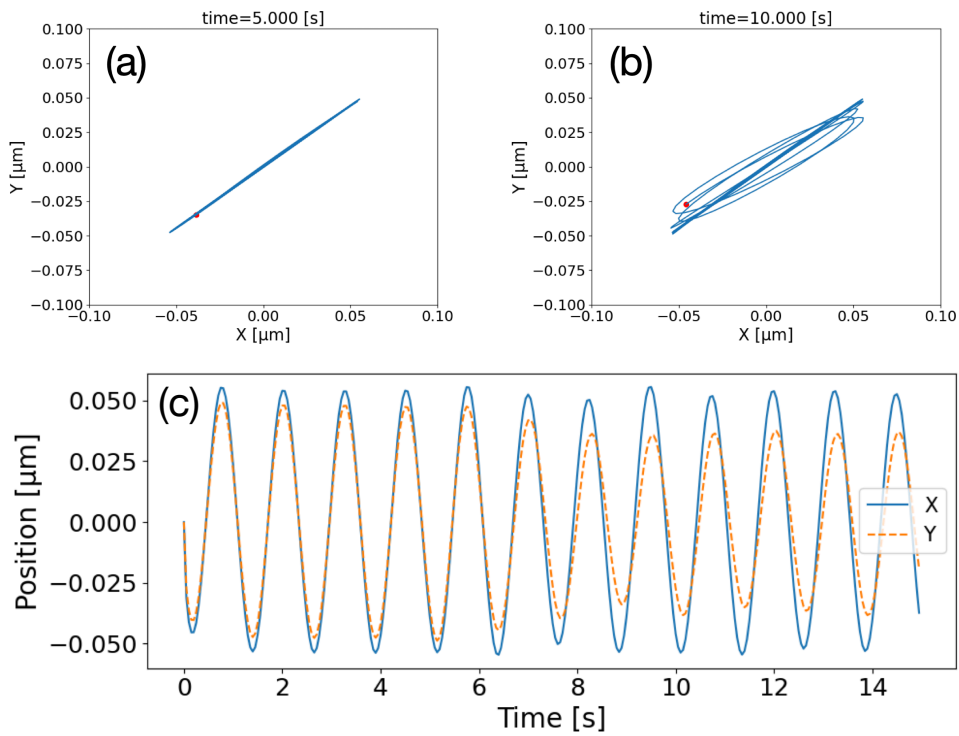


図 3.15: (a)(b) 粒子の軌道を xy 平面に射影したもの。赤い点は (a) 5 s 、(b) 10 s における粒子の位置を表しており、青い線はその時間までの初期状態からの軌跡を示している。(c) は x と y それぞれの変位をグラフで表したものである。

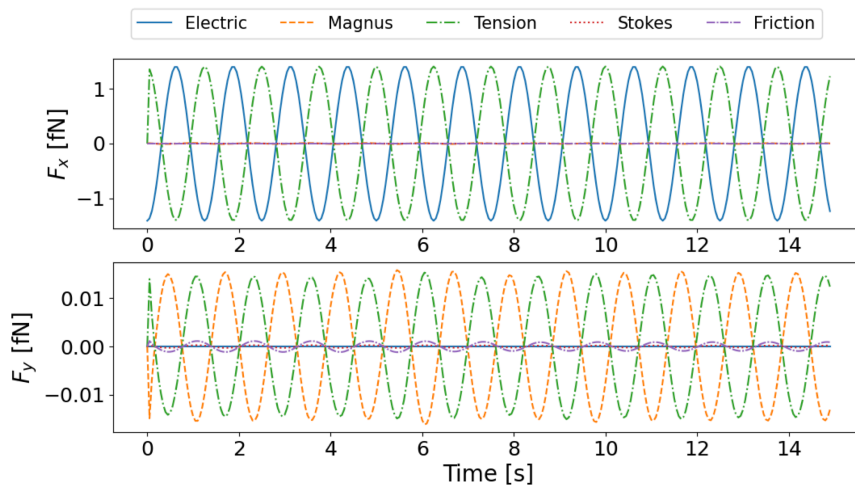


図 3.16: 粒子にかかる力の x 成分及び y 成分それぞれの時間発展。凡例はそれぞれの力を表している。

3.6 粒子軌道

ここでは粒子の軌道を考える。図 3.15 に、粒子の xy 面における軌跡と x と y の変位を示した。ここで、 $(x, y) = (0, 0)$ が粒子の初期位置である。粒子を駆動し始めてしばらくは粒子は斜めに単振動のような運動をする (図 3.15(a))。これは電場によって受ける力によって x 方向に、Magnus 力によって y 方向に駆動されていることに対応している⁹。一方、ある程度時間が経ち、反射波が返ってくると、粒子の運動は楕円的な軌道へと変化し、回り続ける (図 3.15(b))。図 3.15(c) には x 、 y それぞれの変位を示しており、粒子を駆動し始めた時には x と y がおよそ同位相で振動しているのに対し、時間が経った時 (およそ 8 s 以降)、振幅が変わり (y が顕著)、 x と y の振動の位相がずれていることがわかる。

x 、 y それぞれの方向に働く力を確認する。今回、粒子のダイナミクスは式 (3.9) に従うので、力は釣り合っている。図 3.16 にそれぞれの方向の力を示している。振動電場で揺さぶられる x 方向では、電場による力と張力が釣り合っており、その他の力はほとんど効いていない。一方 y については振動電場による力の方向と垂直な Magnus 力や相互摩擦が効いてきており、それらが張力と釣り合っている。 x 方向には電場により ~ 1 pN の力がかかっているが、 y 方向ではかかる力は 2 桁ほど小さい。

図 3.17 は (a) $L = 0.1$ cm、(b) $L = 1.0$ cm での粒子の x 及び y 座標を示したものである。 $L = 0.1$ cm の時、 $f = 0.8$ Hz の時は比較的大きな振動をしている。他の f の場合に粒子の振動が小さいのは f が Kelvin 波モードから遠いことに対応している。 $f = 2$ Hz の y 座標については特に顕著であり、渦がほとんど励起されないため、 y 方向への力がかからず、ほとんど動かない。一方で、 $L = 1.0$ cm の時は、ほとんどの振動数で同程度振動している。これも渦の伸長の際の議論と同様で、Kelvin 波モードが f の近くにあることに対応している。 L で大きく違うのは、その振幅で、 $L = 0.1$ cm の時は、反射波が頻繁に帰ってくるために振幅が大きくなる。

⁸ $L = 1.0$ cm、 $f = 0.8$ Hz の時は、例外的に渦の伸びが小さい。Kelvin 波モードから少し離れているためであると考えられるが詳細は不明であり、今後の課題である。

⁹今回の設定では z 方向にはほとんど動いていない

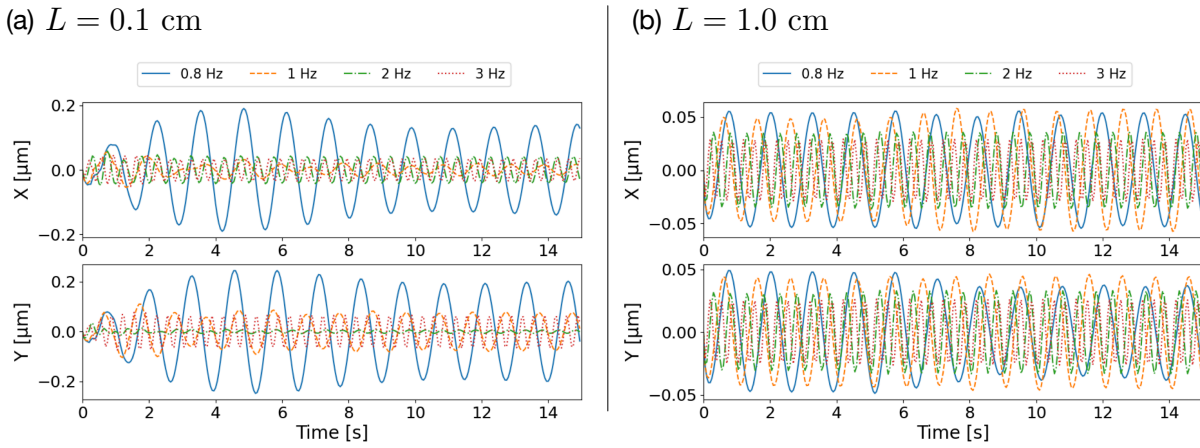


図 3.17: (a) $L = 0.1$ cm、(b) $L = 1.0$ cm の時の粒子軌道。凡例は振動電場の振動数 f を表している。

3.7 Kelvin 波の振幅

帯電粒子が電場により駆動されることで、確かに、Kelvin 波が発生することはわかった。一方で、実験と大きくずれているのがその振幅である。実験では、粒子の振幅が $100 \mu\text{m}$ 程度であるが、今回のシミュレーションでは $0.1 \mu\text{m}$ 程度と非常に小さくなっている。ここでは、この振幅のずれの原因について、いくつかの要因から考察していく。

3.7.1 熱対向流

Minowa らの実験では、レーザーアブレーションを用いて系の中に金属粒子を生成している。その際、試料表面にて発熱し、熱対向流が発生している可能性がある。実際、実験で可視化されている粒子は一方向に流れていることが多い。常流動及び超流動がどれくらいの速度で熱流が流れれば振幅が大きくなるのか見積もってみる。式 (1.50) を一般化すると、

$$\epsilon(t) = \epsilon(0) \exp[\alpha(v_{ns}k - \omega)t] \quad (3.15)$$

となる。ここで $v_{ns} = v_n - v_{s,a}$ で、熱対向流によって駆動される常流動と超流動の相対速度である。これによると、 \exp の中身が正になる相対速度は $v_{ns} > \omega/k \sim \sqrt{\omega}$ である。この時、Donnelly-Glaberson 不安定性により Kelvin 波が無制限に増幅されていく。 $\omega = 0.8$ Hz では、およそ 1 cm/s となる。実験的には 1 cm/s のような速い速度で流れているような様子や Donnelly-Glaberson 不安定性のような振る舞いは観測されていない。しかし、相対速度が小さくても、Kelvin 波の減衰は遅くなるため、結果的に、現在の結果よりも大きい振幅が見られるかもしれない。

熱対向流がある場合の帯電粒子付き量子渦のダイナミクスを見ておこう。今回の場合、常流動を $+\hat{z}$ 方向、超流動を $-\hat{z}$ 方向に熱対向流を仮定して流している。この時のみ、 z 方向は周期境界条件を適用している。電場の振動とともに粒子が駆動され、Kelvin 波を励起しながら常流動速度とともに流れていく。粒子が v_n に沿って流れることにより Doppler 効果がおき、帯電粒子の両側で異なる波長の Kelvin 波が励起される。

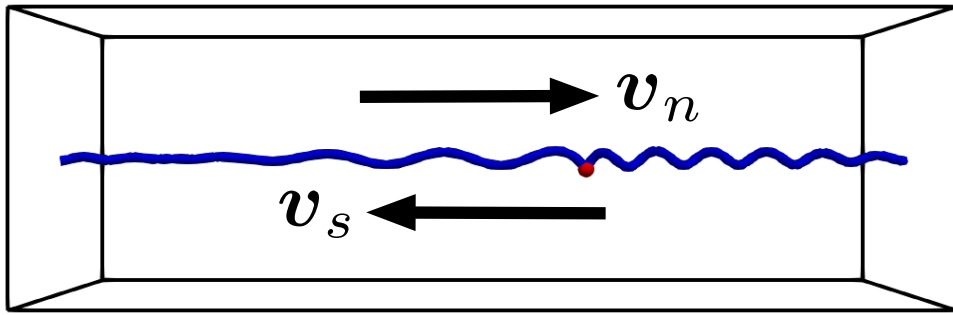


図 3.18: 熱対向流を流した場合のスナップショット。時間は駆動開始から 2.5 s で、常流動速度 $v_n = 0.5$ mm/s、相対速度 $v_{ns} \approx 0.6$ mm/s である。矢印は v_n と v_s がそれぞれ流れている方向を表している。流れ方向には周期境界条件を適用している。また、渦の変位は x 、 y 方向に 3000 倍誇張されている。

3.7.2 有限サイズ効果

図 3.17 に示されているように $L = 0.1$ cm、 $f = 0.8$ Hz の時、 $L = 1.0$ cm のどの場合よりも大きい振幅を持つことがわかる。これは振動数が Kelvin 波モードに近いことによるものであるが、実際の系では、平行な壁に両端が付着する長さ 0.1 cm の量子渦が存在し得ない。では、実際の系で有限サイズ効果が効くケースはどのような場合だろうか。その 1 つとして考えられるのは渦輪である。渦輪に帯電粒子がトラップされているとし、駆動して Kelvin 波を発生させると、発生した Kelvin 波は渦輪を一周して戻ってくるため、擬似的な周期境界条件となる。長さ 0.1 mm の時、すなわち半径 $0.1/2\pi$ mm の渦輪が温度 1.4 K の超流動ヘリウム中で存在しているとすると、渦輪の寿命は 0.2 s ほどであり、速度も 5 mm/s 程度と非常に速い。そのため、実験的にそのような渦輪を観測することは難しく、そのような有限サイズ効果が働いている可能性は低いと考えられる。

3.7.3 帯電量

ここまでのシミュレーションでは粒子の帯電量 q を素電荷 $-e$ として計算してきた。ここでは帯電量が多すぎる場合を考えてみる。シンプルなモデルを考える。電場により帯電粒子が受ける力 F_E 、Stokes 力 F_S 、張力 F_T のみを考慮し、粒子が一次的に動くことと仮定する。この時、粒子の位置を x として運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_E + F_S + F_T \quad (3.16)$$

$$= qE - 6\pi R\eta \frac{dx}{dt} + F_T \quad (3.17)$$

となる。ここで張力 F_T をどのようにモデル化するか考える。今、粒子の振動で波長 λ の Kelvin 波が励起されており、粒子近傍では図 3.9 のようなキンク構造が形成されていると

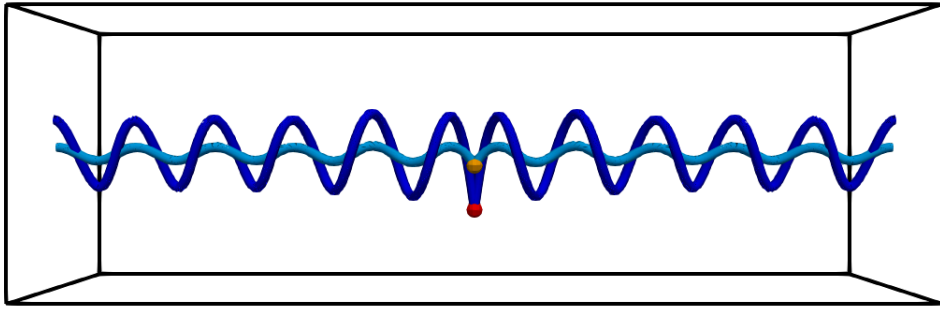


図 3.19: 粒子の帯電量が異なる場合の比較。時間はどちらも駆動開始から 10 s である。色が薄い方が $q = -e$ 、濃い方が $q = -5e$ の時を表している。また、渦の変位は x 、 y 方向に 3000 倍誇張されている。

する。この時、粒子にかかる張力の和は、渦一本からかかる張力の大きさを T_0 とすると、

$$F_T = -2T_0 \frac{x}{\sqrt{x^2 + (\lambda/4)^2}} \quad (3.18)$$

$$\rightarrow -2T_0 \frac{x}{(\lambda/4)} \quad (3.19)$$

$$\equiv -\frac{T_0 x}{x_0} \quad (3.20)$$

となる。ここで式 (3.18) と (3.19) の間には $x \ll \lambda/4$ を仮定した。また、 $x_0 = \lambda/8$ である。式 (3.17) について、振動電場 $E = E_0 \exp(-i\omega t)$ 及び振動解 $x = A \exp(-i\omega t)$ を仮定する。そうすると、

$$-\omega^2 m A = qE + 6i\pi R\eta\omega A - \frac{T_0 A}{x_0} \quad (3.21)$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{qE_0}{\frac{T_0}{x_0} - \omega^2 m + 6i\pi R\eta\omega} \quad (3.22)$$

この式に、 $q = -e$ 、 $\omega = 2\pi \times (0.8 \text{ Hz})$ 、 $T_0 \approx 1 \text{ pN}$ 及び、 ω に対応した波長 λ を代入すると、 $|A| \approx 0.1 \mu\text{m}$ となる。この時 T_0/x_0 が大きく、分母の残り 2 項はほとんど効いてこない。粒子が渦にトラップされておらず、張力がない状況では、 $|A| \approx 100 \mu\text{m}$ ほどになる。

この式 (3.22) からわかることは、振幅は電場の振幅 E_0 及び帯電量 q に比例することである。図 3.19 に $q = -e$ の場合 (薄い線) と $q = -5e$ の場合 (濃い線) の同じ時間のスナップショットを示している。確かに、帯電量が大きい $q = -5e$ の場合には、粒子が大きく振動されていることがわかる。この時の粒子の振幅はおよそ、 $0.3 \mu\text{m}$ である。実験的に帯電量を正確に計測することが今のところ不可能であるが、粒子が素電荷よりも多くの帯電量を持っており、それが大きい振幅に関係している可能性はある。

3.7.4 複数粒子の帯電

実験では、量子渦にトラップされた複数の粒子によって渦の可視化が実現している。3.4 章では複数粒子のうち 1 つだけ帯電していると考えてシミュレーションを行ってきた。しかし、実際の実験系では、複数の粒子が帯電していても不思議ではない。もし、渦にト

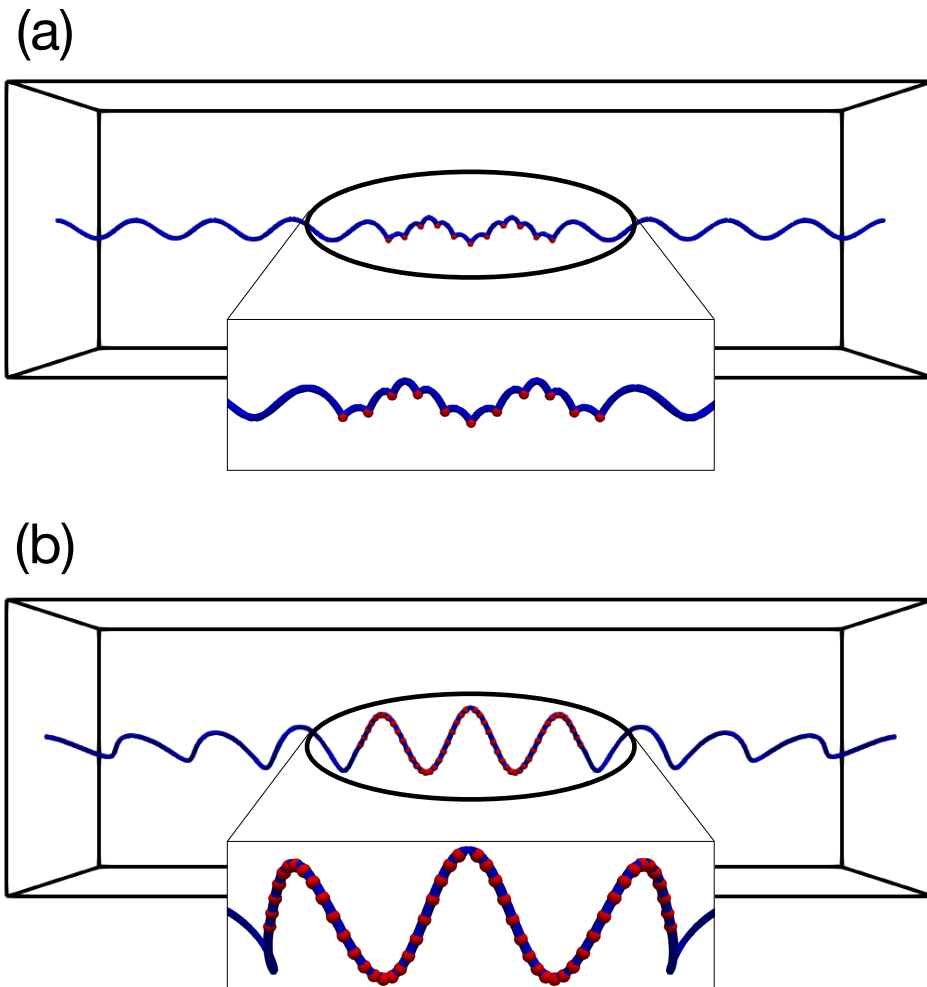


図 3.20: 帯電粒子が複数トラップされている時の渦のスナップショット。(a)は0.2 mm 間隔で2 mm の範囲に合計11個設置した場合、(b)は0.05 mm 間隔で2.5 mm の範囲に合計51個設置した場合を表している。(a)は駆動開始から10 s、(b)は11 sのスナップショットである。(a)(b)それぞれの下部には、粒子近傍を拡大したものを示している。渦の変位は x 、 y 方向に3000倍誇張されている。

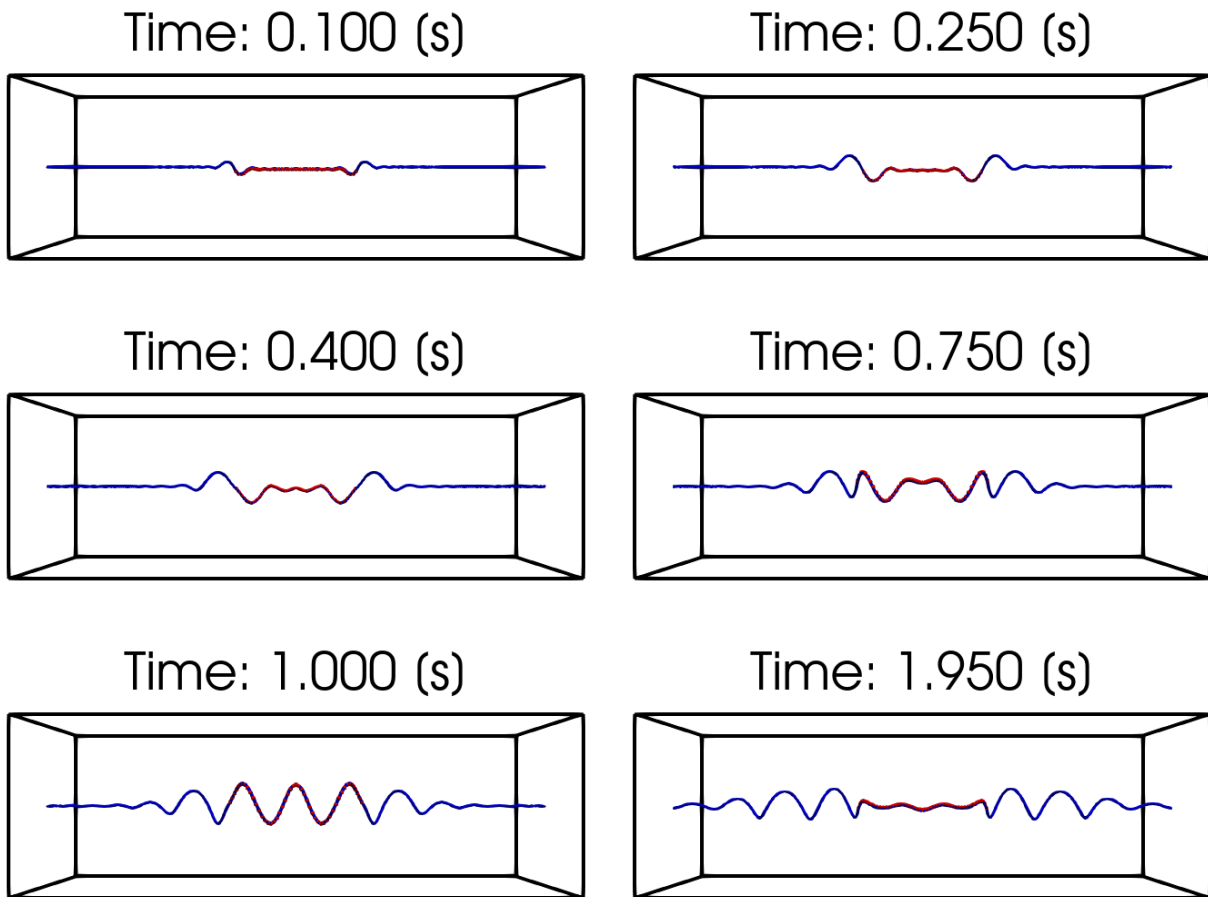


図 3.21: 51 個帯電粒子をトラップしている場合の渦のダイナミクス。渦の変位は x 、 y 方向に 3000 倍誇張されている。

ラップされている粒子の複数が帯電している場合、1つだけ帯電しているよりも渦を強く励起できると考えられる。

図 3.20(a) は帯電粒子を 0.2 mm 間隔で 2 mm の範囲に合計 11 個おいた場合のシミュレーションのスナップショットである¹⁰。この時、これまでと同様に、Kelvin 波のような構造が現れていることがわかる。しかし、その振幅は、ほとんど変わらなかった。一方、図 3.20(b) は、帯電粒子を 0.05 mm 間隔で 2.5 mm の範囲に合計 51 個おいた場合のスナップショットである。この時、これまでとは違い空間分解能を $\Delta\xi_{\min} = 2 \mu\text{m}$, $\Delta\xi_{\max} = 5 \mu\text{m}$ として、粒子間の渦点の数を確保している。先と同様に、Kelvin 波が励起されているが、振幅が大きくなっている。

波が形成される過程を見ておく。電場によって駆動されるとともに、粒子は一団となって力がかかる方向に動こうとする。この時、粒子の間の渦は弧を描き、張力により、粒子の動きを阻害する。一方、端の粒子では、周りの渦は電場により駆動されないことから、張力の向きが変わる。それにより、他の粒子とは異なる動きをし、波が励起される。この端の粒子が他と異なる動きをすることで、またその隣の粒子に働く張力の向きが変わる。これを繰り返すことで、連鎖的に、粒子が動いていく (図 3.21 の 0.100 s-0.400 s)。電場の

¹⁰ これらの図は、粒子の間隔が狭く、これまでの線の太さ、粒子の大きさのままだと非常に見づらくなるので、これまでより線を細く、粒子を小さく表示してある。

向きが変わると、端の粒子が今度は逆方向に駆動され、さらに波を励起していく。これにより、帯電粒子が多くトラップされている場合でも Kelvin 波が励起される。また、帯電粒子が多い時には、粒子が存在する範囲の Kelvin 波は粒子軌道を反映し、アスペクト比が大きい楕円状になる。そのため、図 3.21 の 1.950 s のように一見、波が消えたように見えるタイミングもある。

3.7.5 様々な要因の混合を経て

これらを総合して考えてみよう。例えば、強い熱対向流はないとして、複数の粒子が帯電していて、その帯電量が $q = -5e$ と仮定する。そうすると振幅は $1 \mu\text{m}$ ほどにまで到達した。しかし、それでも実験で得られている振幅からは遠く、まだ謎は残る。非常に大きい帯電があるのか、はたまた、本研究では想定していない別の原因があるのか、現状ではわからない。

3.8 結論

本研究は、Minowa らによる、シリコン粒子を用いた量子渦の可視化実験に着想を得た。彼らは、粒子が帯電しているという性質に着目し、振動電場をかけることで Kelvin 波の励起を試みた。その結果確かに、粒子は駆動され、Kelvin 波のような分散関係も得られた。

我々は、量子渦にトラップされた帯電粒子のダイナミクスをモデル化することでこの現象を理解することにした。我々は粒子が従うモデルとして、Mineda らが用いた粒子の運動方程式を解くモデル [92] に帯電粒子が電場から受ける力を加え、質量が十分小さいことから慣性項を無視することで簡略化したモデルを用いた。

3.3 章では帯電粒子が 1 つ量子渦にトラップされている状況をモデル化し、振動電場で駆動した。その結果、電場によって駆動された粒子は確かに波のようなものを形づくり、十分時間が経過すると系全体は定在波のようになり、渦長が一定周期で振動する統計的定常状態になった。駆動振動数を変えて、同様のシミュレーションを行い、その時の波数を計算し、分散関係や減衰を調べることでこれが確かに Kelvin 波であると確認することができた。3.4 章では、帯電粒子の近傍に帯電していない複数の粒子がトラップされているという実験で想像されている描像を再現し、シミュレーションを行った。それによると、計算できる波数にはほとんど粒子トラップによる影響がないことが確認できた。3.5 章では、系の大きさを変更することで、有限サイズ効果を調べた。これによると、系が小さい時、うまく分散関係が現れず、系は $n\pi/L$ という系の大きさを反映したモードを好むことが反映されることが確認された。このような特徴は実際の実験系では見られておらず、実験系は十分大きいことがわかる。また、系の大きさに対応した Kelvin 波モードから外れた振動数で駆動される場合は、渦の伸長が弱く、ほとんど伸長されないことがわかった。これは第 2 章と同様のものであり矛盾しない。3.6 章では、駆動された粒子の軌道を確認し、粒子は初めは斜め軌道、励起された Kelvin 波が固体境界で反射されて返ってきた時には楕円軌道になることがわかった。この斜め軌道は、振動電場がかかる方向には、電場による力と張力が、それと垂直な方向には、Magnus 力と摩擦力と張力が寄与している。また、系の大きさによって軌道の振幅が変化することも確認した。3.7 章では、粒子の振幅が実験よりも数桁小さいことについて、熱対向流、粒子の帯電量、複数粒子の帯電

のそれぞれに着目して議論した。熱対向流に関しては、実験的に粒子が速く流れていないこと、及び Donnelly-Glaberson 不安定性のような特徴が見られていないことから、速い流れはないと考えた。粒子の帯電量に関しては簡単な見積りから、粒子の帯電量に比例して振幅が増加することを想定し、実際に帯電量が大きくなると振幅も増加することを確認した。複数粒子の帯電については、粒子トラップの間隔が広い時には、あまり変化が見られなかった。粒子が十分密にたくさんトラップされている時は、振幅の増加が見られた。最後に、帯電量と複数粒子の帯電の双方を組み合わせた結果、振幅は 1-2 桁ほど大きくなった。

この研究は Minowa らが実験で観測しているもので確かに Kelvin 波であることを保証する結果であるとともに、実験的にみることが難しい有限サイズ効果や粒子軌道などにも踏み込んだものである。しかし、Kelvin 波の振幅は、実験で見られているものと遠いものになっており、帯電量などの補正を入れて大きくはなったものの、未だ謎のままである。

第4章 結論

本論文では、超流動ヘリウム4系を対象として、振動物体を用いた実験事実から、量子渦のダイナミクスをモデル化し、シミュレーションを行うことで研究した。

第2章では、Florida大学のBarquistらが行ったMEMS(Micro Electro Mechanical Ststems)共振器による観測をモチベーションに、系をモデル化し、渦のダイナミクスを見ることで、観測事実に考察を与えた。系のモデル化には、渦が固体境界にピンングされていると仮定して、十分粗い境界を仮定した臨界角モデルと厳密に解ける半球状ピンングサイトモデルを導入した。このピンングモデルのもと、実験系でプレート状のMEMS共振器と基板の間に量子渦が存在していることを想定し、平行な固体境界条件を橋渡しする渦が存在する系をシミュレーションした。渦が単一の場合は、単純に境界の振動とともに渦が伸長され、臨界角モデルでは統計的定常状態に、半球状ピンングサイトモデルでは、ディピンングが起きることがわかった。渦のダイナミクスは境界の振動数に強く依存し、系の大きさに対応したKelvin波モードでは大きく渦が伸長されるが、どのモードからも遠い場合はあまり伸長されない。実験では、MEMS共振器の共振振動数はおよそ一番波数の小さいモードに対応しているため、渦が良く伸長されていると考えられる。実験系により近い状況と考えられる複数渦の場合では、初期状態として100本の渦を用意し、さらに、外部からの渦注入ができることを想定して、渦注入を行った。この時のピンングは主に臨界角モデルを用いて記述した。この時、渦の注入と散逸が釣り合い、統計定常状態に達する。また、この散逸では、渦が互いに作用し、再結合することで、散逸されやすいトポロジーに変わっていることが確認された。この散逸機構は半球型ピンングサイトモデルを用いて説明された。

実験では、真空中に比べて、MEMS共振器の減衰が強くなる「MEMS共振器の異常減衰」や共振器の駆動力が増加減少される際に近傍で乱流が発生している時のみ駆動力を減少させている時の方が減衰力が小さくなるというヒステリシスが現れる「力のヒステリシス」、乱流の発生とともに、振動の位相に強いノイズが現れる「位相ノイズ」の3つが主な観測結果となっている。我々は境界に働く力を張力として見積もることで、この結果の説明に挑んだ。渦が境界に与える力はおよそその振動数と同様の振動数で周期的に変化する。この力を速度の位相に比例する項と加速度の依存に比例する項に分けた結果、速度と逆方向の摩擦力のような働きをしていることがわかった。これにより「MEMS共振器の異常減衰」は量子渦が原因であることが考えられる。また、複数渦の場合には、系は統計的定常状態に達したが、注入を切った時、渦は単調に減少していく。そのため、MEMS共振器の近傍で乱流が発生しているときは、統計的定常状態に達することで、駆動力を増加させて減少させる過程で、渦によって及ぼされる減衰力は変化しないが、乱流が発生していないときは、その過程で、渦が減少した結果、駆動力を減少させている時の方が力が小さくなる。これが、「力のヒステリシス」の説明であった。最後に、「位相ノイズ」に関して調べるために、渦の本数の時間変化のパワースペクトルを計算した。この時、渦の本数の時間変化はホワイトノイズ的であることがわかったが、これは実験と合わない。

この原因はいまだにわかっておらず、今後の課題である。今後の課題として、他にもこの研究では無視された、固体境界表面での渦層や、境界と渦の相互作用、さらには今回の研究で提案されたピンニングモデルの他の系への応用など様々な研究オプションがある。

第3章では大阪大学の Minowa らがレーザーアブレーションでシリコン微粒子を生成し、量子渦を可視化した実験をモチベーションにシミュレーションを行った。この実験ではシリコン微粒子の帯電に着目し、振動電場をかけることで Kelvin 波が励起された。我々はその粒子のダイナミクスをモデル化し、帯電粒子がトラップされている際、振動電場とともにヘリカルな構造が励起され、分散関係や減衰をみることで、それが Kelvin 波であることを確認した。また、他に帯電していない粒子がトラップされている場合でも、分散関係などにはほとんど影響してこないことを示した。一方、Kelvin 波励起には強いシステムサイズ依存性があり、系が小さい場合には、振動数に対応した Kelvin 波モードが少なく、Kelvin 波モードから外れている場合は渦がほとんど伸長されないため、分散関係が適切に見えないことがわかった。

このモデルで再現された帯電粒子を駆動することで得られる Kelvin 波と、実験で実際に見られた Kelvin 波との大きな差はその振幅であり、実験の方が格段に大きかった。本研究では、その原因を熱対向流や帯電量、複数粒子の帯電の観点から考察した。熱対向流は実験的に Kelvin 波の振幅を増幅させるほどの対向流は見受けられないため、あまり関係ないと思われるが、帯電量や複数粒子の帯電は顕著に関係しているように見えた。これらの要素を組み合わせるシミュレーションを行った結果、振幅が1桁ほど上昇した。それでも、実験とは一致しないが、この原因はいまだに不明である。

付録A 相互摩擦の計算

式 (1.23) から (1.28) までの計算が地味に面倒だったため備忘録として記述しておく。式 (1.24) は、

$$(\gamma_0 + \gamma'_0 \mathbf{s}' \times) \frac{d\mathbf{s}}{dt} = (\gamma_0 + \gamma'_0 \mathbf{s}' \times) \mathbf{v}_n - \mathbf{f}_D \quad (\text{A.1})$$

と変形できるので、式 (3.12) を用いて¹

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{s}}{dt} &= \frac{\gamma_0^2}{\gamma_0^2 + \gamma_0'^2} \left[\left(1 + \frac{\gamma_0'}{\gamma_0} \mathbf{s}' \times \right) \mathbf{v}_n - \frac{\mathbf{f}_D}{\gamma_0} \right] - \frac{\gamma_0 \gamma_0'}{\gamma_0^2 + \gamma_0'^2} \mathbf{s}' \times \left[\left(1 + \frac{\gamma_0'}{\gamma_0} \mathbf{s}' \times \right) \mathbf{v}_n - \frac{\mathbf{f}_D}{\gamma_0} \right] \\ &= \mathbf{v}_n - \frac{\gamma_0}{\gamma_0^2 + \gamma_0'^2} \mathbf{f}_D + \frac{\gamma_0'}{\gamma_0^2 + \gamma_0'^2} \mathbf{s}' \times \mathbf{f}_D \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

これを式 (1.23) に代入する。

$$\mathbf{f}_M = \rho_s \kappa \mathbf{s}' \times \left[\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s - \frac{\gamma_0}{\gamma_0^2 + \gamma_0'^2} \mathbf{f}_D + \frac{\gamma_0'}{\gamma_0^2 + \gamma_0'^2} \mathbf{s}' \times \mathbf{f}_D \right] \quad (\text{A.3})$$

ここで、 $\mathbf{f}_M + \mathbf{f}_D = 0$ より、

$$\left[\left(1 - \frac{\rho_s \kappa \gamma_0'}{\gamma_0^2 + \gamma_0'^2} \right) - \frac{\rho_s \kappa \gamma_0}{\gamma_0^2 + \gamma_0'^2} \mathbf{s}' \times \right] \mathbf{f} = -\rho_s \kappa \mathbf{s}' \times \mathbf{v}_{ns} \quad (\text{A.4})$$

再び、式 (3.12) を用いて変形すると、

$$\mathbf{f} = -\rho_s \kappa \frac{\gamma_0^2 - \gamma_0' (\rho_s \kappa - \gamma_0')}{\gamma_0^2 + (\rho_s \kappa - \gamma_0')^2} \mathbf{s}' \times \mathbf{v}_{ns} - \rho_s \kappa \frac{\rho_s \kappa \gamma_0}{\gamma_0^2 + (\rho_s \kappa - \gamma_0')^2} \mathbf{s}' \times \mathbf{s}' \times \mathbf{v}_{ns} \quad (\text{A.5})$$

$$= -\rho_s \kappa \alpha' \mathbf{s}' \times \mathbf{v}_{ns} - \rho_s \kappa \alpha \mathbf{s}' \times \mathbf{s}' \times \mathbf{v}_{ns} \quad (\text{A.6})$$

$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{v}_s + \mathbf{s}' \times \mathbf{f}_D / \rho_s \kappa$ より、

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{v}_s + \alpha \mathbf{s}' \times (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) - \alpha' \mathbf{s}' \times [\mathbf{s}' \times (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)] \quad (\text{A.7})$$

¹ここで $\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{s}' = 0$ を仮定

付録B ボックスカウント法及び乱流の間欠性モデル

ボックスカウント法は数値的にフラクタル次元を計算するアルゴリズムである [55, 93]。コンセプトとしては、 δ のスケールの物差しを用意し、それよりも小さく複雑な構造を無視して、 δ スケールの構造の数を数える。この δ を小さくしていくとどのように変化していくのか、それを調べることでフラクタルな特徴が見える。ボックスカウント法では系全体を δ の箱で覆い尽くす。系の中にあるパターン ([54] で言えば、量子渦が存在する場所全体) を覆い尽くすのに必要な δ の箱の数 $N(\delta)$ を数える。フラクタル構造を持つ時、 δ と $N(\delta)$ をプロットすることで、式 (1.43) からフラクタル次元 D_f を計算できる。

1つ、2次元における例を挙げる。図 B.1 に示されている雪の結晶¹ のようなパターンを考える。系全体をスケール L の箱で覆い、分割していく。図 B.1 の左側では、箱を 5×5 分割することで、1つ当たりの箱のスケール $\delta = L/5$ となり、パターンを覆う箱の数は $N(\delta) = 21$ になることがわかる。さらに箱を分割し、 11×11 に分割したものが、図 B.1 の右側である。この時スケールは $\delta = L/11$ 、箱の数 $N(\delta) = 61$ と計算できる。

この手法が量子乱流の解析に使われた例は、2つある。Kivotides らは量子渦系モデルの枠組みで常流動乱流速度場を仮定し、生成した量子乱流についてこの手法を用いた [55]。これによると、量子乱流における渦パターンは温度によらずおよそ 1.4 から 1.7 のフラクタル次元を持つ。もう一つは我々が渦輪を衝突させることで生成した局所的量子乱流にこの手法を用いた [54]。生成エネルギーが小さく乱流ができていない時は、渦の一次的な特徴の 1 程度、十分発達した時には 1.8 程度になった。これらの物理的な意味は明確には不明であるが、Yano らは局所量子乱流からの渦放出のサイズ分布がこのフラクタル次元に対応していると考えている [36]。また、古典乱流においては、物理量のモーメントのずれの修正にフラクタルのコンセプトが用いられている。Kolmogorov 則も含めて、乱流の散逸は空間的に一様に起こっているという仮定がよく用いられる。この時、速度の p 次のモーメント $(\delta v)^p$ は

$$(\delta u)^p \propto \epsilon^{\frac{1}{3}p} r^{\frac{1}{3}p} \quad (\text{B.1})$$

という関係が成り立つ。ここで ϵ はエネルギー散逸率、 r は 2 点間の距離である。これは実際に観測すると、高次のモーメントでは大きく外れる振る舞いが見られる。そこで、散逸が空間的にフラクタルな構造を持つと仮定すると²、フラクタル次元を用いてよく用いられる。この時、速度の p 次のモーメント $(\delta v)^p$ は

$$(\delta u)^p \propto \epsilon^{\frac{1}{3}p} r^{\frac{1}{3}p + (1 - \frac{1}{3}p)(1 - D_f)} \quad (\text{B.2})$$

¹実世界での雪の結晶はフラクタル構造を持つパターンとして有名な例であるが、この付録の図で示されているような簡単なパターンにはフラクタル構造はない。

²乱流が穴が空いたような構造をもち、物理量が空間的に大きい値あるいは極端に小さい値を持つ形に分布し、逆に中間的な値を取りにくい性質を間欠性という [94]。散逸率の非一様性を仮定した理論は間欠性理論と呼ばれる。

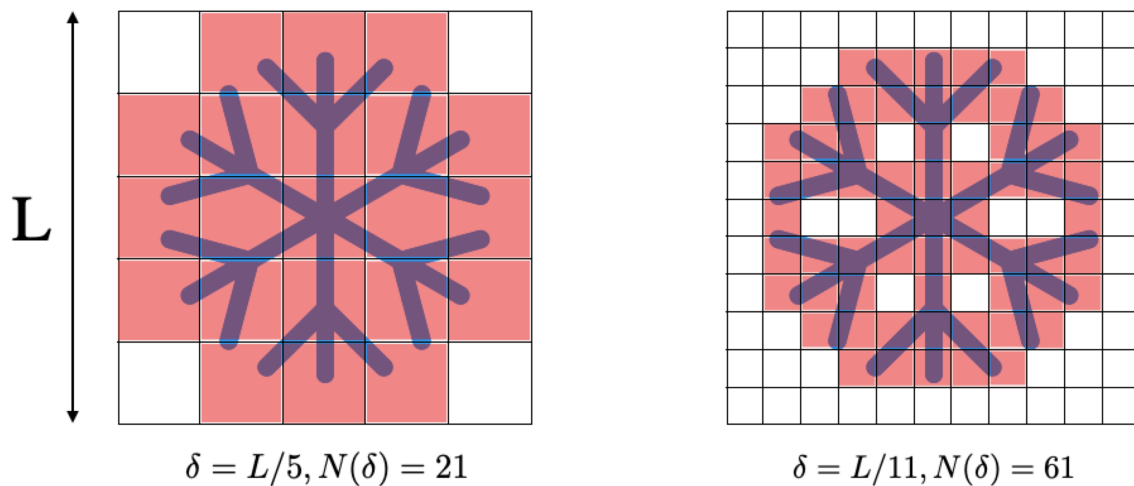


図 B.1: ボックスカウント法の概念図。空間をスケール δ の箱で分割している。パターンを覆う箱は赤く色付けされている。左側は 5×5 分割して $\delta = L/5$ となった場合、右側は 11×11 分割して $\delta = L/11$ の場合を表している。

という形に修正される。これをベータモデルという。その他にも、2つのフラクタル構造の重ね合わせを仮定したバイフラクタルモデルや無数の重ね合わせを仮定したマルチフラクタルモデルが考案されている。Müllerらは量子流体を一般化 Gross-Pitaevskii 方程式を用いてモデル化し、循環のモーメントを計算することで、量子乱流がバイフラクタル的であるという結果を挙げている [5]。

付 録 C 球面の境界条件の計算

ここでは球面の境界条件を解く手法を記述する。固体境界条件については、流体が染み込まないように超流動速度場 \mathbf{v}_b を印加しなければならない。ある渦糸線素 $d\mathbf{s}$ が作る超流動速度場 $d\mathbf{u}_s$ はポテンシャル $d\Phi$ を用いて、 $d\mathbf{u}_s = \nabla d\Phi$ とかける。この方程式は非圧縮性 $\nabla \cdot \mathbf{u}_s = 0$ から Laplace 方程式 $\nabla^2 d\Phi = 0$ に従う。

動径 r 、方位角 ϕ 、仰角 θ で表される極座標を用いると、極座標系での Laplace 方程式の一般解は

$$d\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}} \right) (c_m \cos m\phi + d_m \sin m\phi) P_n^m(\cos\theta) \quad (\text{C.1})$$

となる。ここで $P_n^m(\cos\theta)$ は Legendre 陪多項式である。係数 a_n 、 b_n 、 c_m 、 d_m は境界条件を与えることで決定される。

$$d\mathbf{u}_s = \frac{\kappa}{4\pi} \frac{(\mathbf{s} - \mathbf{r}) \times d\mathbf{s}}{|\mathbf{s} - \mathbf{r}|^3} \quad (\text{C.2})$$

であるため、境界条件は

$$\left(\frac{\partial d\Phi}{\partial r} \right)_{r=a} + \frac{\kappa}{4\pi} \frac{(\mathbf{s} - a\mathbf{e}_r) \times d\mathbf{s}}{|\mathbf{s} - \mathbf{r}|^3} \cdot \mathbf{e}_r = 0 \quad (\text{C.3})$$

ここで a は球の半径、 \mathbf{r} は球の表面の単位法線ベクトルである。これより、渦が球の内に存在する時のポテンシャルを $d\Phi_{in}$ 、外に存在する時のポテンシャルを $d\Phi_{out}$ とおくと、

$$d\Phi_{in} = \frac{\kappa}{4\pi} ds_{\perp} \frac{\sin\phi}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{s}{r} \right) \frac{P_n^1(\cos\theta)}{n+1} \quad (\text{C.4})$$

$$d\Phi_{out} = \frac{\kappa}{4\pi} ds_{\perp} \frac{a \sin\phi}{sr} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^2}{sr} \right) \frac{P_n^1(\cos\theta)}{n+1} \quad (\text{C.5})$$

となる。Legendre 陪多項式は

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \quad (\text{C.6})$$

$$\frac{x^2-1}{n} \frac{d}{dx} P_n(x) = xP_n(x) - P_{n-1}(x) \quad (\text{C.7})$$

を用いて、Legendre 多項式 $P_n(x)$ で表せる。また、Legendre 多項式は、 $P_0(x) = 1$ 、 $P_1(x) = x$ と漸化式

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x) \quad (\text{C.8})$$

を用いて計算できる。これらを用いて、渦線素 $d\mathbf{s}$ が境界条件を満たすために作る超流動速度場が計算できる。

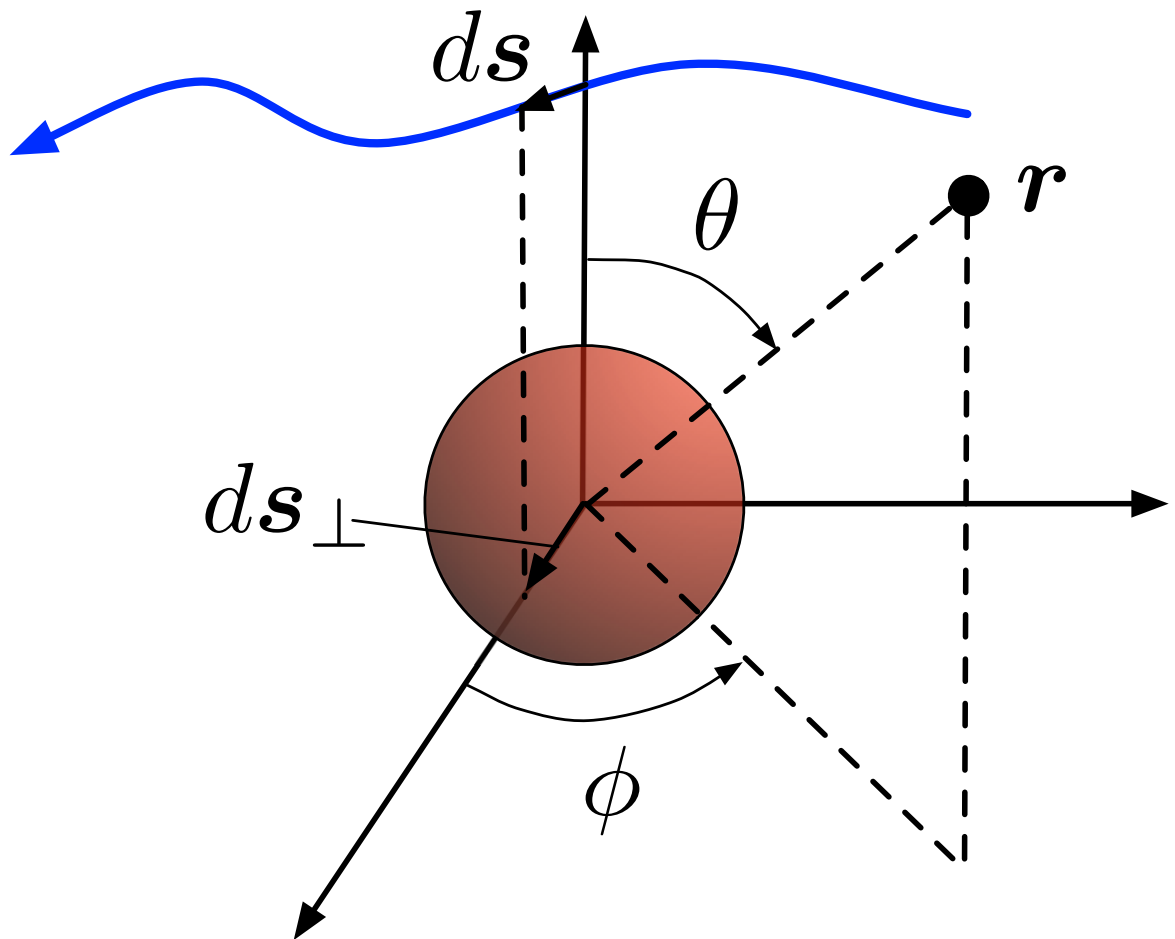


図 C.1: 線素 ds に対する座標 r を示した極座標系の概念図。原点を球の中心に置き、仰角は線素 ds の位置を基準に決まる。方位角は仰角の軸に垂直な成分 ds_{\perp} で決まる。

付録D “張力”について

渦から物体に作用する力として、本論文では“張力”という表現を用いた。張力といえば、弦が張っている時のように、両側に引き合う力が働くことを指す。この張力により、Kelvin波のような波が渦上で維持されている [61]。というのも、張力は本質的には自己誘導速度と同等である。式 (3.3) にある張力 \mathbf{F}_T を展開すると $\mathbf{F}_T = \rho_s \kappa \mathbf{s}' \times (-\beta_{\text{ind}} \mathbf{s}' \times \mathbf{s}'') \Delta \xi$ となる。これは式 (3.4) と合わせると $\rho_s \kappa \mathbf{s}' \times (\mathbf{v}_p - (\beta_{\text{ind}} \mathbf{s}' \times \mathbf{s}'' + \mathbf{v}_{s, \text{nl}})) \Delta \xi = \rho_s \kappa \mathbf{s}' \times (\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_s) \Delta \xi$ という形になり、式 (1.23) と一致する。0 K では張力と Magnus 力が釣り合うことで渦が動いている。この自己誘導速度から Kelvin 波の分散関係式 (1.49) を導出できるのであった。

Adams らは、スピニアップ実験において渦の張力を見積もった [48]。スピニアップ実験は超流動ヘリウム中で自由回転している容器に瞬間的に異なる各速度もったトルクを加え、その緩和を見る実験である。彼らは、中空円筒状の容器をディスク状の仕切りで 8 つに区切ったセルを用意し、それを超流動ヘリウムで満たし、磁気浮上させ、回転させた。彼らは、渦と境界にかかる力として次のようにモデル化した。

$$\mathbf{f}_b = \begin{cases} -(\mathbf{f}_D + \mathbf{f}_M) & \text{for } |\mathbf{f}_D + \mathbf{f}_M| < f_p \\ -f_p \hat{\mathbf{V}}_{Lb} - \xi \rho_s \kappa (\mathbf{V}_L - \mathbf{V}_b) & \text{for } |\mathbf{f}_D + \mathbf{f}_M| > f_p \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

ここで f_p は、ピンングから解放されるのに必要な単位長さあたりの力、 ξ は無次元の摩擦係数である。また、 \mathbf{V}_L 及び \mathbf{V}_b は渦及び境界の速度であり、 $\hat{\mathbf{V}}_{Lb}$ はそれらの相対速度の単位ベクトルである。ピンングが強く、渦が境界に固定され、容器とともに回転する場合、前者のようにドラッグ力と Magnus 力がかかる。一方、これらの力が f_p を上回ると、ピンングが外れるほどの力がかかり、ピンングによる作用の項が加わる。彼らの実験結果によると $f_p = 5.3 \text{ pN/cm}$ である。長さとして、ディスク間の間隔の半分の長さを選ぶと、解析的に計算できる張力と一致している。

動いている物体からエネルギーをもらい動くのに対して、逆に縮んでエネルギーを与える時もあるかもしれないが、私が知っている限りではそれを実際に研究しているものはない。

謝辞

本研究を進めるにあたり数多くの方々の支援を賜りました。坪田誠教授には、指導教官として本研究に対する手厚いご指導をいただき深く感謝しております。素励起物理学研究室の方々には、日頃から研究に関する議論をしていただき、研究を進める大きな原動力となりました。特に、量子渦糸モデルに関する議論を活発にしてくださった乾聡介氏と朝賀我夢氏に感謝の意を表します。初期の研究は、超低温物理学研究室の矢野英雄教授に多くの助言をいただくことで完成させることができ、そのおかげで私自身の研究者キャリアのスタートを切ることが出来たと思っています。学外でも、多くの方々にお世話になり、深く感謝しています。特に、大阪大学の蓑輪陽介先生や Florida 大学の Yoonseok Lee 先生と共同研究を行なったことは自分の人生の中で非常に価値がある経験です。

本研究の一部は、JST 科学技術イノベーション創出に向けた大学フェロシップ創設事業 JPMJFS2138、JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2139、JSPS 特別研究員奨励費 JP23KJ1832 の助成を受け遂行されました。

参考文献

- [1] 坪田 誠, 笠松 健一, 小林 未知数, 竹内 宏光, 「量子流体力学」 (丸善出版, 2018).
- [2] P. Kapitza, *Nature* **141**, 74 (1938).
- [3] V. F. Sears, E. C. Svensson, P. Martel, and A. D. B. Woods, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 279 (1982).
- [4] N. P. Müller and G. Krstulovic, *Phys. Rev. B* **102**, 134513 (2020).
- [5] N. P. Müller, J. I. Polanco, and G. Krstulovic, *Phys. Rev. X* **11**, 011053 (2021).
- [6] H. Palevsky, K. Otnes, and K. E. Larsson, *Phys. Rev.* **112**, 11 (1958).
- [7] V. F. Sears, E. C. Svensson, P. Martel, and A. D. B. Woods, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 279 (1982).
- [8] E. F. Burton, *Nature* **135**, 265 (1935).
- [9] L. Landau, *Phys. Rev.* **60**, 356 (1941).
- [10] L. Tisza, *Nature* **141**, 913 (1938).
- [11] W. F. Vinen, *Proc. R. Soc. Lond. A* **260**, 218 (1961).
- [12] G. P. Bewley, D. P. Lathrop, and K. R. Sreenivasan, *Nature* **441**, 588 (2006).
- [13] Y. Tang, W. Guo, H. Kobayashi, S. Yui, M. Tsubota, and T. Kanai, *Nat. Commun.* **14**, 2941 (2023).
- [14] Y. Minowa, S. Aoyagi, S. Inui, T. Nakagawa, G. Asaka, M. Tsubota, and M. Ashida, *Sci. Adv.* **8**, eabn1143 (2022).
- [15] K. W. Schwarz, *Phys. Rev. B* **18**, 245 (1978).
- [16] C. F. Barenghi, R. J. Donnelly, and W. F. Vinen, *J. Low Temp. Phys.* **52**, 189 (1983).
- [17] K. W. Schwarz, *Phys. Rev. B* **31**, 5782 (1985).
- [18] T. C. M. Institute, Millennium problems, solution to the navier-stokes equation. (2000), <https://www.claymath.org/millennium-problems>.
- [19] W. F. Vinen, *Proc. R. Soc. Lond. A* **240**, 114 (1957).

- [20] W. F. Vinen, Proc. R. Soc. Lond. A **240**, 128 (1957).
- [21] W. F. Vinen, Proc. R. Soc. Lond. A **242**, 493 (1957).
- [22] W. F. Vinen, Proc. R. Soc. Lond. A **243**, 400 (1958).
- [23] K. W. Schwarz, Phys. Rev. B **38**, 2398 (1988).
- [24] H. Adachi, S. Fujiyama, and M. Tsubota, Phys. Rev. B **81**, 104511 (2010).
- [25] J. Jäger, B. Schuderer, and W. Schoepe, Phys. Rev. Lett. **74**, 566 (1995).
- [26] J. Luzuriaga, J. Low Temp. Phys. **108**, 267 (1997).
- [27] H. Yano, N. Hashimoto, A. Handa, M. Nakagawa, K. Obara, O. Ishikawa, and T. Hata, Phys. Rev. B **75**, 012502 (2007).
- [28] N. Hashimoto, R. Goto, H. Yano, K. Obara, O. Ishikawa, and T. Hata, Phys. Rev. B **76**, 020504(R) (2007).
- [29] D. Garg, V. B. Efimov, M. Giltrow, P. V. E. McClintock, L. Skrbek, and W. F. Vinen, Phys. Rev. B **85**, 144518 (2012).
- [30] D. I. Bradley, S. N. Fisher, A. M. Guénault, R. P. Haley, V. Tsepelin, G. R. Pickett, and K. L. Zaki, J. Low Temp. Phys. **154**, 97 (2009).
- [31] D. I. Bradley, M. J. Fear, S. N. Fisher, A. M. Guénault, R. P. Haley, C. R. Lawson, P. V. E. McClintock, G. R. Pickett, R. Schanen, V. Tsepelin, and L. A. Wheatland, J. Low Temp. Phys. **156**, 116 (2009).
- [32] H. Yano, Y. Nago, R. Goto, K. Obara, O. Ishikawa, and T. Hata, Phys. Rev. B **81**, 220507(R) (2010).
- [33] D. I. Bradley, A. M. Guénault, S. N. Fisher, R. P. Haley, M. J. Jackson, D. Nye, K. O'Shea, G. R. Pickett, and V. Tsepelin, J. Low Temp. Phys. **162**, 375 (2011).
- [34] D. I. Bradley, S. N. Fisher, A. M. Guénault, R. P. Haley, M. Kumar, C. R. Lawson, R. Schanen, P. V. E. McClintock, L. Munday, G. R. Pickett, M. Poole, V. Tsepelin, and P. Williams, Phys. Rev. B **85**, 224533 (2012).
- [35] D. I. Bradley, M. Človečko, S. N. Fisher, D. Garg, E. Guise, R. P. Haley, O. Kolosov, G. R. Pickett, V. Tsepelin, D. Schmoranzer, and L. Skrbek, Phys. Rev. B **85**, 014501 (2012).
- [36] H. Yano, K. Sato, K. Hamazaki, R. Mushiake, K. Obara, and O. Ishikawa, J. Low Temp. Phys. **196**, 184 (2019).
- [37] W. Guo, J. D. Wright, S. B. Cahn, J. A. Nikkel, and D. N. McKinsey, Phys. Rev. Lett. **102**, 235301 (2009).

- [38] A. Marakov, J. Gao, W. Guo, S. W. Van Sciver, G. G. Ihas, D. N. McKinsey, and W. F. Vinen, *Phys. Rev. B* **91**, 094503 (2015).
- [39] S. Yui and M. Tsubota, *Phys. Rev. B* **91**, 184504 (2015).
- [40] S. Yui, M. Tsubota, and H. Kobayashi, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 155301 (2018).
- [41] S. Yui, H. Kobayashi, M. Tsubota, and W. Guo, *Phys. Rev. Lett.* **124**, 155301 (2020).
- [42] P. W. Anderson and N. Itoh, *Nature* **256**, 25 (1975).
- [43] K. W. Schwarz, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 251 (1981).
- [44] M. Tsubota and S. Maekawa, *Phys. Rev. B* **47**, 12040 (1993).
- [45] M. Tsubota, *Phys. Rev. B* **50**, 579 (1994).
- [46] W. I. Glaberson and R. J. Donnelly, *Phys. Rev.* **141**, 208 (1966).
- [47] P. Hakonen, O. Avenel, and E. Varoquaux, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3451 (1998).
- [48] P. W. Adams, M. Cieplak, and W. I. Glaberson, *Phys. Rev. B* **32**, 171 (1985).
- [49] R. J. Zieve, C. M. Frei, and D. L. Wolfson, *Phys. Rev. B* **86**, 174504 (2012).
- [50] M. Kobayashi and M. Tsubota, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 065302 (2005).
- [51] M. Kobayashi and M. Tsubota, *J. Phys. Soc. Jpn.* **74**, 3248 (2005).
- [52] S. Yui, K. Fujimoto, and M. Tsubota, *Phys. Rev. B* **92**, 224513 (2015).
- [53] T. Nakagawa, S. Inui, M. Tsubota, and H. Yano, *Phys. Rev. B* **101**, 184515 (2020).
- [54] T. Nakagawa, S. Inui, and M. Tsubota, *Phys. Rev. B* **104**, 094510 (2021).
- [55] D. Kivotides, C. F. Barenghi, and D. C. Samuels, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 155301 (2001).
- [56] T. P. Simula, T. Mizushima, and K. Machida, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 020402 (2008).
- [57] T. P. Simula, T. Mizushima, and K. Machida, *Phys. Rev. A* **78**, 053604 (2008).
- [58] H. Takeuchi, K. Kasamatsu, and M. Tsubota, *Phys. Rev. A* **79**, 033619 (2009).
- [59] G. Krstulovic, *Phys. Rev. E* **86**, 055301 (2012).
- [60] K. Kasamatsu, M. Okada, and H. Takeuchi, *Phys. Rev. A* **107**, 013309 (2023).
- [61] R. J. Donnelly, *Quantized Vortices in Helium II* (Cambridge University Press, Cambridge, New York, 2005).

- [62] T. Brugarino, M. S. Mongiovi, and M. Sciacca, *Z. Angew. Math. Phys.* **66**, 1081 (2015).
- [63] W. Thomson, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* **10**, 443–456 (1880).
- [64] W. F. Vinen, M. Tsubota, and A. Mitani, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 135301 (2003).
- [65] E. Kozik and B. Svistunov, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 035301 (2004).
- [66] V. S. L’vov and S. Nazarenko, *JETP Letters* **91**, 428 (2010).
- [67] S. Inui, *Theoretical and numerical studies on quantum hydrodynamics in superfluid ^4He : Approaches based on the two-fluid model & one-fluid extended model*, Ph.D. thesis, Osaka City University (2023).
- [68] A. Bachtold, J. Moser, and M. I. Dykman, *Rev. Mod. Phys.* **94**, 045005 (2022).
- [69] A. Guthrie, S. Kafanov, M. T. Noble, Y. A. Pashkin, G. R. Pickett, V. Tsepelin, A. A. Dorofeev, V. A. Krupenin, and D. E. Presnov, *Nat. Commun.* **12**, 2645 (2021).
- [70] T. Kamppinen, J. T. Mäkinen, and V. B. Eltsov, *Phys. Rev. B* **107**, 014502 (2023).
- [71] C. S. Barquist, W. G. Jiang, K. Gunther, N. Eng, Y. Lee, and H. B. Chan, *Phys. Rev. B* **101**, 174513 (2020).
- [72] C. S. Barquist, W. G. Jiang, K. Gunther, Y. Lee, and H. B. Chan, *Phys. Rev. B* **106**, 094502 (2022).
- [73] M. Gonzalez, P. Zheng, B. H. Moon, E. Garcell, Y. Lee, and H. B. Chan, *J. Low Temp. Phys.* **171**, 200 (2013).
- [74] M. González, W. G. Jiang, P. Zheng, C. S. Barquist, H. B. Chan, and Y. Lee, *Phys. Rev. B* **94**, 014505 (2016).
- [75] P. Zheng, W. G. Jiang, C. S. Barquist, Y. Lee, and H. B. Chan, *Phys. Rev. Lett.* **118**, 065301 (2017).
- [76] P. Zheng, W. G. Jiang, C. S. Barquist, Y. Lee, and H. B. Chan, *J. Low Temp. Phys.* **187**, 309 (2017).
- [77] M. Blažková, M. Človečko, E. Gažo, L. Skrbek, and P. Skyba, *J. Low Temp. Phys.* **148**, 305 (2007).
- [78] D. D. Awschalom and K. W. Schwarz, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 49 (1984).
- [79] C. Barquist, W. Jiang, K. Gunther, and Y. Lee, *Physica D: Nonlinear Phenomena* **427**, 132999 (2021).
- [80] K. W. Schwarz, *Phys. Rev. B* **47**, 12030 (1993).
- [81] S. Fujiyama and M. Tsubota, *Phys. Rev. B* **79**, 094513 (2009).

- [82] T. Nakagawa, M. Tsubota, K. Gunther, and Y. Lee, Phys. Rev. B **108**, 144110 (2023).
- [83] M. Tsubota, T. Araki, and S. K. Nemirovskii, Phys. Rev. B **62**, 11751 (2000).
- [84] G. W. Stagg, N. G. Parker, and C. F. Barengi, Phys. Rev. Lett. **118**, 135301 (2017).
- [85] P. M. Walmsley and A. I. Golov, Phys. Rev. Lett. **100**, 245301 (2008).
- [86] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics* (Elsevier, 1987).
- [87] A. Pomyalov, Phys. Rev. B **101**, 134515 (2020).
- [88] K. W. Schwarz, Phys. Rev. Lett. **69**, 3342 (1992).
- [89] K. P. Martin and J. T. Tough, Phys. Rev. B **27**, 2788 (1983).
- [90] Y. Minowa, X. Geng, K. Kokado, K. Sato, T. Kameyama, T. Torimoto, and M. Ashida, Optica **9**, 139 (2022).
- [91] Y. Minowa, private communication (2023).
- [92] Y. Mineda, M. Tsubota, Y. A. Sergeev, C. F. Barengi, and W. F. Vinen, Phys. Rev. B **87**, 174508 (2013).
- [93] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering* (Westview Press, 2000).
- [94] 木田 重雄 柳瀬 眞一郎, 「乱流力学」 (朝倉書店, 1999).